Grundzüge

einer

theoretischen Spektralanalyse.

Von

Dr. Rudolf v. Kövesligethy,

Privatdocent an der Universität Budapest und Assistent am physikalischen Institute.

Mit 23 Holzschnitten und 7 Tafeln.

Halle a/S. 1890.

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

Ihrer Hochgeboren

Frau Baronin **Geiza von Podmaniczky**
geb. Gräfin Bertha von Degenfeld-Schomburg

in aufrichtiger Verehrung und Hochachtung

zugeeignet

vom Verfasser.

Inhalts-Verzeichnis.

IV. Theorie der astrophysikalischen Instrumente.

Vorwort.

Veranlassend für die Entstehung dieses Buches war der Umstand, dafs ich im Jahre 1884 und 1885 auf der Sternwarte O-Gyalla mit spektralphotometrischen Messungen der helleren Fixsterne beschäftigt, die Unfähigkeit empfand, die Messungen auf abstraktere Elemente als die Intensitäten der einzelnen Wellenlängen zu reduzieren. Eine Extrapolation der erhaltenen Intensitätskurve auf eine von der zeitlich vielleicht sich fortentwickelnden, daher veränderlichen Augenempfindlichkeit unabhängige Ausdehnung schien zu gewagt, die Interpretation der Resultate durch eine selbst wenige Konstanten enthaltende Reihe bedeutungslos. Durchdrungen von der lebhaften Überzeugung, dafs das auch im mathematischen Sinne streng kontinuierliche Spektrum sich auch eben dieser Eigenschaft halber auf eine Funktion der Wellenlänge und weniger Parameter müsse reduzieren lassen, welche dann später als Zustandsvariabele aufgefafst und in die Wärmetheorie eingeführt für die Astrophysik das werden müssen, was die Mechanik für die Astronomie geworden, stellte ich im Frühjahre 1885 nach Übergehen einiger schon früher angebahnten Versuche, welche meist auf der Bestimmung der Wellenlänge und Intensität wenig zusammengesetzter Gase sich bezog, Untersuchungen über den Gegenstand an, als dessen Resultat sich das Prinzip der Erhaltung der Körpereigenschaften ergab, und aus welchen sofort die fundamentale Spektralgleichung folgte. Nun begann eine Reihe schwieriger Untersuchungen teils auf eigenen Beobachtungen, teils auf Messungen beruhend, die ich aus der Literatur der Spektralanalyse geschöpft; schwierig, denn es handelte sich um den bisher noch nicht beachteten Fall des objektiven Spektrums, und kein Physiker wird behaupten, je ein der Natur und Wirklichkeit entsprechendes Spektrum, sei es mit dem Auge, der Thermosäule oder der empfindlichen Platte seiner Kamera beobachtet zu haben. Was wir sehen, ist nicht die Intensität des Spektrums, sondern nur der von der Retina absorbierte Teil derselben. Dafs zwischen diesen beiden Proportionalitätsverhältnisse stattfinden, ist längst bekannt; dafs aber der Proportionalitätsfaktor nicht für alle Farben derselbe zu sein braucht, ist einleuchtend. Es mufste also vor Allem ein Ausdruck der Augenempfindlichkeit (oder der Empfindlichkeit eines jeden andern Reagens) gesucht werden, und da in der Erfahrung ein objek-

tives Spektrum gar nicht existiert, so mufste dieser Ausdruck, der natürlich nur auf den allgemeinsten Thatsachen beruhen durfte, so umgestaltet werden können, dafs er statt der Intensität ein anderes, der Beobachtung zugängliches Element enthielt.

Als dieses befriedigend gelungen war, jedes subjektive Spektrum auf das objektive, das allein der Wirklichkeit entsprechende, reduziert werden konnte, und die Erfahrung der neuen Theorie in Allem beistimmte, selbst als es sich um ein fünfmal längeres Spektrum handelte, als das sichtbare, suchte ich die Fundamentalgleichung von den ihr noch anhaftenden Hypothesen, betreffend unsere Anschauungen über die Natur der Materie und des Lichtäthers zu befreien. Auch dieses dürfte gelungen sein, und so konnte ich nun in verhältnismäfsig kurzer Zeit auf Grund der einzigen Gleichung des kontinuierlichen Spektrums das ganze Gebiet der Spektralanalyse durchgehen, die Gleichung in ihren äufsersten Konsequenzen zu prüfen.

Es gelang so, ohne wesentliche neue Hypothesen einführen zu müssen, das Spektrum fester als gasförmiger Körper als explizite Funktion des thermodynamischen Zustandes darzustellen, und umgekehrt, diesen aus den Erscheinungen des Spektrums zu berechnen. Die Lockyersche Methode, die darauf gegründete Emissionsanalyse entfaltet sich daraus in gröfster Einfachheit, und alle Erscheinungen des Spektrums, Wellenlängen und Zahl der auftretenden Linien, die interessanten von Lockyer näher untersuchten Linienkoinzidenzen finden ihre mathematische Erklärung.

Meine Studien hatten sich, mittlerweile zu Papier gebracht, zu einem stattlichen Bande angesammelt, und da die grundlegenden Abhandlungen in der ungarischen Akademie der Wissenschaften bereits erschienen, glaubte ich die Resultate nicht länger zurückhalten zu sollen.

Bezüglich der gewählten Einteilung werden aber noch einige Worte am Platze sein. Ein Lehrbuch der Spektralanalyse zu geben war nicht mein Zweck, da der Praktiker seinem Ziele entsprechend deren zur Genüge findet. Ich wollte es aber auch umgehen, in den mathematischen Entwickelungen stets auf die vielleicht zu sehr naturhistorisch gehaltenen Kompendien zurückzugreifen, und glaubte daher nur das Notigste in einer Einleitung bieten zu sollen, das zweckdienlich und unter einheitlichem Gesichtspunkte zusammenfafsbar erschien.

Auf eine Theorie der schwingenden Bewegung hätte ich ungern verzichtet. Nicht dafs durchaus alles dabei zur Sprache Gekommene in den späteren Kapiteln auch wirklich verwertet wäre, sondern weil eine Spektralanalyse ohne vorhergehende Übung und Übersicht in dieser Art von Bewegung nicht denkbar. Die Lehrbücher der Spektralanalyse können diese wichtige Disziplin nicht bringen, die Kompendien der Physiker bringen sie nicht in der Form, in welcher sie dem Spektralanalytiker vorzulegen sind. Und so kommt es, dafs hier nicht aus einem Gedanken, einer Gleichung möglichst viel abgeleitet wird, sondern dafs verschiedene Auffassungen beleuchtet werden, die alle noch von Nutzen sein werden.

Die mathematische Spektralanalyse, sowie die Theorie der Instrumente ist mit wenigen Ausnahmen durchaus neu.

Und nun obliegt mir noch die angenehme Pflicht einer Danksagung. Die erste — sie mufste leider ein Nachruf werden — gebührt meinem hochverehrten Lehrer, dem weil. Prof. Hofrat Theodor Ritter von Oppolzer, der, obwohl der Astrophysik ferner stehend, seinen Schüler stets in die Bahnen einer mathematischen Behandlung dieses Gegenstandes lenkte. Sein „ich sehe, Sie gehen auf dem rechten Wege", als ich die Theorie der kontinuierlichen Spektra ihm vorlegte, war mir Aneiferung und Lohn.

Die zweite den Herren Dr. Nikolaus v. Konkoly und Baron Geiza v. Podmaniczky. An des ersteren Herrn trefflicher Sternwarte durfte ich als Observator Jahre hindurch unter wohlwollender Leitung und bewährten Ratschlägen arbeiten und forschen: ich verehre in ihm den mir freundlich gesinnten Lehrer und den eifrigsten Förderer der Astrophysik. An dem Observatorium Kis Kartal war ich nicht nur stets ein herzlich bewillkommter Gast: dem freundlichen Besitzer danke ich's, dafs dieses Werk nach vielen vergeblichen Bemühen in der trefflichen Ausstattung des Herrn Verlegers erscheinen konnte; es ist in der That kaum weniger, als eine Publikation der Sternwarte selbst.

Die andere Danksagung verdient in höchstem Mafse die ungarische Akademie der Wissenschaften, welche die zu mehreren Gelegenheiten vorgelegten hierher bezüglichen Abhandlungen einer strengen, doch tiefeingehenden und liebevollen Kritik unterwarf. Diesen Kritiken verdanke ich Manches, was die Übersicht des Ganzen fördern mufste, ihnen auch die Aneiferung des Weiterforschens.

Ist aber noch Unklares — und dafs dem so ist, fühle ich wohl selbst am besten — stellenweise selbst Irrtümliches geblieben, so möge das durch die Neuheit und die grofse Ausdehnung des Gegenstandes freundlichst entschuldigt werden.

Kis Kartal, im Winter 1889.

Der Verfasser.

I.

Einleitung.

1. Emissionsspektrum.

Durch zahlreiche Erfahrungen, welche das ganze Gebiet der Chemie, einen grofsen Teil der Physik und selbst der mechanischen Wärmetheorie betreffen, gestützt, nehmen wir an, die Körper bestehen aus selbständigen kleinsten Teilchen, den Molekeln; diese wieder aus den kleinsten, selbständig nicht mehr denkbaren Partikelchen der chemischen Elemente, den Atomen. Aus mechanischen Gründen müssen wir dann nicht nur den Molekeln als Ganzes, sondern auch ihren einzelnen Bestandteilen, den Atomen, Bewegungen zuschreiben. Obwohl nun von den Elementen dieser Bewegung gar nichts bekannt ist, — nur für die Molekularbewegung der Gase besitzen wir eine fruchtbare Hypothese, — so läfst sich soviel doch ganz unzweifelhaft behaupten, dafs dieselbe wenigstens als Mittelzustand einer endlichen Beobachtungszeit aufgefafst, eine periodische sein mufs. Denn in jedem andern Falle würde das Atom die Molekel verlassen, und diese aus dem Verbande des Molekulargefüges treten, was, da wir den Körper unverändert voraussetzen, nicht möglich ist.

Neben der Annahme einer inneren Bewegung im Körper müssen wir noch eine zweite Hypothese aufstellen, dafs der Weltraum, und ebenso die intramolekularen Räume von einem elastischen Medium, dem Äther, erfüllt seien. Keine der beiden Hypothesen braucht bei dem heutigen Stande der Wissenschaft, der theoretischen Optik insbesondere, verfochten zu werden.

Die Schlüsse, welche sich aus der Annahme der beiden Hypothesen ergeben müssen, übersieht man leicht. Der elastische Äther übernimmt die Impulse der Molekeln und Atome entweder einzeln oder schon zu Mittelwerten vereint, und führt sie als periodische Schwingungen in Kugelflächen sich verbreitend fort.

Die Summe aller unter Einwirkung eines Körpers zu Stande kommenden Ätherschwingungen nennen wir unabhängig von räumlicher Trennung und unabhängig von den Reagentien, mit welchen wir sie wahrnehmen, Spektrum. Die Verallgemeinerung dieses Begriffes wird keine Mifsverständnisse hervorrufen, da es für die mathematische Behandlung völlig gleichgültig ist, ob man die einzelnen Strahlen nach individuellen Eigenschaften räumlich getrennt sich vorstellt, oder aber dieselben vereint beläfst. Bei Beobachtungen wird man natürlich unter Spektrum immer die getrennten Strahlen zu

verstehen haben, es wäre denn ausdrücklich das Gegenteil gesagt. In solchen Fällen wollen wir gesonderte und ungesonderte Strahlenkomplexe unterscheiden.

Es wird uns nun ein Leichtes sein, schon jetzt einige allgemeine Sätze der Spektra abzuleiten.

Betrachten wir die Molekularbewegungen der Körper, so können wir wohl sagen, ohne Näheres von ihnen zu wissen, dafs dieselben wenigstens quantitativ in den verschiedenen Körpern verschieden sein müssen. Jedenfalls gilt dies für die verschiedenen Aggregatzustände — als erste Eigenschaft der Körper — desselben Stoffes. Da nun verschiedene Körper gleich behandelt nicht gleichzeitig denselben Aggregatzustand annehmen, so müssen, wie wir es vorhin betont — die Molekularbewegungen überhaupt allgemein verschieden sein. Daraus folgt: ein jeder Körper hat in einem bestimmten Zustande ein eigenes Spektrum, das sich von dem Spektrum eines andern Körpers im demselben Zustande zum Mindesten quantitativ unterscheidet.

Die Berechtigung aber eines quantitativen und qualitativen Unterschiedes ergiebt sich durch Betrachtung der Spektra der verschiedenen Aggregatzustände. Wir betonten, dafs der Bestand eines Körpers enge mit der Art der Bewegung seiner kleinsten Teilchen zusammenhänge. Ist diese eine derartige, dafs die Molekeln leicht ihre Gleichgewichtslage verlassen, infolge ihrer Trägheit weiterschreiten, und nur durch die Einwirkung äufserer Widerstände periodischen Hindernissen begegnen, so nennen wir den so bedingten Aggregatzustand den gasförmigen. Diese Definition involviert die Folgerung einer grofsen Freiheit der Atome, welche durch nahegelegene Molekeln nicht beeinträchtigt werden. Es sind daher die dem Äther mitgeteilten Impulse grofstenteils nur von der Bewegung der Atome abhängig. Da aber die Molekeln eines Körpers einander gleich sein müssen, und die Zahl der in ihr enthaltenen Atome nicht unendlich grofs sein kann, so mufs das Spektrum eines Gases aus einzelnen Schwingungen bestehen, die sich (verglichen mit denselben Schwingungen desselben Gases) qualitativ nicht mehr von einander unterscheiden können, als die Bewegung eines Atoms von deren periodischem Mittelwerte.

Der feste Aggregatzustand der Körper ist bedingt durch die geringe Freiheit der Molekeln. Sie können die ursprünglich eingenommene Gleichgewichtslage nicht in fortschreitender Bewegung verlassen, müssen also in ihrer periodischen Bewegung fortdauernd sich gegenseitig beeinflussen und hindern. Die dem Äther mitgeteilten Impulse werden also den verschiedensten Perioden entsprechen, der feste Körper wird einen Strahlenkomplex aussenden, in welchem auch nicht ein, von den andern Strahlen qualitativ verschieden denkbarer Strahl fehlen wird.

Der flüssige Aggregatzustand steht zwischen den beiden besprochenen. Die Molekeln, noch nicht frei genug, unbehindert von den benachbarten Teilchen eigene Bahnen zu beschreiben, sind auch nicht fest genug an die ursprüngliche Gleichgewichtslage gebunden. In der eingeschlagenen Bahn verlieren sie bald ihre Bewegungsenergie, um in einer neuen Gleichgewichtslage wieder neuen Impuls zu erhalten. Die Atome der einzelnen Molekeln sind aber von den benachbarten Molekeln fast ebenso beständig beeinflufst, wie im festen Aggregatzustande. Wir beobachten also ein Spektrum, in welchem Strahlen von allen möglichen zwischen zwei Grenzen enthaltenen Periodendauern der Impulse vorkommen. Dieses Spektrum wird sich also von dem der festen Körper nur quantitativ, und qualitativ nur durch eine etwas geringere Ausdehung des Strahlungskomplexes unterscheiden.

Spektra, welche Strahlen aller möglichen qualitativen Verschiedenheit enthalten, heifsen kontinuierliche, da zwischen zwei benachbarten Strahlen kein existierender, von den beiden qualitativ verschiedener gedacht werden kann.

Spektra, welche Strahlen einer begrenzten Anzahl von qualitativ denkbaren Verschiedenheiten enthalten, heifsen diskontinuierliche.

Wie wir nun die qualitativen und quantitativen Unterschiede der einzelnen Schwingungen näher definieren, ist leicht einzusehen. Hier haben wir durch eine unendliche Anzahl von verschiedenen Periodendauern der Impulse eine unendlich grofse Mannigfaltigkeit der qualitativen Unterschiede erklärt, und wieder durch eine endliche Zahl von verschiedenen Impulsperioden eine entsprechend grofse endliche Zahl von qualitativen Unterschieden. Die Qualität des Strahles ist also durch die Dauer der Periode gegeben, innerhalb welcher ein Ätherteilchen von einem Körperteilchen neue Bewegungsimpulse erhält. Wegen der nahezu unbegrenzten Elastizität des Äthers ist nach einer jeden solchen Periode ein und derselbe Punkt des Strahls in demselben Zustande. Diese Periode entspricht daher der Schwingungsdauer. Dort haben wir qualitativ gleiche Spektra für quantitativ verschieden befunden. Soll dieser Unterschied wieder durch ein Element der Bewegung erklärt werden, so können wir nur mehr die beiden Annahmen machen, dafs entweder die Stärke des Impulses, oder aber die Richtung desselben verschieden ist. Wäre nun die Stärke des Impulses in beiden Fällen dieselbe, so müfste eine künstliche Drehung des Körpers, und damit der Bewegungsrichtung die beiden Spektra gleich machen. Es wäre also die quantitative Verschiedenheit zweier Spektra eine Funktion der gegenseitigen Neigung der beiden strahlenden Körper, was eine Ungereimtheit ist. Die Stärke des Impulses, das heifst, die lebendige Kraft der Bewegung der kleinsten Körperteilchen ist also die Ursache der quantitativen Unterschiede der Strahlen.

Statt der Schwingungsperiode des Strahles führen wir aber ein bequemeres Element ein: die Länge des Weges, den der Strahl während zwei Impulsen im Mittel zurücklegt, und nennen diesen Weg die Wellenlänge. Statt der lebendigen Kraft der Molekularbewegung dagegen wählen wir den auf den Äther übertragenen Teil derselben und nennen diesen die Intensität. Das dritte Element, welches, wie wir sahen, wohl den einzelnen Strahl charakterisiert, doch auf das Spektrum keinen Einflufs hat, definieren wir als Polarisationsebene. Wir verstehen darunter die durch den Strahl und die anfängliche Richtung des Stofses gelegte Ebene. Dafs dieselbe nicht als Bestimmungsstück des Spektrums auftritt, können wir leicht noch auf andere Weise zeigen. Wegen der unendlich grofsen Zahl der Molekeln und Atome, die selbst in einem kleinen Volumenelemente des Körpers enthalten ist, ist im allgemeinen anzunehmen, dafs die Bewegungsrichtung der Molekeln nach allen denkbaren Richtungen des Raumes weist, wenn nicht schon eine und dieselbe Molekel innerhalb einer endlichen Zeit unendlich viele verschiedene Bahnlagen annimmt. Daraus folgt, dafs die Polarisationsrichtung des Strahles in einer endlichen, doch noch so kurzen Zeit bereits alle möglichen Lagen durchläuft: der Strahl ist, wie man zu sagen pflegt, unpolarisiert, — richtiger: er ist nach einer geschlossenen Kurve polarisiert. Damit soll nur gesagt sein, dafs die Richtung der Polarisationsebene eine ganz beliebige Funktion der Zeit sein kann. Die Dimensionen der Kurve sind von keinem Belange; doch die Winkelbewegung in derselben mufs stets unendlich grofs sein.

Allgemein haben wir also erkannt, daſs ein jeder Strahl des Spektrums durch Wellenlänge und Intensität gegeben ist. Das erstere Element ist nun wohl ein relatives, da es von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Strahles in dem umgebenden Medium abhängt. Diese Abhängigkeit kann aber stets mit groſser Leichtigkeit berücksichtigt werden, oder darf gar völlig vernachlässigt werden, wenn man stets von demselben Medium, z. B. von atmosphärischer Luft spricht. Wir wollen die Wellenlänge, wenn nicht das Gegenteil gesagt ist, stets auf atmosphärische Luft im Normalzustande bezogen denken.

Die beiden Variabelen des Spektrums: Wellenlänge und Intensität sind von einander völlig unabhängig. Dies ergiebt sich leicht aus unseren Ableitungen. Denn wie auch die Periode der einzelnen Impulse beschaffen sein mag, die lebendige Kraft derselben könnte von ihr erst dann abhängig sein, wenn dies auch für die Bahndimensionen der Molekel gälte. Für die Annahme eines solchen Zusammenhangs fehlt aber der nötige Grund. Leitet man die Schwingungselemente auf analytischem Wege ab, so gelangt man stets zu der Periode als einer bestimmten Gröſse, zu den Bahndimensionen als willkürliche Gröſsen. Endlich haben aber auch die Versuche von Lippich[1] die Unabhängigkeit der beiden Elemente erwiesen. Diese sind so lehrreich, daſs sie wohl verdienen näher bekannt zu werden.

In der Brennebene eines Fernrohrobjektives wird eine Spalte angebracht, welche die von der Lichtquelle ausgehenden Strahlen zu passieren haben, worauf sie eine unter 45° gegen die optische Axe geneigte und der Spalte parallele plane Platte treffen. Hinter dem Objektive befindet sich ein Schirm mit zwei Beugungsplatten, von welchen nun zwei Strahlenbündel austretend auf das Objektiv eines zweiten Fernrohrs fallen. In der Brennebene desselben befindet sich ein Planspiegel, an welchem die beiden Strahlenbündel reflektiert werden, so zwar, daſs sie nun ihre früheren Wege vertauschend wieder durch die Beugungsplatten in das erste Fernrohr gelangen, sodann an der planparallelen Platte Reflexion erleiden, und nach dieser in einem seitlich angebrachten Okular interferieren. Vor einer der beiden Beugungsplatten, beispielsweise der rechten, wird nun entweder durch Reflexion, Polarisation oder Absorption Lichtschwächung erzeugt. Da das rechte austretende Strahlenbündel die Intentitätsänderung bei dem Austritt aus dem ersten Fernrohr erfährt, das linke austretende aber erst, nachdem es am Spiegel reflektiert in das erste Fernrohr durch die rechte Spalte eintritt, so ist die Distanz der beiden Schwächungsstellen gleich dem doppelten Abstand des Spaltenschirmes vom Spiegel des zweiten Fernrohrs, und kann demnach fast beliebig groſs gemacht werden, während die optischen Weglängen der Strahlen bei exakter Aufstellung immer identisch sind.

Es konnten 0.05 des Fransenabstandes beobachtet werden, indem derselbe mit dem Okular betrachtet 1.0—1.5 mm betrug. Die Entfernung des Spaltenschirmes vom Spiegel wurde zu 2.5 m gewählt, es war also die Distanz der Lichtschwächungsstellen 5 m. Obgleich nun die Lichtschwächung so weit als möglich getrieben wurde, zeigte sich bei keiner der oben erwähnten drei Arten der Intensitätsänderung die geringste Spur einer Fransenverschiebung, und eine solche Erscheinung trat auch dann noch nicht ein, als statt des Mediums Luft ein stärker brechendes angewendet wurde. Lippich faſst seine Versuche in dem folgenden Satze zusammen:

---

[1] F. Lippich, Sitzungsberichte d. Wiener Akad. d. Wissensch. LXXII. pag. 355.

In zweiter Näherung, wo bereits Hunderte von Millionenteilen einer Wellenlänge ksichtigt sind, ist die Wellenlänge des Lichtes sowohl im freien Äther, als auch gend welchen ponderablen Medien unabhängig von der (Amplitude) Intensität der chwingung, also wenn die Schwingungsdauer gegeben, eine nur von der Natur des d gedachten Mediums abhängende Konstante.

In neuerer Zeit hat sich auch Dr. H. Ebert[1] mit der Frage der Unabhängig- on Amplitude und Wellenlänge des Lichtes experimentell befasst. Er wendet das p der Interferenz homogenen Lichtes bei sehr grofsen Gangunterschieden an, indem ilförmige Glasplatten von resp. 7″—31″ Steigwinkel und 1·256—7·495 mm Dicke zt. Um die Lage der Interferenzstreifen möglichst genau messen zu können, et er das Prinzip der Heliometermessungen an, indem er die keilförmigen Platten ängsrichtung nach zerschneidet, und dann wieder mit entgegengesetzten Keilenden anderfügt. Es ist dadurch nicht nur eine Vergleichung gleichartiger Objekte glicht, was bei der Superposition von einem Mikrometerfaden oder einer Skale auf terferenzfransen nicht möglich wäre, sondern es wird sich auch jede Verschiebung ransen bei wechselnder Intensität im doppelten Betrage kenntlich machen.

Das Resultat dieser wichtigen Untersuchung spricht Ebert wie folgt aus:

Die Wellenlänge und damit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes ist is auf ein Milliontel genau unabhängig von seiner Intensität, wenn diese zwischen Werten 1 und 250 variiert.

Die einzelnen Beobachtungsresultate, die wir ihres grofsen Interesses halber ver- nen, lauten:

Lichtgattung	Die Helligkeit wurde herabgesetzt bis auf	Dabei ist nachgewiesen die Konstanz der Wellenlänge bis auf	Fortpflanzungsgeschwindigkeit bis auf
Li$_\alpha$	1/10	1/300 000	1·0 km
H$_\alpha$	1/34	1/340 000	0·9
Na$_\alpha$	1/34	1/500 000	0·6
Hg$_\alpha$	1/250	1/840 000	0·4
Tl$_\alpha$	1/20	1/860 000	0·3
H$_\beta$	1/10	1/320 000	1·0
Sr$_\delta$	1/9	1/340 000	0·9
Hg$_\beta$	1/10	1/520 000	0·6

Noch kann man endlich neben der Unabhängigkeit dieser beiden Elemente an- n, wie dies auch schon kurz besprochen wurde, dafs die beiden Variabeln ganz hängig von einander auf unsere Sinne einwirken. Betrachten wir hier den Gesichts- als den allgemeinsten Vermittler zwischen Strahlung und Bewufstsein, so empfinden Verschiedenheiten der Wellenlänge als Verschiedenheit von Eindrücken, die wir en nennen, Verschiedenheiten der Intensität als Stärke dieser Eindrücke. Freilich, diese unendlich grofs oder unendlich klein, so nähert sich erfahrungsmäfsig auch Empfindung der Farbe einer ganz bestimmten Grenze. Da aber eine unendlich e oder kleine Intensität nur ein relativer Begriff gegenüber dem Auge ist, so darf n nicht auf das physikalische Verhalten der beiden Elemente bei Annäherung ne Grenzen geschlossen werden. Da einer jeden Wellenlänge eine andere Farben-

[1] Wied. Ann. 1887. Heft 11. Bd. XXXII.

empfindung entspricht, so werden wir im folgenden haufig statt von der Wellenlange einer ganz bestimmten Strahlengattung zu reden, kurzweg von ihrer Farbe sprechen, die beiden Worte als vollig gleichbedeutend annehmen

Da Ruhe der Molekeln und Atome mit dem Zustande der absoluten Nulltemperatur identisch ware, so konnen wir wohl schliefsen, dafs ein jeder Korper von der tiefsten denkbaren Temperatur an bis zu dem Zustande, da er durch Temperaturerhohung beeinflufst aufhort, derselbe Korper zu sein, ein Spektrum besitzen musse, doch nicht immer sind wir im Stande, dasselbe auch zu beobachten Herrscht im Nullzustande absolute Ruhe der Korperteilchen, so mufs zunehmender Temperatur zunehmende Geschwindigkeit der Molekularbewegung entsprechen, da wir bisher nicht nur keinen zureichenden Grund gefunden, die lebendige Kraft dieser Bewegung als eine mit Maximis und Minimis behaftete Funktion der Temperatur zu betrachten, sondern im Gegenteile geradezu beide Begriffe identifizieren mufsten Es wird daher mit wachsender Temperatur die Intensitat des Spektrums zunehmen, und die zwischen zwei Impulsen verstreichende Zeit, mithin auch die Wellenlange, neben dem Bestande des grofseren Wertes derselben, kleiner werden Bei tiefen Temperaturen werden wir hauptsachlich grofse, bei hohen Warmegraden kleine Wellenlangen uberwiegend vorfinden Da nun die Strahlung eines allmalich hoher und hoher temperierten Korpers aufeinanderfolgend die Empfindung von Warme und Licht verursacht, sodann aber die bei Entdeckung der Spektralanalyse bekannten lichtempfindlichen Substanzen chemisch verandert, so nannte man Spektra mit vorwiegend grofsen, mittleren und kleinen Wellenlangen kalorische, optische und chemische Spektra Heute ist diese Einteilung von keiner physikalischen Bedeutung mehr, da die Einheit des Spektrums allgemein anerkannt ist, und wir im Stande sind, lange und kurze Wellen sichtbar zu machen, lange Wellen chemisch, kurze kalorisch wirkend darzustellen Diese Unterschiede liegen daher, da sie sich — wie die kurz angefuhrten Erfahrungen beweisen — von dem Spektrum unabhangig bezeigen, blofs in der Individualitat der zur Wahrnehmung benutzten Reagentien Doch behalt man der Bequemlichkeit halber gerne diese Einteilung bei, mit dem Unterschiede, dafs man die Spektra auf das optische allein bezieht, also von einem optischen Spektrum spricht, welches sich von Blau bis Rot, von Wellenlange 0 39 bis 0 76 Tausendstel eines Millimeters erstreckt, und statt des kalorischen das ultrarote, statt des chemischen das ultraviolette Spektrum setzt Dieses erstreckt sich nach dem heutigen Stande der Untersuchungsmethoden von 0 18 bis 0 39, jenes von 0 76 bis 2 70 Tausendstel Millimeter Da wir stets Wellenlangen von der besagten Grofsenordnung begegnen werden, so wird es unsern Erfahrungen nach am zweckmafsigsten, das Tausendstel des Millimeters als Einheit der Wellenlange zu wahlen

Wir haben gesehen, wie sehr die Wahrnehmung eines Spektrums mit der Individualitat des Beobachtungsreagens zusammenhangt, so zwar, dafs ein gegebenes Spektrum als fur das eine gar nicht existierend betrachtet werden kann, wahrend es auf das andere lebhaft einwirkt Da nach unserer Definition des Spektrums dieses von der Art der Wahrnehmung unabhangig sein mufste, so haben wir zwischen scheinbarem und wahrem Spektrum zu unterscheiden Da sich aber die meisten und wichtigsten Untersuchungen auf das sichtbare Spektrum beziehen, so wollen wir mit Rucksicht auf den Beobachter vielleicht zweckmafsiger noch die beiden, den fruheren synonymen Bezeichnungen des subjektiven als scheinbaren, und des objektiven als wahren Spektrums einfuhren Da wir von einem direkt oder projiziert beobachteten Spektrum, die gewohnlich

als subjektiv und objektiv bezeichnet zu werden pflegen, gar nicht zu sprechen haben, steht eine Verwechselung nicht zu befürchten.

Wir wollen nun einen neuen Begriff definieren, und sogleich einige interessante Folgerungen über die Beziehungen der beiden letztgenannten Spektra ziehen.

Das Verhältnis der objektiven zur subjektiven Intensität desselben Strahls heifst die Empfindlichkeit des angewendeten Reagens.

Wir betrachten nun ein beliebiges kontinuierliches Spektrum; wir fanden dasselbe (objektiv) aus theoretischen Gründen kontinuierlich, und zugleich zeigt auch die Beobachtung dieselbe Erscheinung für das subjektive Spektrum. Daraus folgt der Satz:

Die Empfindlichkeit eines jeden Reagens, welches das subjektive Spektrum eines strahlenden festen Körpers kontinuierlich darstellt, ist eine kontinuierliche Funktion der Wellenlänge.

Die Kontinuität ist hier stets im spektralen Sinne zu nehmen, und fordert aufser dem mathematischen Begriffe auch noch die Abwesenheit von auffallenden Intensitätsmaxima oder Minima. Umgekehrt folgt aber auch aus der erwähnten Beobachtungsthatsache die Kontinuität der objektiven Spektra fester Körper. Denn wäre dieses Spektrum nicht kontinuierlich, so könnte das entsprechende subjektive Spektrum dann und nur dann kontinuierlich erscheinen, wenn sich die Maxima und Minima der Empfindlichkeitsfunktion der Wellenlänge und Intensität nach mit den Minimis und Maximis des objektiven Spektrums deckten. Ein solcher Zusammenhang für alle festen Körper beliebigen Zustandes mit der Empfindlichkeit eines einzigen Reagens annehmen zu wollen, wäre aber widersinnig; daher mufs das objektive Spektrum fester Körper ein kontinuierliches sein.

Da die Intensität eines Strahles mechanisch erklärt war, so wollen wir dieses Element stets nach absolutem Mafse genommen denken. Und zwar wählen wir als Einheiten: das Millimeter, das Milligramm und die mittlere Zeitsekunde. Einheit der Intensität ist die lebendige Kraft eines homogenen, in der Wellenlänge 0·001 Tausendstel Millimeter ausgedehnten Strahlenkomplexes vom Querschnitte 1 Quadratmillimeter, welche in Arbeit verwandelt in einer mittleren Zeitsekunde ein Milligramm auf ein Millimeter Höhe hebt. Wir werden später sehen, dafs sich die Intensität in dieser Weise in der That bestimmen läfst. Die subjektive Intensität kann natürlich nur durch die Stärke der hervorgebrachten Empfindung oder Einwirkung gemessen werden. Ein durch Beobachtungen bestimmbarer Reduktionsfaktor wird die gemessene Intensität auf die objektive zurückführen. Man hat daher den Satz:

Der reziproke Wert der Empfindlichkeit eines Reagens ist das subjektive Äquivalent der objektiven Intensität.

Dieses Äquivalent ist nach dem früheren ebenfalls eine kontinuierliche Funktion der Wellenlänge.

Im folgenden wird bei Besprechung der experimentellen Ergebnisse der Spektralanalyse stets das subjektive Spektrum zu verstehen sein. Bei der Behandlung theoretischer Aufgaben werden wir jedoch immer auf das objektive Spektrum Bezug nehmen.

Die Ausdehnung des Spektrums nach Wellenlängen, soweit wir es heute kennen, war gegeben; es ist nun von Interesse zu sehen, innerhalb welcher Grenzen der Temperatur ein der Beobachtung zugängliches Spektrum zu Stande kommt.

Diese Frage beantwortet fur das Emissionsspektrum Drapers[1] im Jahre 1847 entdeckte Gesetz

Alle Korper beginnen bei derselben Temperatur Strahlen derselben Wellenlange zu emittieren Die Strahlenemission beginnt fur das tiefste Rot bei etwa 798° der absoluten Skale, unabhangig von der Natur der Korper, bei 1443° treten bereits ultraviolette Strahlen auf Daraus folgt, dafs Korper, welche ein sichtbares Spektrum liefern sollen mindestens auf 798° erwarmt sein mussen, es ware denn, dafs sie durch Fluoreszenz oder elektrische Einwirkung schon bei einer viel tieferen Temperatur leuchtend wurden Da es dem amerikanischen Gelehrten Langley gelungen ist, selbst Wellenlangen des strahlenden Eises nachzuweisen, so ist die Temperaturgrenze, innerhalb welcher wir Spektra beobachten konnen, sehr weit gesteckt Denkt man aber an die ungeheure Temperatur der Sonne, und die Bedeutung des spater zu besprechenden Kirchhoffschen Gesetzes, so konnen wir diese Grenze nach oben und unten beliebig weit ausdehnen

2 Herstellung des strahlenden Zustandes

Um die Spektra nach Willkur beobachten zu konnen, mussen wir im Stande sein, so auf die Korpermolekeln einzuwirken, dafs sie Strahlen der gewunschten Beschaffenheit emittieren Wir erreichen dies auf zweierlei Art durch Temperaturerhohung des Korpers, und durch die Einwirkung einer anderen Strahlung auf den Korper

Im ersteren Falle bringen wir den Korper mit einer Warmequelle von bekannter Temperatur in Beruhrung, oder setzen ihn elektrischen Einwirkungen aus Im zweiten Falle beobachten wir die bekannte Strahlung eines fremden Korpers, die den zu untersuchenden ganz, oder wenigstens teilweise durchdrungen hat

Die allgemein benutzten Warmequellen sind, nach ihren absoluten Temperaturen geordnet, die folgenden

Alkoholflamme mit weniger als 2270°, die nichtleuchtende Flamme des Bunsenbrenners mit 2570°, Hydrogenflamme mit weniger, Knallgasflamme mit mehr als 3270° elektrisches Kohlenlicht mit 4300°—5300°

Wunschte man Flammen, deren Temperatur zwischen denen der angegebenen liegen, so kann man verschiedene Stoffe nicht nur in atmospharischer Luft verbrennen, sondern auch in anderen Gasen, so z B Chlorgas in Wasserstoff, Schwefelwasserstoff in atmospharischer Luft

Die Elektrizitat lassen wir ebenfalls auf zwei verschiedene Weisen auf die Korper einwirken Entweder benutzen wir sie als Leiter, wo sie dann durch ihren Widerstand betrachtlich erwarmt werden, oder wir beobachten den Funken, der zwischen den aus dem gewunschten Korper gebildeten Polen, oder in dem zu untersuchenden Gase uberspringt Beidemal werden Partikelchen gluhend — im ersteren Falle bei hoherer, im letzteren bei tieferer Temperatur

---

[1] Phil Mag 30 p 345 1847 vergl hiermit H F Weber Wied Ann 32 p 256 1887

Ganz besonderes Interesse bietet der Fall, wo ein Gas als Leiter benützt wird. Wiedemann und Hasselberg beobachteten hierbei die aufserordentlich tiefen Temperaturen unter 370° der absoluten Skale, bei der also nach dem Draperschen Gesetze ein eigentliches Glühen noch nicht eintreten kann. Wir können daher zur Erklärung dieser Erscheinung nur annehmen, dafs der Äther, der ebenso ein Träger elektrischer Wirkung zu sein scheint, wie er es für die Lichtstrahlung in der That ist, direkt auf die Atome einwirkt, ohne die Molekeln bemerkenswert zu beeinflussen. Es entsteht daher gewissermafsen ein mechanisches Glühen ohne Temperaturerhöhung. Der einzige Beleg aber, der neben dieser Hypothese erbracht werden kann, ist die erfahrungsgemäfse Zersetzung chemischer Verbindungen durch den elektrischen Strom ohne beträchtliche Wärmeentwickelung.

Da der Temperatur des elektrischen Kohlenbogens selbst die schwerflüssigsten Stoffe nicht widerstehen können, so sind wir in der That im Stande, die Körper nicht nur zur Emission eines kontinuierlichen Spektrums zu zwingen, sondern wir können sie sogar in Gase verwandeln, und die so entstehenden diskontinuierlichen Spektra der Untersuchung unterziehen.

Die Einwirkung fremder Strahlung auf einen Körper bekundet sich als die Erscheinung der Fluoreszenz, der Phosphoreszenz, Kalorenszenz und Absorption. Manche Stoffe haben in besonders hervorragendem Mafse die Eigenschaft, die Wellenlängen der auffallenden Strahlung im Falle der Fluoreszenz und Phosphoreszenz zu verlängern, im Falle der Kaloreszenz zu verkürzen. Zwischen Fluoreszenz und Phosphoreszenz besteht dann nur der Unterschied, dafs das Selbstleuchten ebenso lange oder länger andauert, als die Einwirkung der fremden Strahlen. Diese Eigenschaft einiger Körper ist in hohem Grade geeignet, die Grenzen des sichtbaren Spektrums auszudehnen, und so auch Teile des ultravioletten und ultraroten Spektrums der unmittelbaren Sinneswahrnehmung zugänglich zu machen.

3. Absorptionsspektrum.

Fällt irgend ein bekannter Strahlenkomplex, z. B. das kontinuierliche Spektrum eines Körpers, auf einen zweiten Körper von ganz beliebiger Temperatur, so bringen die Bewegungen der kleinsten Teilchen desselben Veränderungen in dem ursprünglichen Strahlenkomplexe hervor, die wir näher untersuchen wollen.

Zunächst ist klar, dafs die auffallende Schwingung im Innern des Körpers Atom- und Molekularbewegungen antreffen wird, deren Impulsperioden mit der Schwingungsdauer des auffallenden Strahles entweder übereinstimmen, oder aber von dieser verschieden sind. Stimmen sie überein, so erhält das Körperteilchen in regelmäfsigen Perioden stets in demselben Punkte seiner Bahn und nach derselben Richtung Bewegungsimpulse vom auffallenden Strahle. Die Bewegung dieses Teilchens wird also auf Kosten der Intensität des auffallenden Strahls vergröfsert, und man sieht auf den ersten Blick, dafs dieser Intensitätsverlust desto bedeutender ausfallen wird, je regelmäfsiger die Periode der Atomimpulse ist.

Ist dagegen Impulsperiode und Schwingungsdauer von einander verschieden, so trifft das Ätherteilchen das Atom erst nach einer Zahl von Perioden, welche durch ein Multiplum der beiden Perioden gegeben ist. Dabei verliert natürlich der auffallende Strahl bedeutend weniger von seiner Intensität.

Wir benutzen nun diese Ergebnisse zur Erklarung der Absorption in Gasen und festen Korpern

Die Atome der Gase vollfuhren, wie wir bereits gesehen haben, freie und sehr regelmafsige Schwingungen, wahrend durch die Molekularbewegung nur ein sehr schwaches kontinuierliches Spektrum entstehen kann In dem kontinuierlichen Spektrum, welches das Gas durchdrungen hat werden also ganz besonders jene Strahlen eine aufserordentlich geringe Intensitat besitzen, deren Wellenlange gleich ist derjenigen, welche die Atome selbst erzeugt hatten Diese schwacheren Strahlen erscheinen also des Kontrastes halber dunkel Je freier die Atome sind, desto kleiner werden die Abweichungen der Wellenlange von einem mittleren Werte derselben, d h desto scharfer begrenzt erscheint die Spektrallinie, — wenn wir unter Linie ganz allgemein eine Schwingung von aufserordentlich geringer Wellenlangenausdehnung verstehen

In den festen Korpern besitzen die Atome ziemlich unfreie Schwingungen, die sich in einer weiten Grenze um den Mittelwert der Wellenlange gruppieren In dem durchgehenden Spektrum werden also nicht blofs einzelne Strahlen, sondern ganze Strahlenkomplexe geschwacht, die der Wellenlange nach desto weniger scharf begrenzt sind, je unfreier die Atome sich bewegen Aber auch das kontinuierliche Spektrum wird im Ganzen geschwacht denn zu der Bewegung einer jeden Molekel gesellt sich ein Strahl des auffallenden Komplexes, der qualitativ dieselben Bewegungselemente besitzt Nur wird die Einwirkung des Strahles auf die Molekel nicht lange andauern konnen, denn wegen der Unfreiheit der Molekeln der festen Korper konnen diese dieselben Bewegungselemente nur unendlich kurze Zeit hindurch ungeandert beibehalten

Ahnliches gilt auch von den Flussigkeiten

Wir haben daher den ganz allgemein geltenden Satz

Ein jeder Korper schwacht in dem ihn durchdringenden kontinuierlichen Spektrum alle Strahlen jener Wellenlangen, die er bei demselben Zustande selbst zu emittieren im Stande ist

An der Hand der Erfahrung ergiebt sich daraus ein Satz von hochster Wichtigkeit wir finden namlich, dafs die Wellenlangen der Strahlen eines und desselben Stoffes dieselben sind ob sie nun durch Emission oder Absorption wahrgenommen werden Da nun die Temperaturgrenzen der beiden Arten von Spektra beliebig weit auseinandergezogen werden konnen, so gilt der Satz

Die Wellenlange der Schwingung ist von der Temperatur unabhangig

Durch die Einfuhrung der Absorption haben wir nun ein Mittel gefunden, das Spektrum bei jeder beliebigen Temperatur wenigstens qualitativ untersuchen zu konnen wir brauchen nur noch zu erforschen, wie weit dieser Satz auch von der Intensitat der Strahlen gultig ist Das Resultat ergiebt sich leicht aus dem Prinzipe der Erhaltung der lebendigen Kraft wendet man dasselbe auf die Intensitat an, so mufs fur jede Wellenlange gelten Die Summe der Intensitaten des auffallenden Strahls und des Strahls welchen der absorbierende Strahl bei derselben Temperatur selbst emittiert, ist gleich der Intensitat des durch den Korper hindurch gegangenen Strahls, mehr der im Korper absorbierten Intensitat des auffallenden Strahls Diese absorbierte Intensitat ist naturlich — wie wir schon fruher sahen — in Molekularbewegung, also in Warme ubergegangen Da eine solche Gesetzmafsigkeit, wie betont, fur alle Wellenlangen gelten mufs, so kann stets die Intensitat des von dem Korper selbst emittierten Strahls bestimmt werden, wenn wir die Intensitat des auffallenden und des durchgegangenen

Strahls derselben Wellenlänge kennen, und die durch die Absorption des ersteren hervorgebrachte Wärmezunahme messen könnten. Statt des in Wärme übergegangenen Intensitätsanteils können wir aber unmittelbar die ihm proportionale Absorptionsfähigkeit des Körpers einführen; kennen wir diese als Funktion der Wellenlänge, so ist auch aus dem Absorptionsspektrum das Emissionsspektrum für die betreffende Temperatur ableitbar, und wir können somit den Satz aussprechen:

Das Emissionsspektrum eines beliebigen Stoffes ist bei jeder beliebigen Temperatur darstellbar.

Spektra der in diesem Abschnitt besprochenen Form werden Absorptionsspektra oder Umkehrspektra genannt, da die entsprechenden Stellen des Absorptions- und Emissionsspektrums einander entgegengesetzt hell und dunkel erscheinen. Die Absorption des kontinuierlichen Spektrums, welche natürlich wie dieses eine kontinuierliche Funktion der Wellenlänge ist, heifst allgemeine Absorption. Die Absorption des diskontinuierlichen Spektrums heifst elektive oder auswählende Absorption.

Das früher aufgeschriebene Gesetz über den Zusammenhang von Emission und Absorption wurde zuerst von Kirchhoff auf Grund strenger mathematischer Deduktion in der Form ausgesprochen:

Das Verhältnis zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen einer und derselben Strahlengattung ist für alle Körper bei derselben Temperatur dasselbe.

Damit war der theoretische Grund zur Spektralanalyse gelegt. Wie aber grofse Wahrheiten meist im Laufe der Zeit heranreifen, so war es auch mit dem besprochenen Gesetze.

Schon Euler hatte in seiner „Theoria lucis et caloris“ das Prinzip ausgesprochen, dafs ein jeder Körper Licht von solcher Wellenlänge absorbiere, in welcher seine kleinsten Teilchen selbst oscillieren. Foucault gelang es bereits, die Umkehrung des Natriumspektrums zu beobachten, und Ångström stellte schon im Jahre 1853 den Satz auf, dafs die Lichtstrahlen, welche ein Körper absorbiert, genau dieselben seien, welche er im glühenden Zustande selbst auszusenden vermag. Freilich hatte Ångström unterlassen hinzuzufügen, dafs die Temperatur in beiden Fällen dieselbe sein müsse.

Absichtlich angestellte Umkehrungsversuche rühren auch von Stokes her, und besonders von Balfour Stewart, dessen daraus gezogene Resultate sehr nahe mit Kirchhoffs Folgerungen übereinstimmen.

Wir müssen schliefslich noch der Fraunhoferschen Beobachtung gedenken, nach welcher die Natriumlinie ganz genau mit der dunklen Linie D des Sonnenspektrums koinzidiert, sowie der Vorlesungen W. Thomsons an der Glasgow university 1852—53 gehalten, welche bereits alle Folgerungen besprechen, welche die Umkehrung des Natriumspektrums nach sich zieht.

Nachdem im Jahre 1860 Kirchhoff seine Untersuchungen über das Verhältnis von Emission und Absorption veröffentlichte, waren es besonders Wüllner und Zöllner, welche die weitgehendsten Folgerungen daraus schlossen. Die Versuche über den Einflufs von Druck und Temperatur bestätigten immer mehr das aufgestellte Gesetz und insbesondere die schönen Erfahrungen Franklands und Lockyers auch die Folgerungen Zöllners über die Reduzierbarkeit der Spektra.

4 Folgerungen aus dem Kirchhoffschen Gesetze

Um das fur gleiche Wellenlangen und gleiche Temperaturen konstante Verhaltnis der Emission und Absorption naher zu bestimmen, nehmen wir an es gabe Korper welche selbst in den dunnsten Schichten alles auf sie auffallende Licht absorbieren Da der Absorptionskoeffizient das Verhaltnis des absorbierten Lichtes zur auffallenden Lichtmenge ist, so ist fur solche Korper, die wir absolut schwarze Korper nennen derselbe der Einheit gleich Man sieht daher dafs das obige Verhaltnis gerade die Emission des absolut schwarzen Korpers darstellt, welche eine Funktion der Wellenlange und der Temperatur allein ist

Die Form dieser Funktion ist bislang noch unbekannt man kann aber aus den Erfahrungen uber die Spektra dunkler Korper einige allgemeine Eigenschaften derselben ableiten Durch ahnliche Schlusse, wie wir sie schon gezogen, folgt

Die Funktion, welche die Emission eines absolut schwarzen Korpers darstellt kurz auch *e*-Funktion oder Kirchhoffsche Funktion genannt, ist eine kontinuierliche Funktion der Wellenlange und der Temperatur Bei konstanter Temperatur kann sie keine auffallende Maxima oder Minima fur veranderliche Werte der Wellenlange annehmen, und fur konstante Wellenlange konnen solche spektrale Diskontinuitaten auch für wechselnde Temperatur nicht vorkommen

Bei gegebener Temperatur nimmt die Funktion fur wachsende Wellenlangen zu bei fester Wellenlange wachst sie mit wachsender Temperatur

Fur kleine Werte der Temperatur und gegebene Wellenlange ist die Funktion nahezu Null, je kleiner die Wellenlange, desto hoher mufs die Temperatur sein damit die Funktion eben verschwinde Da nun das Absorptionsvermogen bei keinem einzigen Korper gleich Null sein kann so mufs das Emissionsvermogen für eine bestimmte Wellenlange bei tiefer Temperatur Null werden Sobald aber fur diese Wellenlange bei wachsender Temperatur die Kirchhoffsche Funktion einen endlichen Wert annimmt ist auch bereits das Emissionsvermogen fur diese Wellenlange von Null verschieden Das heifst

Alle Korper fangen bei derselben Temperatur an, Strahlen einer gegebenen Wellenlange auszusenden

Je kleiner die Wellenlange, fur welche die Emission beginnt, desto hoher mufs die Temperatur sein Der Kirchhoffsche Satz, dehnt also das Drapersche Gesetz welches ursprunglich nur fur feste Korper experimentell bewiesen war, auch auf flussige und gasformige Karper aus, und erteilt ihm den Wert eines theoretisch bewiesenen Gesetzes

Da das Absorptionsvermogen stets ein echter Bruch ist, so folgt auch, dafs das Spektrum des absolut schwarzen Korpers in allen seinen Teilen unter allen denkbaren Spektra derselben Temperatur das intensivste ist, und umgekehrt sind in einem Teile derselben Wellenlange die Spektra eines absolut schwarzen und irgend eines andern Korpers gleich so besitzt der letztere Korper die hohere, und zwar die um so hohere Temperatur, je kleiner sein Absorptionsvermogen ist

Die Kirchhoffsche Funktion wurde im spektralen Sinne fur kontinuierlich befunden Da nun die Emission mancher Korper eine diskontinuierliche ist, so folgt, dafs das Absorptionsvermogen als Funktion der Wellenlange genau dieselben Diskon-

tinuitäten besitzen müsse. Wenn also ein Körper eine gewisse Strahlengattung besonders reichlich emittiert, so wird er dieselbe Strahlengattung auch sehr energisch absorbieren können. Daraus schlofs Kirchhoff auf die Möglichkeit der Umkehrung der Spektra, die wir schon zu besprechen Gelegenheit hatten.

Das Verhältnis von Emission und Absorption ist vom Drucke unabhängig; nicht so aber die einzelnen Funktionen. Für das Absorptionsvermögen können wir die Form der Druckfunktion leicht aufstellen, da bei gleichbleibender Temperatur die in die Gesichtslinie fallende Anzahl der absorbierenden Körperteilchen dem Drucke proportional ist. Nennt man das Komplement des Absorptionsvermögens zur Einheit, also die von der Einheit der auffallenden Lichtmenge nach der Absorption übrigbleibende Lichtmenge den Durchlässigkeits- oder Transmissionskoeffizienten, so findet man, wie wir später sehen werden:

Der Logarithmus des Transmissionsvermögens ist dem Drucke proportional.

Je gröfser also der Druck oder die Dichtigkeit des Körpers, desto mehr nähert sich das Absorptionsvermögen der Einheit, also das Emissionsvermögen dem des absolut schwarzen Körpers. Daher erklärt sich das kontinuierliche Spektrum der Körper überhaupt, die Intensitätszunahme der Spektrallinien der Gase, und wenigstens aus subjektiven Kontrastgründen auch die Erbreiterung derselben bei zunehmendem Drucke.

5. Spezielle Arten des Absorptionsspektrums.

In besonders energischem Mafse sahen wir Absorption auftreten, wenn die auf den Körper fallende Strahlung mit dessen eigenen bei der betreffenden Temperatur möglichen Wellen gleiche Periode besafs. Es war aber zugleich betont, dafs Absorption auch noch dann stattfinden müsse, wenn Multipla der Perioden sich begegnen, und der gegebenen Erklärung nach ist es leicht einzusehen, dafs die so stattfindende Absorption desto stärker sein müsse, je einfacher das Periodenverhältnis ausdrückbar ist. Infolge dieser Absorption, die man im Gegensatze zu der direkten der gleichen Wellenlängen die indirekte nennen könnte, entstehen im Innern des Körpers neue Schwingungen, deren Wellenlängen sich in einem eng mit dem Verhältnisse der Perioden verknüpften Gesetze ausdrücken lassen. Diese neuen Strahlen treten aus dem Körper heraus, und werden, falls sie zwischen die jetzt zugänglichen Grenzen des Spektrums fallen, als Phosphoreszenz- oder Fluoreszenzstrahlung wahrnehmbar, je nachdem ihre Dauer die der fremden Strahleneinwirkung übertrifft, oder aber derselben gleichkommt.

Aus dieser Erklärung folgt nun, dafs nur ein vom Körper absorbierter Strahl diese Erscheinungen hervorzurufen im Stande ist, nicht aber, dafs jeder absorbierte Strahl sie auch wirklich erzeugt. Denn es gehört hierzu eine solche Molekularstruktur des absorbierenden Körpers, die indirekte Absorption ermöglicht. Beide Folgerungen bestätigen die Erfahrungen besonders Stokes' und Becquerels. Bezüglich der zweiten mufs aber bemerkt werden, dafs die indirekte Absorption, die gewifs in irgend einem Mafse, eine allgemeine Eigenschaft der Materie ist, nicht immer durch Fluoreszenz wird nachweisbar sein, da die Bedingungen der Wahrnehmbarkeit nicht eingehalten werden können. Und in der That weisen die von Becquerel angestellten Versuche darauf hin, dafs die Phosphoreszenz eine viel allgemeinere Eigenschaft der Materie ist, als man allgemein anzunehmen geneigt wäre.

Was nun die Intensitat dieses Fluoreszenzlichtes anbelangt so ist dasselbe jedenfalls durch die eigene Wellenlange und die des auffallenden kontinuierlichen Strahlenkomplexes ausdruckbar Es kann also im allgemeinen nicht dieselbe Funktion der Wellenlange sein durch welche ein kontinuierliches Spektrum fester gluhender Korper ausdruckbar ist Daraus folgt, dafs wir es hier ebenfalls mit einem subjektiven, komplizierten Spektrum zu thun haben, welches auf das wahre, auffallende Spektrum erst dann reduziert werden kann, wenn sowohl die Wellenlange des auffallenden als des ausgestrahlten Lichtes bekannt ist

Im Grunde genommen haben wir es also mit Erscheinungen der Summations- und Differenzschwingungen zu thun, da nun den letzteren unter sonst gleichen Umstanden die grofsere Wellenlange entspricht, so konnen wir folgende Satze aufstellen

Im allgemeinen erzeugen Strahlen kleiner Wellenlangen durch Differenz-, Strahlen grofser Wellenlangen durch Summationsschwingungen Phosphoreszenzlicht innerhalb der Grenzen des sichtbaren Spektrums

Die letztere Erscheinung nennt man Kaloreszenz Beide zusammen sind in hohem Grade geeignet, die Grenzen des sichtbaren Spektrum beiderseits zu erweitern, und besonders gilt dies von den Absorptionsspektra, wo es zumeist auf die genaue Bestimmung der Wellenlange des absorbierten Strahles ankommt Es ist namlich klar, dafs die dunklen Linien eines Umkehrungsspektrums auch in der erregten Strahlung dunkel erscheinen mussen, wahrend helle Linien nicht unbedingt sichtbar zu sein brauchen

In besonders hohem Mafse sind fluoreszierend Uranglas, kaloreszierend Chlorophyll, Naphtalinrot, wahrend einige Substanzen, z B Chamaeleinrot, beide Eigenschaften innerhalb der Grenzen des sichtbaren Spektrums vereinigen

Stokes, der die Fluoreszenzerscheinungen zuerst eingehend untersuchte, kam zu dem experimentellen Ergebnisse dafs die Fluoreszenz, durch kurzwellige Strahlen erregt, diese stets in lange Wellen verwandelt Wenn nun auch dieser Satz dem Vorigen nach Berichtigung bedarf kann er doch, zumal in Fallen der Anwendung, als meist zutreffend betrachtet werden

6 Einflufs von Temperatur und Druck

Schon die ersten Entdecker der Spektralanalyse wiesen darauf hin, dafs Druck- und Temperaturanderungen die Wellenlangen der Strahlen zwar nicht, desto energischer aber die Intensitat und Breite der Linien verandern so dafs durch das Auftreten und Verschwinden von Linien oft das Spektrum ein anderes geworden zu sein scheint Untersuchen wir nun diese Veranderungen etwas eingehender, indem wir zunachst die Annahme machen wollen, dafs die Zustandsanderung des Gases — denn wir reden jetzt von diskontinuierlichen Spektra — von keinem wesentlichen Einflusse auf seine Molekularstruktur ist

Zunahme der Temperatur ist identisch mit Zunahme der lebendigen Kraft der Bewegung kleinster Korperteilchen Es wird also die Intensitat der Linien zunehmen, die Zahl derselben, da infolge vergrofserter Helligkeit vorher nicht wahrnehmbare Schwingungen nun intensiver auftreten, wachsen, und die Begrenzung des Spektrums in der Richtung der abnehmenden Wellenlangen ausgedehnt werden Die Breite der

Linie dagegen wird auch bei wachsender Temperatur wesentlich unverändert bleiben müssen. Denn sie verdankt ihre Entstehung dem Umstande, daſs die Schwingungen nicht mathematisch genau einem Werte entsprechen, sondern als Mittelzustand benachbarter Bewegungen aufgefaſst werden muſs. Wird also die Atomverkettung in der Molekel bei wachsender Temperatur loser, so nimmt die Breite der Linie sogar ab.

Von dem Drucke können wir Ähnliches aussagen. Wie schon die Berücksichtigung dieses Elementes bei dem Kirchhoffschen Gesetze zeigte, nimmt mit wachsendem Drucke die Intensität zu, da der Druck als Exponent des Transmissionsvermögens auftritt. Aus der Zunahme der Intensität schlieſsen wir auf gröſsere Zahl der Linien und gröſsere Ausdehnung des Spektrums. Was die Breite der Linien betrifft, so ist leicht einzusehen, daſs diese vergröſsert werden muſs. Denn die durch Druck enger zusammengedrängten Molekeln bedingen geringere Freiheit der schwingenden Atome, mithin weitere Grenzen der sonst einfachen Schwingung. Gerade diese Erscheinung bietet viel des Interessanten, da sie enge mit dem kontinuierlichen Spektrum der Gase zusammenhängt. Erreicht nämlich der Druck eine gewisse, nur von der Natur des betreffenden Gases abhängige Gröſse, so ist der Unterschied der Emission des Gases von der des absolut schwarzen Körpers beliebig klein, das Spektrum ist kontinuierlich. Diese Folgerung aus dem Kirchhoffschen Gesetze bestätigt die Erfahrung vollkommen. Wüllner[1] untersuchte in dieser Richtung Hydrogen und Oxygen, und es mögen die auf das erstere Element Bezug habenden Beobachtungen kurz angeführt werden.

Das sichtbare Spektrum des Hydrogen besteht bei geringem Drucke — etwa 20 mm Quecksilberhöhe — aus drei schmalen Linien, die nach wachsenden Wellenlängen geordnet die Bezeichnung H_γ, H_β und H_α führen. Erhöht man den Druck auf etwa 45 mm, so erscheint H_γ ziemlich stark, H_β weniger auffallend erbreitert, während H_α noch ganz unverändert ist. Bei 450 mm Druck verwandeln sich H_β und H_γ in kontiniuierliche Bänder und auch H_α erscheint als sehr breite verwaschene Bande, bis bei 560 mm Druck das Spektrum vollkommen kontinuierlich geworden ist.

Ähnliche Beobachtungen auch an anderen Stoffen angestellt, lehren, daſs die Erbreiterung der Linien zumeist bei den Kurzwelligen anfangend gegen die langen Wellen fortschreitet. Nicht alle Linien erbreitern sich aber symmetrisch nach beiden Seiten; herrscht dieser Fall vor, so erfolgt die stärkere Erbreiterung in der Richtung der gröſseren Wellenlängen. Der Grund dieser einseitigen Erbreiterung ist jedenfalls darin zu suchen, daſs an der betreffenden Stelle des Spektrums das Absorptionsvermögen des Stoffes zu beiden Seiten der Linie ein etwas verschiedenes ist.

Umgekehrt folgt aus dem früheren, daſs Verminderung des Druckes und der Temperatur die Zahl der Spektrallinien reduziert, und es unterliegt keinem Zweifel, daſs man auf diese Weise fortschreitend das Spektrum eines jeden Stoffes wird im allgemeinen auf eine einzige Linie herabdrücken können, deren Wellenlänge nur von der Natur dieses Stoffes abhängt. Auch diese Folgerung bestätigen Franklands und Lockyers Untersuchungen, die das Spektrum des Hydrogen und Nitrogen in Form einer einzigen Linie darstellten.

Die Erscheinungen, die wir hier zeitlich nacheinander durch Veränderung des Zustandes herstellen, lassen sich auch räumlich nebeneinander wahrnehmbar machen.

---

[1] Pogg. Ann. 137. p. 337. 1869.

wie dies zuerst Lockyer that. Denken wir uns den Stoff, dessen Spektrum untersucht werden soll, mit einer derart beschaffenen Wärmequelle in Berührung, daſs jedem Punkte des Volumens eine ganz bestimmte Temperatur und Dichtigkeit (Druck) entspricht, und die Beobachtungsmethode ebenfalls so gewählt, daſs ein jeder Punkt des Spektrums nur aus Strahlen zusammengesetzt ist, welche einer ganz bestimmten Temperatur und bestimmten Drucke angehören. Wir erreichen dieses z. B. durch Anwendung von elektrischem Bogenlicht und Projektionsapparaten.

Linien, welche nur bei hoher Temperatur und groſser Dichtigkeit auftreten, werden einen geringen Teil der Breite des Spektrums einnehmen, während alle jene Linien, welche schon bei tiefer Temperatur und geringem Drucke zum Vorschein kommen, sich durch die ganze Breite des Spektrums hindurchziehen. Es folgt daraus, daſs die Linien verschiedene Länge zu haben scheinen, und jene letzte Linie, auf welche sich endlich das ganze Spektrum reduzieren läſst, wird die längste sein. Wir sehen zugleich, daſs die Länge der Linie ein Maſs abgiebt für den Grad ihrer Charakteristik des betreffenden Stoffes, und wir können folgern, daſs in Mischungen mehrerer Stoffe zumeist nur deren lange Linien vorhanden sein werden.

An einem Übel leiden aber alle die erwähnten Versuche: wir sind nicht im Stande, den Einfluſs der Temperatur und des Druckes allein rein darzustellen, da zumeist die Erhöhung der einen auch die Vergröſserung des andern nach sich zieht, und dies gilt in besonders hohem Maſse gerade von den gebräuchlichsten Untersuchungsmethoden, dem elektrischen Funken, Bogenlichte und den Geiſslerschen Röhren.

Wir lassen nun die Voraussetzung konstanter Atomverkettung bei wechselnder Temperatur fallen, lassen teilweise Dissociation oder allotrope Modifikation der Molekel vor sich gehen. Unterhalb dieser Temperatur, bei welcher die besprochenen Veränderungen vor sich gehen, fallen die Spektra unter die schon bezeichneten Gesichtspunkte, von da ab jedoch unterliegen sie Veränderungen, wie das auch die Erfahrung bestärkt. Wir können also behaupten, eine jede chemische Verbindung besitze ihr eigenes Spektrum, welches jedoch erst dann wird wahrnehmbar sein, wenn die zur Herstellung desselben nötige Temperatur kleiner ist als die Temperatur des Dissoziationsprozesses. Aus dem Bau der Molekel muſs schon folgen, daſs dieses Spektrum im allgemeinen komplizierter sein muſs, als das Spektrum der einfachen Körper. Und ebenso können wir behaupten, daſs alle einfachen Stoffe, welche allotrope Modifikationen zulassen, mehrfache Spektra besitzen müssen. Diese mehrfachen Spektra sind in der That schon beobachtet worden. So soll z. B. Hydrogen bei Zunahme des Drucks und der Temperatur nacheinander folgende Spektra zeigen: Ein Sechslinienspektrum, vorübergehendes Bandenspektrum, ein Dreilinienspektrum, ausgebildetes Bandenspektrum, rein kontinuierliches Spektrum. Manche laugnen die Möglichkeit mehrfacher Spektra, manche sprechen zu deren Gunsten. Schwierigkeiten bereiten sie jedenfalls nur dann, wenn man sie ohne zugleich erfolgende allotrope Modifikation der Molekel aus dem Kirchhoffschen Gesetze abzuleiten suchte. Sobald aber diese Veränderung der Molekularstruktur zugelassen wird, ist damit implicite auch schon die Veränderung des Absorptionsvermögens, mithin auch des emittierten Spektrums gegeben.

Zur Beobachtung dieser Dissoziationserscheinungen ist gerade die Lockyersche Methode der langen und kurzen Linien besonders geeignet. Denn selbst unter der Dissociationstemperatur einer Verbindung werden schon einzelne Molekeln zerfallen, und ein von dem Spektrum der Verbindung verschiedenes Spektrum zeigen. Und zwar

werden, wie wir dies früher gesehen haben, die längsten Linien der Bestandteile als kurze Linien in dem Spektrum der Verbindung auftreten müssen. Die Entwickelung dieser kurzen Linien, die bei fortschreitendem Zerfall der Molekeln, nach und nach zu langen werden müssen, hält nun Schritt mit der Dissoziation und giebt ein Mafs derselben ab.

Umgekehrt finden sich aber auch in den Spektra der von uns als Elemente bekannten Stoffe analoge Erscheinungen, welche rückwärts auf eine Dissoziierbarkeit der einfachsten Stoffe hinweisen. Wir werden mathematische Belege für diese Ansicht erst später erbringen können, wollen aber doch hier schon erwähnen, dafs die moderne Chemie diesem Gedanken — wenigstens in vielen Fällen — nicht abhold ist.

7. Qualitative und quantitative Spektralanalyse.

Die wunderbare Empfindlichkeit der spektralanalytischen Beobachtung mufste schon frühe den Wunsch haben reifen lassen, die Resultate dieses neuen Wissenszweiges für analytische Zwecke verwertbar machen zu können. Je nachdem aber eine qualitative oder quantitative Analyse gefordert wurde, fielen die Bestrebungen sehr verschieden aus. Durch Kirchhoff und Bunsen war bereits festgestellt, dafs einem jedem Elemente bei beliebiger Temperatur ein eigenes, leicht erkennbares Spektrum entspreche, und dafs dieses Spektrum um so einfacher sich gestalte, je niedriger die Temperatur sei. Diesen aus dem Vorigen sich von selbst ergebenden Satz drückt Bunsen mit den Worten aus: Die Stoffe, deren Spektra sich schon in der Temperatur der Flamme entwickeln, werden am besten in dieser und nicht im elektrischen Funken beobachtet. Die Möglichkeit einer qualitativen Analyse war somit gegeben, und da es sich nur um die Wellenlänge der auftretenden Strahlung handelte, war es gleichgiltig, ob ein Emissionsspektrum oder ein Absorptionsspektrum angewendet wurde. Es war also auch die Temperaturgrenze, innerhalb welcher eine solche Analyse bewerkstelligt werden konnte, eine durchaus nicht beschränkte, und die Folgen dieses Umstandes sind gewifs die rasche Anwendung und Verbreitung der Spektroskopie in Astronomie und Technik.

Die späteren Studien Lockyers haben allerdings nachgewiesen, dafs der anfangs vermutete Satz: Kein Strahl einer gegebenen Wellenlänge könne mehreren Stoffen gemeinsam sein, Berichtigung bedürfe; doch ist auch die Berichtigung von keinem Einflusse auf die qualitative Analyse geworden, welche noch in eben der Form besteht und bestehen wird, in welche sie Kirchhoff und Bunsen geleitet.

Die Versuche einer qualitativen Analyse fielen weniger günstig aus; gewifs ist leicht einzusehen, dafs die Intensität einer Strahlung aufser von der Temperatur auch von der Menge des glühenden Stoffes abhängt, wie wir dies ja auch bei dem Kirchhoffschen Gesetze in der Berücksichtigung des Druckes betonten. Doch wird man andrerseits auch nicht vergessen, dafs ein wenig flüchtiger Stoff in einem gegebenen Momente nicht jene Intensität seiner Strahlung wird entwickeln können, wie ein leichtflüchtiger, und das Emissionsspektrum müfste daher notwendig als ein Zeitintegral aufgefafst werden, dessen Parameter die Flüchtigkeit des zu untersuchenden Stoffes ist. Weiter wäre es aber bei der bisherigen Unkenntnis der Emissionsfunktion unmöglich geworden, Einflüsse und Veränderungen der Temperatur in Rechnung zu ziehen. Einem grofsen Nachteile der geplanten Methode könnte man noch entgehen, wenn man nicht

die Menge des Stoffes überhaupt suchte, sondern nur die Mengen der gleichzeitig glühend gemachten Bestandteile.

Während es also auf diesem Gebiete über Versuche hinaus nicht gedieh, schlugen Andere, Vierordt an der Spitze, einen anderen Weg ein, die Methode der Absorption. Hier hatte man die Erhaltung der Temperatur in der Hand, und man konnte hauptsächlich auf einem expliziten Gesetze bauen. Wir stellten vorgreifend schon früher den Satz auf: Der Logarithmus des Transmissionskoeffizienten ist dem Drucke proportional. Statt Druck können wir aber Menge des Stoffes sagen, denn der Druck spielt hier nur dann und insofern eine Rolle, als er mehr absorbierende Körperteilchen in die Gesichtslinie bringt. Bei konstanter Dichtigkeit erreichen wir aber dasselbe durch Vergrößerung der durchstrahlten Schichte, Vermehrung der Menge. Bestimmungen der Absorptions- oder Transmissionskoeffizienten haben aber im allgemeinen keine besonderen Schwierigkeiten. In diesem Sinne kann also von einer quantitativen Analyse in der That gesprochen werden, und ihr einziger Nachteil ist nur der, daſs Intensitätsbestimmungen — denn auch die Bestimmung der Absorption muſs hier auf reduziert werden — sehr an Zuverlässigkeit leiden. Nicht prinzipielle, die Methode selbst betreffende Einwürfe sind, daſs Unkenntnis der Absorptionsfunktion in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur auch hier weitere Reduktionen der Messungen unmöglich macht.

Es war daher ein entscheidender Schritt nach vorwärts, als Lockyer auf Grund seiner Methode der langen und kurzen Linien eine überaus umständliche, aber immerhin lebensfähige quantitative Analyse anbahnte. Wie wir schon früher sahen, konnten bei geringen Beimischungen eines fremden Stoffes nur dessen längste Linien als kurze Linien des Gemisches im Spektrum auftreten. Und zwischen der Zahl der auftretenden Linien und der Menge des Stoffes besteht ein inniger Zusammenhang, den Lockyer mit vieler Sorgfalt experimentell in vielen Fällen aufdeckte. Die ganze Analyse war daher auf das Abzählen von Spektrallinien reduziert. Da nun die aufeinanderfolgenden Zahlen eine diskontinuierliche Funktion vorstellen, so konnte natürlich auch die Menge des beigemischten Stoffes nicht genau — wenigstens über einer gewissen Grenze — nicht genau bestimmt werden. Lockyers Beobachtung jedoch, daſs sich mit der Menge zugleich auch die Intensität und Länge der Linie ändere, half über diese Schwierigkeit hinweg, so daſs die gleichzeitige Anwendung von Schätzungen der Länge und Intensität auf einen Genauigkeitsgrad führten, der überhaupt von nahezu der Ordnung ist, wie die Empfindlichkeit der Spektralanalyse selbst.

8. Spektralverwandtschaften.

Unter diesem Namen begreifen wir zwei Erscheinungen, die die Spektralanalytiker häufig und anhaltend beschäftigten, die Analogie der Spektra chemisch und physikalisch verwandter Stoffe, und die Gesetzmäſsigkeit der Wellenlängen der Linien desselben Stoffes.

Nach unseren Anschauungen über das Wesen des Spektrums wird es überhaupt wahrscheinlich, daſs Atome von nahezu gleichen Eigenschaften zu einer Molekel vereint nach analogen Gesetzen schwingen werden. Und in der That fand Lecoq de Boisbaudran, daſs sich die Spektra der Alkalien in vielen Punkten ähneln, so daſs er den Satz aussprechen konnte: Mit zunehmendem Atomgewicht verschiebt sich der Schwer-

punkt des Spektrums in der Richtung der wachsenden Wellenlängen. Gleichsam, als ob die schweren Atome langsamere Schwingungen vollführten. Mit demselben Gegenstande befaſste sich auch Ciamician, der diese analogen Spektra mit dem Namen der homologen belegte; er kommt zu dem Resultate, daſs jene Elemente reicher an langwelligen Strahlen sind, welchen die gröſsere chemische lebendige Kraft entspricht.

Diese Sätze haben jedoch einen zu allgemeinen Charakter, so daſs sie zu unmittelbaren weiteren Schlüssen keinen Anlaſs geben können, und bedenklich bleibt dabei stets, daſs die Herleitung dieser Verwandtschaften zu sehr Sache subjektiver Überzeugung ist. Ähnliche, nur für eine engere Klasse von Stoffen geltende Beziehungen, sogar in Gestalt von Gleichungen vorgelegt, rühren auch von anderen Forschern her. Zumeist liegen ihnen aber Daten zu Grunde, welche nur das eben benutze Instrument charakterisieren, und können somit nicht als Gesetze gelten.

Mehr Erfolg haben die Untersuchungen der Verwandtschaft der Spektrallinien desselben Stoffes aufzuweisen. Schon frühe finden wir die Ansicht durchdringen, daſs die Wellenlängen der auftretenden Strahlen möglicherweise in einfachen harmonischen Verhältnissen stünden, gleichwie die Obertöne einer Saite. Und in der That lassen sich z. B. die drei bekannten Linien des Hydrogens $H\alpha$, $H\beta$ und $H\gamma$ als der 20., 27. und 32. Oberton einer Schwingung betrachten, deren Wellenlänge $\lambda = 0{\cdot}013127$ mm ist. Auch andere Stoffe, z. B. Kadmium, Magnesium usw. fügen sich ähnlichen Regeln. Dabei ist aber zu bedenken, daſs die Ordnungszahlen der einzelnen Linien sehr hoch und nicht kontinuierlich sind, und daſs es unter solchen Umständen stets gelingen wird, beliebige Wellenlängen mit vorgelegter Genauigkeit als Oberschwingungen darzustellen. Nimmt man dagegen noch hinzu, daſs sich viele charakteristische Linien der so aufgestellten Reihe nicht fügen — bei Hydrogen z. B. gilt dies schon von der vierten, ultravioletten Linie $H\delta$ — so muſs man dieser Regel überhaupt die physikalische Berechtigung absprechen.

Wir finden in dieser Richtung auch theoretische Untersuchungen. So berechnet Schuster mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wie viel Linien eines linienreichen Spektrums bei beliebiger Verteilung der Schwingungen harmonischen Verhältnissen genügen würden. Er findet im allgemeinen die Zahl, welche auch die Beobachtung ergiebt, woraus folgt, daſs die Schwingungen der Atome nicht nach Art der gespannten Saiten vor sich gehen, sondern andren, komplizierteren Verhältnissen entsprechen.

Dagegen beruht auf direkten Beobachtungen eine andere, nicht minder interessante Wahrnehmung. Gruppen von Spektrallinien pflegen sich häufig zu wiederholen, so bei Natrium, Magnesium usw., und oft sind sie abwechselnd scharf und unscharf begrenzt. Hier ist die Wahrscheinlichkeit eines Kausalverbandes schon bedeutend groſs, dieser selbst jedoch noch unerschlossen.

Unter allen hierher gehörigen Untersuchungen ist in erster Reihe das Resultat J. Balmers zu nennen, der durch eine äuſserst einfache Formel, deren Variabele ganz einfach die kontinuierlich fortlaufende ganze Zahl ist, die bislang bekannten dreizehn Hydrogenlinien mit einer der genauesten Beobachtung adäquaten Genauigkeit darstellt. Die Form ist rein empirisch gefunden, die Bedeutung der beiden in ihr enthaltenen Konstanten also noch vor der Hand unbekannt. Hagenbach gelang es, dieselbe auch auf die Spektra anderer Elemente auszudehnen.

Wir werden diese Formel später rein theoretisch ableiten, und ihr daher allgemeine Anwendbarkeit zusprechen. Des allgemeinen Interesses halber geben wir

aber schon vorgreifend die Bedeutung derselben an Das Balmersche Gesetz besagt Die Wellenlange eines Stoffes, welche der Ordnungszahl *m* entspricht, ist direkt proportional dem Quadrate dieser Zahl und indirekt proportional dem Unterschiede der Quadrate der Ordnungszahlen dieser und der unendlich langen Wellenlange Der Proportionalitatsfaktor — und das ist das Wichtigste — ist eine fur Gase ganz genau angebbare Funktion der Dissoziationstemperatur zugleich die Grenze gegen welche hin die Linien in der Richtung der abnehmenden Wellenlangen konvergieren Wir sind also aus den genau beobachteten Wellenlangen der Linien verschiedener Stoffe im Stande die Temperatur anzugeben, bei welcher fur die betreffende Substanz Dissoziation eintritt, zugleich aber auch die Grenze auszustecken jenseits derer keine kurzwelligere Linie dieses Stoffes mehr stehen kann

Andrerseits ist es klar, dafs die Formel eben ihrer Allgemeinheit halber auch die Spektralverwandtschaften verschiedener Stoffe ausdruckt Fur Gase speziell konnen wir sagen dafs von reinen Zahlenfaktoren abgesehen, sich die Wellenlangen gleicher Ordnungszahlen verhalten wie umgekehrt die Temperaturen der beginnenden Dissoziation In neuester Zeit fafst Prof A Grunwald die Frage der Linienverwandtschaften von einem verschiedenen Gesichtspunkte auf, indem er die Veranderungen der Wellenlangen untersucht welche eintreten wenn das emittierende Element in andere chemische Zustande ubergeht Wir werden uns spater mit diesem interessanten Gegenstande noch eingehender zu befassen haben

Wir haben fruher erwahnt, dafs Lockyer im Laufe seiner Studien auf Linien gefuhrt wurde, welche mehreren Stoffen zugleich angehoren, und die auf keine Weise eine andere Deutung zulassen Die Balmersche Gleichung giebt uns leicht Aufschlufs daruber, welchen Bedingungen ein Stoff unterliegen mufs, damit er mit einem andern eine, oder mehrere Spektrallinien gemeinschaftlich besitzen konne Wir finden die interessanten Satze

Die Gemeinschaft einer Linie der Spektra mehrerer Stoffe ist an keine Bedingung gebunden, mehrere Linien konnen nur den Spektra jener Stoffe gemeinsam sein welche im Augenblicke der Dissoziation in Bezug auf Intensitatsverteilung ahnliche Spektra besitzen

Lockyer nennt diese Linien basisch, da er von der Voraussetzung der Dissoziierbarkeit der chemischen Elemente ausgehend annimmt, diese gemeinsamen Linien gehorten demselben Urstoffe an Das vorstehende Gesetz widerspricht dieser Anschauung nicht, denn es erfordert die Intensitat oder zum mindesten grofse Ahnlichkeit der Stoffe Dafs aber die basischen Linien schon lange vor Erreichen der Dissoziationstemperatur auftreten, ist keine Widerlegung, da gerade die Dissoziation keine plotzlich eintretende Erscheinung ist derart, dafs selbst der Dissoziationspunkt eine mehr willkurliche als physikalische Definition besitzt Und aufserdem beobachten wir haufig in den Spektra der Verbindungen derselben Stoffe die Linien der gemeinschaftlichen Bestandteile noch bevor der Zerfall der Verbindung eingetreten ware

Endlich erklart die Balmersche Gleichung ungezwungen den allgemein bekannten Umstand, dafs bei allen Stoffen die Haufigkeit der Linien kurzer Wellen mit abnehmender Wellenlange zunimmt Diese Gedrangtheit der Linien wird besonders da auffallend, wo an und fur sich, wie z B beim Eisen ein linienreiches Spektrum vorliegt

9. Allgemeine Spektraleigenschaften.

a) Spektra der Alkalien und alkalischen Erden.

Die Spektra der Alkalien treten schon bei der relativ niederen Temperatur der Bunsenflamme höchst charakteristisch hervor, sind im allgemeinen recht einfach, aus wenigen Linien bestehend, und von gröfster Empfindlichkeit in Bezug auf die Menge des glühenden Stoffes. Die in die Flamme gebrachte Verbindung reduziert sich sofort auf das reine Metall.

Die Reduktion der Verbindung alkalischer Erden ist eine mittelbare; das Dissoziationsprodukt ist nicht das reine Metall selbst, sondern dessen Oxyd. Man sieht daher im Spektrum, welches linienreicher und verwickelter ist, als das der Alkalien, neben den Linien des Metalls auch die der Sauerstoffverbindung. In vielen Fällen ist die Temperatur der Bunsenflamme kaum hinreichend, eine deutliche Spektralreaktion hervorzubringen, deren Empfindlichkeit übrigens der der Alkalien nachsteht.

Bei gesteigerter Temperatur verhalten sich die Spektra der beiden besprochenen Klassen entsprechend den abgeleiteten allgemeinen Gesetzen. Die Linien kürzerer Wellenlängen nehmen, wie dies Lecoq de Boisbaudran bemerkt, an Helligkeit zu, so dafs sie die der längeren Wellen übertreffen. Ebenso nimmt im allgemeinen die Zahl der Linien zu. Da das Spektrum des Elementes aus der Verbindung nicht immer rein heraustritt, so ist es bei systematischen Beobachtungen angezeigt, stets dieselben Verbindungen der betreffenden Elementenklasse zu benutzen; Bunsen schlägt dazu die Chlorverbindungen vor.

b) Spektra der Erden und der Metalle.

Erst die höheren und höchsten uns zugänglichen Temperaturen des elektrischen Funkens sind im Stande, die Verbindungen dieser beiden Klassen von Elementen zu trennen und den metallischen Bestandteil zu verflüchtigen; man benutzt daher zumeist entweder Elektroden, die aus dem zu untersuchenden Stoffe geschnitten sind, oder aber den elektrischen Flammenbogen selbst.

Die Spektra der Erden und besonders der Metalle sind überaus reich an Linien, die im allgemeinen für den betreffenden Stoff vollkommen charakterisierend sind; unter sonst gleichen Umständen mufs daher die Intensität der einzelnen Linie bedeutend geringer werden. Die Darstellung des Spektrums geschieht am leichtesten mit Hilfe der leichtest zerfallenden Verbindung, des Chlorürs.

Einer ganz besonders merkwürdigen Erscheinung mufs hier Erwähnung geschehen, welche eine Ausnahme von dem Kirchhoffschen Gesetze zu bilden scheint, dafs nämlich die schon von Bunsen untersuchte Dydim- und Erbinerde, neben dem kontinuierlichen Spektrum auch einige wenige helle Linien von grofser Intensität geben. Es ist hier anzunehmen, dafs sich Teile der reinen Erde verflüchtigen, und sodann im dampfförmigen Zustande ein diskontinuierliches Spektrum liefern. Wir werden auf diese Eigenschaft fester Körper noch später zurückkommen.

Den Verbindungen kommt natürlich, so lange sie bei der Untersuchungstemperatur noch undissozziert bestehen, ein eigentümliches Spektrum zu, das des verwickelteren Baues der Molekel halber zusammengesetzter erscheint.

c) Spektra der Metalloide

Diese lassen sich zumeist schon bei sehr niedriger Temperatur herstellen, und bleiben im Laufe der Temperaturerhohung keineswegs konstant, da gerade die Metalloide es sind welche besonders haufig und leicht allotrope Modifikationen eingehen Bei den brennbaren Stoffes dieser Klasse genugt zur Herstellung des diskontinuierlichen Spektrums meist die Verbrennung selbst, und zwar entweder allein, oder mit Hydrogen vermischt, bei den nicht brennbaren lafst man elektrische Funken entweder direkt, oder in stark verdunntem Zustande in Geifslerschen Rohren durchschlagen Merkwurdig ist hierbei dafs trotz des oft sehr intensiven und charakteristischen Spektrums die Empfindlichkeit der Reaktion eine nur sehr geringe ist, so dafs in einer Mischung der eine Stoff sich haufig kaum erkennen lafst, wenn auch die Beimischung einen nicht unbedeutenden Bruchteil des Ganzen ausmacht

Die Reihenfolge, in welcher die allotropen Spektra im allgemeinen auftreten, haben wir schon fruher besprochen

Die eigentlichen Gase werden je naher sie das Boyle-Gay-Lussacsche Gesetz befolgen, je wichtiger fur die theoretische Spektralanalyse, da bei ihnen die Verbindung der drei den Zustand des Gases vollkommen beschreibenden Variabeln bekannt ist In minderem Grade gilt dies ubrigens auch von den Dampfen im uberhitzten Zustande, und um so mehr, je geringer der Temperaturunterschied, bei welchem Beobachtung und Bestimmung der Konstanten vorgenommen wurde

10 Anwendung der Spektralanalyse auf Astronomie

In der Natur finden wir Grenzen der Zustandsbedingungen strahlender Stoffe, die wir kunstlich nicht nur nicht nachahmen, sondern in den meisten Fallen kaum annahernd erfassen konnen Es mufs daher fur die Theorie der Spektra von erhohter Bedeutung sein, die Methoden der Analyse auch auf die Himmelskorper auszudehnen und zu verwerten, was der erweiterte Gesichtskreis zu bieten vermag Wir konnen hier, um den Rahmen des Buches nicht zu uberschreiten, nur dasjenige kurz zusammenfassen, was fur die Spektralanalyse selbst von Wichtigkeit geworden Das ist vor Allem das Spektrum der Sonne und dessen spezielle Erscheinungen, das der Kometen, Nebelflecke, des Nord- und Zodiakallichtes Die Planeten spielen hier eine sehr untergeordnete Rolle, da ihr Spektrum im grofsen Ganzen mit dem des Hauptkorpers, der Sonne, identisch ist, und nur durch Absorption der umgebenden Atmosphare verandert wird

a) Die Sonne

Die Sonne besitzt ein in der Richtung der abnehmenden Wellenlangen an Kompliziertheit zunehmendes Absorptionsspektrum zugleich durch die kontinuierliche Emission des inneren Kerns und elektive Absorption der aufseren Hulle, der Photosphare entstanden Eine qualitative Analyse wird hier moglich, und es zeigt sich dafs ein grofser Teil der uns bekannten Elemente auch auf unserm Centralkorper vorhanden ist Am Rande der Sonne, wo wir durch eine reine von keinem kontinuierlichen Spektrum durchstrahlte Gasschicht hindurchsehen, mufste das der Sonne entsprechende diskontinuierliche Emissionsspektrum sichtbar sein, wenn nicht die storende Nahe des Sonnen-

kernes die hell erleuchtete Atmosphäre der Erde, dessen Sichtbarkeit beträchtlich erschwerte. Bei totalen Sonnenfinsternissen fallen beide störenden Einflüsse weg, und dann gelingt es auch, einen grofsen Teil der sonst dunkeln und nach ihrem Entdecker Fraunhofersche Linien genannten Strahlen in helle umgewandelt zu beobachten. Zugleich wurden aber bei solchen Gelegenheiten noch einige Erscheinungen entdeckt, die in der Folge von grofser Wichtigkeit wurden. Es sind dies die Chromosphäre, eine die Photosphäre einhüllende Schichte glühenden Gases, aus welcher die Protuberanzen, mächtige Gaseruptionen, hervorbrechen, und die Korona, ein silberweifser Lichtkranz, der die verfinsterte Sonne auf grofse Entfernung umgiebt.

Das Spektrum der Chromosphäre ist ein ziemlich kompliziertes diskontinuierliches Emissionsspektrum, das der Protuberanzen im allgemeinen etwas einfacher. Charakteristisch ist aber für beide, dafs wir in demselben, was beim eigentlichen Sonnenspektrum durchaus nicht der Fall ist, viele Linien finden, deren Ursprung völlig unbekannt ist. Die bekannteste unter ihnen, die man mit dem Namen der Heliumlinie belegt hat, liegt in der Nachbarschaft der Natriumlinie. Ein durchaus rätselhaftes Gebilde ist die Korona, deren Spektrum zum gröfsten Teil aus einer grünen Linie besteht, die bisher auf keinen bekannten Stoff zurückgeführt werden konnte. Sie heifst vornehmlich Koronalinie. Daneben zeigt die Korona in den helleren Teilen das Emissionsspektrum des Hydrogen, und das reflektierte Absorptionsspektrum der Sonne selbst. Es besteht also die Korona aufser der noch unbekannten Substanz aus festen Partikeln, die Licht zu reflektieren im Stande sind.

Da bei Sonnenbeobachtungen mit Fernrohr die Bedingungen der Lockyerschen Methode eingehalten sind, so erscheinen die Linien der Chromosphäre und der Protuberanzen von verschiedener Länge. Am längsten sind die Linien des Hydrogen, sodann des Heliums, des Magnesiums und Natriums, ein Beweis, dafs sie zu ihrem Zustandekommen nicht nur einer ziemlich niederen Temperatur und geringen Drucks bedürfen, sondern auch, dafs sie infolge ihres geringen Atomgewichtes auch zu so beträchtlichen Höhen sich erheben können.

Während nun diese Erscheinungen, die jetzt grofsenteils mit Ausnahme der Korona auch unabhängig von einer totalen Sonnenfinsternis beobachtet werden können, darauf hinweisen, dafs wir entweder noch unbekannte Stoffe vor uns haben, oder dafs sich in schon bekannten Spektra unter uns völlig unbekannten Zustandsbedingungen charakteristische Linien entwickeln können, von welchen wir bei den uns zugänglichen Zuständen nicht einmal leise Andeutungen gewahren, treffen wir auf der eigentlichen Sonnenscheibe Erscheinungen an, mit welchen unsere Ansichten von den Elementen oder deren Spektra nicht zu vereinen sind. Sie bestehen darin, dafs häufig Linien desselben Stoffes verzerrt und unregelmäfsig verdickt oder verschoben erscheinen, während andere, ebendemselben Stoffe angehörende Strahlen vollkommene Ruhe und Regelmäfsigkeit verraten. Diese Erscheinungen sind sehr häufig in dem komplizierten Spektrum des Eisens, nicht minder, wenn auch etwas anderer Art, in dem so genau bekannten Spektrum des Hydrogen, und weisen entweder auf rasche Bewegung des Gases in der Gesichtslinie, oder auf enorme diskontinuierlich wirkende Druckkräfte hin. Dann könnte aber ein Teil der Linien auch nur dann unaffiziert bleiben, wenn wir annehmen wollen, dafs das von uns als einfach erkanntes Element aus so vielen Stoffen besteht, als den verschieden affizierten Spektrallinien entspricht, und dafs die Bewegungen oder die auffallenden Druckdifferenzen sich nur auf den einen oder anderen Bestandteil beziehen.

Es scheint, als ob wir auch auf diesem Wege zu der Dissoziierbarkeit der sogenannten chemischen Elemente geführt würden.

Eine weitere interessante Erscheinung des Sonnenspektrums ist der Mangel der Metalloide. Es gelang wenigstens bislang noch nicht, mit Sicherheit einen Stoff dieser Klasse nachzuweisen. Wahrscheinlich ist die Temperatur der Sonne zu hoch, als dafs in ihr diese Stoffe in der von uns bekannten Form bestehen könnten. Wir brauchen nur an das chemische Verhalten, besonders die Dampfdichten der Halogene, des Schwefels usw. zu denken, um in der ausgesprochenen Meinung Lockyers nichts Überraschendes mehr zu sehen. Im Ganzen sind etwas mehr als dreifsig unserer Elemente als auf der Sonne mit gröfster Wahrscheinlichkeit vorhanden nachgewiesen, und da wir gesehen haben, dafs bei sämtlichen der Linienreichtum mit kleiner werdender Wellenlänge zunimmt, ist auch die enorme Anhäufung der Linien des Sonnenspektrums in diesem Teile vollkommen erklärt.

b) Die Fixsterne.

Da die qualitative Analyse des Sternenlichtes auf die Einheit der Materie im ganzen Raume deutet, so haben wir in den Fixsternen ausgeprägte Spektra kompliziert gemischter Stoffe unter den verschiedensten Bedingungen des Zustandes. Denn es ist wohl anzunehmen, dafs in dem Heere der Sterne gleichzeitig alle denkbaren Zustände angetroffen werden könnten. Von diesem Gesichtspunkte aus ist es besonders interessant, dafs sich alle Sterne mit der Strenge, die man von einem Einteilungsprinzipe nur fordern darf, drei grofsen Klassen, Typen, unterordnen lassen, die Dr. H. C. Vogel festgestellt.

Die Klasse der weifslich blauen Sterne, welchen die höchste Temperatur zugeschrieben werden mufs, besitzen ein ausgeprägtes Hydrogen-Absorptionsspektrum mit sehr erbreiterten Linien, und sehr wenige feine Metalllinien. Zuweilen erscheint das ganze Spektrum vollkommen kontinuierlich, oder aber die Hydrogenlinien hell.

Die Klasse der gelben Sterne, mit etwas geringerer Temperatur, zu welchen auch die Sonne gehört, zeigen ein durchaus ausgeprägtes Metallspektrum mit sehr vielen feinen Linien, unter welchen sich meist nur die Hydrogenlinien durch etwas gröfsere Stärke auszeichnen. Mitunter sind manche der Linien hell, doch nur in sehr seltenen Fällen.

Die Klasse der roten Sterne endlich charakterisiert einen sehr niederen Grad der Temperatur. Im Spektrum erscheinen breite einseitig scharf begrenzte Banden, mitunter mit feinen hellen Linien vermischt. Der Schwerpunkt der Intensität entfällt auf Rot, in den früheren beiden Klassen bezüglich auf Violet und die mittleren Teile des sichtbaren Spektrums.

Aufserdem kennen wir einige wenige Sterne, welche nur sehr wenig helle Linien besitzen, und sich keinem der angezogenen Typen unterordnen lassen, sowie neue Sterne, die ein Superpositionsspektrum eines der drei Typen und eines hellen Linienspektrums zeigen.

Als besonders interessant mufs hervorgehoben werden, dafs die Sterne mit hellen Linien fast immer Hydrogen und Helium besitzen, so dafs letzteres sozusagen an ersteres geknüpft erscheint, und dafs in den roten Sternen Metalloide, namentlich Kohlenverbindungen nachweisbar sind.

c) Die Nebelflecke.

In den Nebelflecken besitzen wir Gebilde von selbstleuchtendem Gasstoff höchst wahrscheinlich im Zustande sehr niedriger Temperatur und verschwindend kleinen Druckes. Die Spektra dieser Gasmassen sind fast vollkommen monochromatisch, indem sie aus einer, höchtens vier Linien bestehen, die teilweise dem Hydrogene, dem Nitrogene und einem noch unbekannten Stoffe angehören. Diese Linien sind in Hinsicht auf den Zustand des Gases natürlich die längsten des betreffenden Stoffes, wenigstens gilt dies für Hydrogen und Nitrogen.

d) die Kometen.

Alle bisher untersuchten Kometen lieferten ein diskontinuierliches Emissionsspektrum irgend einer Kohlenstoffverbindung bei tiefer Temperatur und sehr geringem Drucke. Es ist das bekannte Dreibandenspektrum mit breiten, einseitig begrenzten Linien, deren mittlere, im Grün, die längste ist. Einige gröfsere Kometen, denen vermutlich mit Annäherung an die Sonne höherwertige Zustandsvariabele entsprachen, zeigten das verwickeltere Spekrum der betreffenden Kohlenstoffverbindung, in einem Falle selbst hellglühendes Natrium. In manchen Fällen war das reflektierte Sonnenspektrum mit den Fraunhoferschen Linien sichtbar. Bei der äufserst geringen Dichtigkeit der Kometen, die auch aus anderen als spektroskopischen Beobachtungen gefolgert werden mufs, und dem Umstande, dafs nur die längsten Linien der Kohlenstoffverbindungen vorhanden sind, folgt hieraus der geringe Druck, dem diese Weltkörper unterliegen, also fast mit Gewifsheit auch, dafs die Emission bei sehr tiefer Temperatur durch elektrische Entladungen hervorgebracht wird. Die Erscheinungen des Schweifes stehen keinesfalls mit diesem Ergebnisse im Widerspruch.

e) Das Nord- und Zodiakallicht.

Das erstere, eine Erscheinung unserer Atmosphäre, besitzt ein Spektrum, das jedenfalls elektrischen Entladungen in sehr hohen, daher dünnen und kalten Luftschichten seine Entstehung verdankt. Wenigstens gelang es Hasselberg[1] ein Luftspektrum unter ähnlichen Verhältnissen darzustellen, welches hauptsächlich aus den drei Linien des Nordlichtes bestand. Dagegen ist der Ursprung der Hauptlinie, die gewöhnlich die Nordlichtlinie genannt wird, nicht bekannt. Man wäre wohl nicht geneigt, die Linie ihrer atmosphärischen Entstehung halber einem noch unbekannten Stoffe zuzuschreiben, und daher hat die Annahme Ångströms, die elektrische Entladung bewirke durch Phosphoreszenzerscheinungen im Oxygen oder einer Nitrogenverbindung dieses Luftbestandteils die Linie, wohl einige Wahrscheinlichkeit für sich.

Das Spektrum des Zodiakallichtes, welches kosmischen Ursprungs ist, ist ziemlich monochromatisch, wenn man von einem schwachen kontinuierlichen Schimmer absieht. Die Hauptlinie desselben, im Gelbgrün gelegen, ist identisch mit einer Linie unbekannten Ursprungs der Sonnenkorona.

So finden wir denn, dafs die ausgedehnteren Beobachtungen des Spektrums himmlicher Erscheinungen noch manches Rätsel der Spektralanalyse ungelöst lassen,

---

[1] Hasselberg, Mém. de l'acad. de St. Pétersbourg. 27. No. 1.

und wegen der grösseren Zahl der noch unerklärten Linien zugleich zum emsigen Studium des Zusammenhangs zwischen dem Spektrum und dem Zustande des glühenden Körpers und zu unverdrossenem Nachsuchen nach noch unbekannten Elementen auffordert. Möglich und selbst wahrscheinlich ist es, dafs in beiden Fällen die universale Bedeutung der Balmerschen oder einer ähnlichen Gleichung als Hilfsmittel uns zu statten kommen wird.

11. Untersuchungsmethoden der Spektra.

Die beobachtende Spektralanalyse erfordert zunächst ein Instrument zur Entfaltung eines Spektrums aus einem gegebenen Strahlenkomplexe. Hierzu besitzen wir vorzüglich zweier Hilfsmittel, der Brechung der Strahlen in Prismen, und der Beugung der durch enge Spalten hindurchgegangenen Wellen, da beide in dem Strahle so hervorgebrachte Veränderungen eine Funktion der Wellenlänge ist. Demgemäfs besteht das Spektroskop lediglich aus einem Prisma oder Gitternetze — zahlreicher eng gedrängter schmaler Spalten — auf welches das parallele Licht einer von der zu untersuchenden Lichtquelle erhellten Linie fällt. Um auch Messungen anstellen zu können, verbindet man das Instrument mit einem Fernrohre, das zugleich das erzeugte Spektrum etwas vergröfsert darstellt. Die von der Lichtquelle erhellte Linie erzeugt man durch einen im Brennpunkte einer Kollektivlinse stehenden engen Spalt, dessen Richtung mit der Axe des Prismas oder den Spalten des Gitters parallel läuft. Warum man gerade diese Art der Öffnung wählt, ist leicht einzusehen, denn wenn ein jeder Strahl verschiedener Wellenlänge anders gebrochen wird, so erzeugt jedenfalls jeder derselben ein anderes Bild des Spaltes. Die benachbarten Strahlen entsprechenden Bilder fallen nun um so enger zusammen und überlagern sich teilweise, je breiter die Öffnung, durch welche das Licht eintritt. Es ist daher das Spektrum in der Erklärung des reinen Beobachters die Summe der von der Strahlung erzeugten Spaltbilder; ist diese Strahlung kontinuierlich, d. h. enthält sie Wellen aller denkbaren Längen, so fliefsen die Bilder ineinander und liefern ein ebenfalls stetiges Farbenband, besteht sie aus einzelnen diskontinuierlichen Schwingungen, so ist das Spektrum aus ebenso vielen alleinstehenden Spaltbildern — hellen Linien gebildet. Fehlt endlich in einem kontinuierlichen Komplexe eine Schwingung, so steht im Spektrum an der entsprechenden Stelle dieser Wellenlänge eine dunkle Linie. Kommt es endlich in ganz bestimmten besonderen Fällen nicht auf die Kenntnis des ganzen Spektrums, sondern nur eines kleinen Teiles desselben an, so kann man statt des vollständigen Spektroskops Absorptionsmedien nehmen, welche das Spektrum auf die gewünschte Stelle reduzieren, oder auch — wie wir später sehen werden — zweimal total reflektierende Prismen, deren Hypothenusenflächen unter ganz bestimmten, nur von der Wellenlänge der gewünschten Spektralregion abhängigen Winkeln liegen.

Es ist dem früher gesagten nach nötig, dafs mit Hilfe eines Spektroskops Wellenlänge, Intensität und bei der Lockyerschen Methode der Analyse auch Länge der Linie mefsbar sei.

Zum Behufe der Wellenlängenmessung besitzt das Spektroskop eine um den Drehungspunkt des Fernrohrs geschlagene Kreisteilung, oder in einfacheren Fällen blofs eine mit dem Spektrum zugleich im Gesichtsfelde erscheinende Skale. Im ersteren

Falle bestimmen wir die Abweichung des Strahles von seiner ursprünglichen Richtung, im zweiten Falle die Unterschiede dieser Deviationen für die einzelnen Strahlen. In beiden Fällen, und man habe es nun mit Gitter- oder Prismenspektroskop zu thun, läfst sich die Wellenlänge leicht bestimmen; bei Gittern nach strengen theoretischen, bei Prismen nach Interpolationsmethoden. Gewöhnlich verzichtet man auf die strenge Ableitung der Wellenlänge, und benutzt ein einfaches Anschlufsverfahren an die bereits sehr genau bestimmten Wellenlängen der wichtigeren Fraunhoferschen Linien des Sonnenspektrums.

Zur Bestimmung der Breite der Spektrallinien bedarf es keines besonderen Hilfsapparates, da ja deren Richtung in die Richtung der Wellenlängen hineinfällt, in diesen Einheiten somit unmittelbar ausgedrückt werden kann. Anders bei der Bestimmung der Länge der Linie, wo man einen Mefsapparat benötigt, der senkrecht zur Richtung des Spektrums wirkt. Besitzt das Spektroskop für Wellenlängenbestimmuugen ein Okularmikrometer oder eine in das Gesichtsfeld hinein projizierte Skale, so kann einfach diese Vorrichtung um 90 Grade gedreht werden, wo nicht, so mufs ein Quermikrometer angewendet werden. Um die Länge der Linie in absolutem — nicht einem willkürlichen Längenmafse — ausdrücken zu können, wählt man die absoluten Temperaturen, bei welchen die Linie eben verschwindet, und die Mikrometerangaben sind daher auf Temperaturgrade zu reduzieren — eine sehr schwierige Aufgabe, die in jedem einzelnen Falle besonders durchgeführt werden müfste. Man kann aber ein sehr einfaches und direktes Verfahren einschlagen, welches auch von den zufälligen Änderungen der Temperatur unabhängig macht und welches der Verfasser zuerst vorschlug. Vor dem Spalte befestigt man senkrecht zu der Richtung desselben einen Platindraht, der in der Richtung des Spaltes mit einer beliebigen Vorrichtung auf und ab bewegt werden kann. Das Bild dieses Drahtes sieht man im Gesichtsfelde des Spektroskops sehr deutlich. Der Draht selbst ist ein Teil einer geschlossenen Stromleitung, welche ein genaues Galvanometer umfliefst. Durch Einwirkung der Temperatur auf den Draht verändert sich dessen elektrischer Widerstand und zeigt so eine ganz genau definierbare Temperaturfunktion an. Stellt man das Bild des Drahtes auf die Endspitze der Linie ein, so zeigt das Galvanometer bereits die Temperatur der Linienspitze, das ist deren Länge an, und zwar so, dafs wir etwaige Veränderungen der Temperatur der Lichtquelle gar nicht zu kennen brauchen. Lockyer selbst scheint direkte Längenbestimmungen der Linien nicht vorgenommen zu haben.

Die Intensitätsmessungen sind äufserst schwierig, und befolgen kein so einheitliches Prinzip mehr, wie die vorhin besprochenen. Wir können dabei zwei Methoden unterscheiden: die Methode der Vergleichung und die Methode der absoluten Messung. Bei ersterer wird die Intensität der Strahlung wellenlängenweise mit der Intensität einer als Norm angenommenen Lichtquelle verglichen; bei letzterer entweder die Intensität direkt dem Mefsapparate entnommen, oder aber im Falle der Augenbeobachtung, wobei natürlich vom Messen subjektiver Reizunterschiede keine Rede sein kann, so weit reduziert, bis sie einen von der Wellenlänge (Farbe) unabhängigen konstanten Wert angenommen. Die Intensitätsbestimmung erfolgt dann mit Hilfe der zu dem Zwecke nötigen Intensitätsabschwächung. Beide Methoden können aber auf mannigfaltige Weise durchgeführt werden; entweder durch Beobachtung mit dem Auge, wobei wir auf den sichtbaren Teil des Spektrums beschränkt bleiben, oder durch die chemische Reaktion der photographischen Platte, der thermischen Reaktion einer Thermosäule, eines elektrischen

Widerstandes, eines Thermometers Die letzteren Methoden sind in hohem Grade geeignet, die Kenntnis der Spektra auch weit in die unsichtbaren Teile desselben zu erweitern, denn wir brauchen die Reagentien nur mit solchen Absorptionsmedien zu umgeben, welche besonders fur die gewunschten Wellenlangen empfindlich sind

Wahrend man die Reduktionsmethoden dieser Beobachtungen in vielen Handbuchern finden wird — auch wir werden uns damit noch zu beschaftigen haben — soll hier nur der Weg angedeutet werden, auf welchem man zu dem eingangs angezeigten absoluten Mafse der Intensitat gelangt Denken wir uns eine Thermometerkugel von bekannten physikalischen Konstanten mit einem Überzuge bekannter Absorption — und Reflexionsfahigkeit — der Einfachheit halber mit einem absolut schwarzen Korper bekleidet Eine gewisse Wellenlange giebt dann eine im Warmemafse, also auch im mechanischen Mafse vollkommen bekannte Intensitat, welche mit der subjektiven Intensitat der Augenbeobachtung verglichen wird Dies fur jede einzelne Wellenlange durchgefuhrt giebt sodann einen Reduktionsfaktor fur die dem Auge willkurlich angepafste Intensitatseinheit In Wirklichkeit gestaltet sich die Sache etwas einfacher, da wir diese Untersuchung bei einem normalen Auge in der That nur fur eine einzige Wellenlange durchzufuhren haben Wir konnen namlich eine Funktion angeben welche fur jede Wellenlange die vereinte Wirkung der Absorption und Reflexion der Retina ganz genau ausdruckt, und sind weiter im Stande, diese Funktion so umzugestalten, dafs die Elemente nicht der Intensitat, sondern der mefsbaren Wellenlange enthalt Daher konnen wir wenigstens relative Werte der Augenempfindlichkeit ableiten und brauchen somit nur wenige Beobachtungen, um die Konstanten zu bestimmen

Diese Reduktion der Augenbeobachtung, statt der direkten Beobachtung mit einem Thermometer ist deshalb von Wichtigkeit, weil wir in den meisten Fallen gerade auf unsern Gesichtssinn angewiesen sind diesem aber zugleich auch die grofste Empfindlichkeit zukommt Bei der subjektiven Intensitat eines Strahles als Mafs der absoluten Intensitat darf aber deshalb nicht stehen geblieben werden, weil zwischen beiden eine nicht nur objektive, sondern eine auch von Beobachter zu Beobachter und selbst im Laufe der Zeit wechselnde Beziehung besteht Wissen wir doch, dafs die historischen Volker nicht zu langer Vergangenheit fur gewisse Spektralfarben ganz unempfindlich waren

Aufser dem Auge ist nur die Photographie berufen, genaue Bestimmungen der Wellenlangen zu bewirken, thermometrische Methoden zeigen hochstens im Falle einer hellen oder dunklen Linie vermehrte und verminderte Reagenz, aus welcher die Wellenlange mit einiger Scharfe kaum abgeleitet werden kann Auch neben dem Hilfsmittel der chemischen Reaktion ist es also erwunscht, Mittel zu finden, auch die unsichtbaren Teile der Spektra in das Bereich der Augenempfindung ziehen zu konnen Wir werden daher vor Allem das ultrarote und ultraviolette Spektrum zu besprechen haben

12 Das ultrarote und ultraviolette Spektrum

In der Erscheinung der Fluoreszenz und Kaloreszenz haben wir Mittel entdeckt, kurze bezuglich lange Wellen in langere bezuglich kurzere zu verwandeln, und wir sahen, dafs die so bewirkte Verschiebung der Wellenlange des auffallenden Lichtes eine um so grofsere ist, je weiter diese von der Eigenschwingung der betreffenden Substanz

entfernt liegt. Diese Medien werden also in hohem Maſse geeignet sein, Partien des unsichtbaren Spektrums in das sichtbare hinein zu verlegen. Da sich die Phosphoreszenz von den beiden angezogenen Erscheinungen nur durch zeitliche Dauer unterscheidet, so sind wir auch im Stande, das erzeugte Spektralbild länger andauernd zu erhalten. Setzt man nämlich eine phosphoreszierende Platte der Einwirkung des ultravioletten Lichtes aus, so werden alle leuchtenden Teile des Spektrums auch auf der Platte leuchtend hervortreten, während Diskontinuitäten in demselben Sinne auf der Platte auffindbar sein werden. Für gewöhnlich wählt man aber den etwas genaueren Weg, das Okular des Spektroskops selbst fluoreszierend darzustellen. Die Farbe des ultravioletten Lichtes ist ein silberschimmerndes Lavendelgrau.

Das ultrarote Licht besitzt die Eigentümlichkeit, die Phosphoreszenz aufzuheben. Setzt man also eine phosphoreszierend leuchtende Platte den Strahlen groſser Wellenlängen aus, so werden alle Stellen, auf welche Licht fällt, aufhören zu leuchten, während an Stellen etwaiger dunkler Linien die Phosphoreszenz fortdauert. Phosphoreszierende Platten liefern also ein positives Bild bei kleinen, ein negatives bei langen Wellen.

Die photographischen Methoden liefern aber hier in beiden Fällen das sicherste Resultat, indem die früher nur als für kurzwellige Strahlen anwendbar gehaltene photographische Platte heute bereits durch Zusatzmittel, welche die gewünschte Stelle des Spektrums lebhaft absorbieren, für beliebige Wellen empfindlich gemacht werden kann. Zwei störende Einflüsse dürfen aber hier nicht auſser Acht gelassen werden; die gewöhnlichen optischen Medien des Spektroskops sind für ultraviolettes Licht fast vollkommen undurchsichtig, müssen also durch Quarzlinsen und Prismen ersetzt werden, welche weniger von dieser Strahlung absorbieren. Das ultrarote Licht dagegen ist bei Anwendung von Prismen in einen so kurzen Raum zusammengedrängt, daſs von Messungen kaum noch eine Rede sein kann. Unter diesen Umständen ist Abney's Verdienst, ein Spektroskop dargestellt zu haben, in welchem nur Reflexionen, aber keine Brechungen vorkommen, kein geringes. Alle Kollektivlinsen sind durch Hohlspiegel, das Prisma oder Gitter durch ein reflektierendes Gitter ersetzt. Hierbei fallen zugleich die Fehler der Achromasie aus, und das entstandene Spektrum liegt in einer Ebene, was bei Linsen- und Prismenkombinationen nie zu erreichen ist.

Die bisher ereichten Grenzen des ultravioletten Spektrums liegen bei 0·185, einer wahrscheinlich dem Aluminium angehörenden Linie, des ultraroten Spektrums, bei 2·700 Tausendstel Millimeter.

13. Das Sonnenspektrum.

Als Ausgangspunkt aller auf die Bestimmung der Wellenlänge Bezug habenden Untersuchungen ist das Spektrum der Sonne zu betrachten, welches einesteils durch die groſse Zahl und auſserordentliche Feinheit der Linien, anderenteils wegen der sehr bedeutenden Lichtstärke die Anwendung der stärksten Apparate gestattend, Messungen von vorzüglicher Genauigkeit zuläſst. In dem sichtbaren Teile des Spektrums zeichnen sich besonders zehn bis elf Linien durch gröſsere Stärke aus, die stets leicht bemerkbar, als Marken bei vielen optischen Untersuchungen dienen. Vortreffliche Messungen dieser zwischen 0·393 und 0·760 gelegenen Partie des ganzen Spektrums rühren von Ångström her, dessen klassische Arbeit auf diesem Gebiete stets als Anhaltepunkt

benutzt wird Die erste sehr genaue und mustergiltige Zeichnung fertigte schon Kirchhoff an, da er aber die Lage der Linien nach einer willkurlichen Skale giebt so verliert die Arbeit durch die Notwendigkeit der Umrechnung auf Wellenlangen notwendig Einzelne Teile des Sonnenspektrums sind neuerdings haufiger mit Benutzung sehr starker Dispersion durchmessen worden

Das ultraviolette Spektrum wurde in der Ausdehnung von etwa 0 410 bis 0 295 von Cornu mit Hilfe der Photographie untersucht, und die Resultate in einer sich dem Angstromschen Atlasse anschliefsenden Form reduziert Cornu wahlt auch in diesem Teile etwa funfzehn Linien, die leicht erkannt werden konnen, belegt sie mit Buchstaben, um sie leicht wie die Linien des sichtbaren Spektrums als Marken benutzen zu konnen

Bei dem Apparate, welcher zur Untersuchung des Ultraviolet diente, war naturlich alles diese Strahlen so energisch absorbierende Glas durch den durchsichtigeren Quarz und islandischen Spath ersetzt Es scheint aber, dafs man trotz dieser Vorsicht nicht viel weiter wird vordringen konnen, da sich die Absorption der Luft nicht eliminieren lafst Die fur Beobachtungen noch tauglichen Hohen scheinen keine wesentliche Verschiebung der Grenze des Ultraviolet zu garantieren Bei derselben Hohe der Sonne fand z B Cornu auf Bergen der Schweiz von 660 1650 und 2570 m die Grenze des Spektrums bei 0 2954, 0 2948 und 0 2932 Es war also eine Erhebung von fast 2000 m notwendig, um die Grenze des Spektrums um 0 0022 Tausendstel mm zu verschieben

Aber auch in noch grofseren Hohen wird die Absorption der Luft ein Ziel stecken, welches beim Sonnenspektrum nicht wird uberschritten werden konnen denn Cornu giebt an, dafs 10 m Luft bereits die Strahlen der Wellenlange 0 21184, 1 m die Wellenlange 0 18421 und 0 1 m die Wellenlange 0 15658 vollstandig absorbiere

In ahnlicher Weise wie das ebenbesprochene Ultraviolet, hat Abney das ultrarote Spektrum der Sonne photographiert Im Prismenspektrum gelangte er bis zur Wellenlange 2 700 im Gitterspektrum, welches in diesem Falle allein zur genaueren Bestimmung der Wellenlangen benutzt werden kann, bis zur Wellenlange 1 050 Durch sieben bis acht starke auffallende Linien ist auch dieser Teil des Spektrums in kleinere Abschnitte eingeteilt Über 2 700 hinaus beginnt kontinuierliche Absorption

Ein noch grofserer Unterschied als zwischen sichtbarem und ultraviolettem Spektrum, besteht zwischen dem ultraroten und dem sichtbaren, indem jenes nur einzelne sehr dicke Linien aufweist, keine Liniengruppen, wie wir diese im Ultraviolet und selbst schon im sichtbaren Spektrum bemerken

14 Reduktion der Beobachtungen

Vergleicht man die Spektra der Elemente, wie sie von verschiedenen Forschern dargestellt werden, so mufs es auffallen, dafs bezuglich der Zugehorigkeit mancher Linie zu dem betreffenden Stoffe die grofsten Verschiedenheiten herrschen Wahrend der eine nur eine beschrankte Zahl von Linien angiebt, findet der andere deren eine Menge und es lafst sich aus den Beobachtungen selbst erschliefsen dafs hieran nicht hauptsachlich die Verschiedenheit der benutzten Instrumente Schuld ist Man ist so nur bei den wenigsten Stoffen im Stande uberhaupt zu entscheiden, ob zwischen zwei gegebenen

Linien noch eine andere desselben Stoffes vorhanden sein kann, das heifst einfach die Ordnungszahl der Linie anzugeben, was bei mancher Untersuchung von Wichtigkeit wäre. Weiter sind kaum Versuche bekannt geworden, welche die Intensität, Breite und Länge der Linien feststellen, oder wenigstens solche Konstanten angeben, aus welchen diese Daten berechnet werden könnten. Natürlich haben diese Angaben überhaupt nur dann einen Wert, wenn zugleich der Zustand des glühenden Körpers, also Temperatur, Dichte und Druck gegeben ist, oder wenn das Spektrum ganz allgemein auf einen als normal angenommenen Zustand reduziert werden kann. Nur in diesem Falle hat das Spektrum überhaupt eine physikalische Bedeutung, sonst ist es nicht viel mehr als eine angenehme Zugabe für chemische Analysen.

Die Beobachtungen sollen stets nach der Lockyerschen Methode angestellt werden, denn nur in diesem Falle weifs der Beobachter, was er sieht, und welchem Zustande das Gesehene entspricht. Die Wellenlänge und die Breite der Strahlen werden gemessen, und auch letztere in Einheiten der ersteren ausgedrückt; die Länge der Linie als Temperatur des Verschwindens für diese Wellenlänge, und die Intensität derselben in einem bestimmbaren Zustande des Spektrums untersucht, und auch dem immer auftretenden kontinuierlichen Spektrum Aufmerksamkeit geschenkt. Endlich mufs auch Temperatur, Volumen und Druck des glühenden Körpers bekannt sein. Unter diesen Verhältnissen erscheint natürlich die Spektralbeobachtung bedeutend verwickelt, liefert dafür aber auch stets neue Bedingungen für die Errechnung der noch unbekannten Konstanten. Im allgemeinen ist bei der vorgeschriebenen Methode Alles, und viel Überflüssiges gefordert. Infolge der aufzustellenden Theorie der Spektra reduziert sich die Kenntnis des ganzen (diskontinuierlich gedachten) Spektrums einschliefslich der Wellenlängen der auftretenden Strahlen auf drei Konstanten (zwei derselben erfordert die Berechnung der Wellenlänge) und zwei Variabele. Damit werden wir nicht nur alle Erscheinungen der Spektralanalyse verfolgen können, sondern wir werden auch im Stande sein anzugeben, bei welcher Temperatur Dissoziation eintritt, und welches die Linien des Stoffes sind, welche dem Dissoziationsprodukte angehören.

Die kontinuierlichen Spektra werden gewöhnlich mit dem Bemerken übergangen, dafs sie nicht geeignet sind, die Natur des glühenden Stoffes erkennen zu lassen. Abgesehen von dem Interesse, das die Kontinuität der Spektra für die Theorie bieten mufs, ist auch dieser Satz nicht richtig, denn die Intensität des Spektrums im Ganzen sowohl als in den kleinsten Teilen, ist nur eine Funktion der Körpereigenschaften. Betrachten wir nun etwas näher die Folgen dieser Kontinuität, laut welcher die Intensitäten der stetig aufeinander folgenden Wellenlängen ohne Unterbrechung, ja selbst ohne auffallende Maxima oder Minima ineinander übergehen. Dies kann offenbar nicht möglich sein, wenn Intensität und Wellenlänge von einander völlig unabhängig wären. Dieser Satz, der unserem früher aufgestellten über die Unabhängigkeit von Farbe und Intensität zu widersprechen scheint, kann so in Übereinstimmung gebracht werden. Die Intensität einer beliebigen Wellenlänge ist Funktion dieser Wellenlänge, und einer ganz willkürlich zu wählenden Anfangsintensität. Während also für die einzelne Schwingung ein Zusammenhang in der That nicht besteht, sehen wir bei organisch zusammengehörigen Schwingungen, einem kontinuierlichen Spektrum, sich die eine aus der andern entwickeln. Die Aufgabe der theoretischen Spektralanalyse ist also in erster Reihe die Bedingungsgleichung aufzusuchen, welche zwischen der Intensität und den Wellenlängen eines zusammengehörenden Strahlenkomplexes besteht. Diese Bedingungsgleichung,

in der Folge Spektralgleichung genannt, ist die Grundlage aller unserer Untersuchungen

Antizipierend bemerken wir, dafs theoretisch zwischen Gas- und kontinuierlichem Spektrum ein Unterschied nicht besteht, wenn wir nur die Wellenlange respektive als stetige, oder springend veranderliche Variabele betrachten wollen Die Gleichung des Spektrums selbst enthalt blofs zwei Parameter, die wir hinfort die Elemente des Spektrums nennen wollen sie sind die Totalintensitat des Spektrums (wenn wir dieses von der Wellenlange 0 bis ∞ ausgedehnt betrachten) und die Wellenlange des Intensitatsmaximums Beide Elemente sind fur die verschiedenen Stoffe charakterisierend, und so sehen wir auch die kontinuierlichen Spektra — wenn auch schwieriger als die diskontinuierlichen — in den Dienst der qualitativen Analyse treten Da durch deren Kenntnis das ganze Spektrum der Korper bekannt wird, so sehen wir, dafs auf die numerische Bestimmung dieser Alles ankommt, was theoretisch blofs zwei Intensitatsbeobachtungen erfordert

Eine ganz besonders interessante Eigenschaft charakterisiert das Spektrum Projiziert man die kontinuierlichen Spektra verschiedener Korper aufeinander, so erhalt man, wie man leicht sieht, wieder ein kontinuierliches Spektrum — doch ist dasselbe nicht mehr durch dieselbe Gleichung ausdruckbar In Worten ausgedruckt, wurde das besagen es giebt keinen Korper, der in beliebigem Zustande ein Spektrum lieferte welches der Summe der Spektra zweier beliebiger Korper in willkurlichem Zustande gleich ware Infolge dieser Eigenschaft der Spektra sind wir im Stande, Superpositionsspektra zu trennen, die Bestandteile einer Mischung, ja selbst die naheren Verhaltnisse der Mischung anzugeben In der Astrophysik zumal wird diese Eigenschaft zu einer sehr schatzbaren, da wir stets die Spektra der Photosphare (die zum Teile ja auch kontinuierlich sind) von dem des gluhenden Kernes trennen konnen

Das Spektrum der Korper ist, mogen sich diese in den unmefsbaren Entfernungen der Fixsterne befinden, oder aber zuganglich vor uns liegen, stets das Gegebene, das sich der Beobachtung Darbietende Der Zustand der Korper jedoch das Abstrakte nur mittelbar Zugangliche Es wird also, so ersehen wir hieraus, die Hauptaufgabe der theoretischen Spektralanalyse sein, den Zustand der Korper, der alle von den Ortsveranderungen der Korper unabhangige Unterschiede und Veranderungen[1] erklart, aus dem gegebenen Spektrum abzuleiten Bis zu diesem Punkte mufs das Spektrum verfolgt und reduziert werden, soll anders die Spektralanalyse in das Gebiet der physikalischen Wissenszweige ubergehen Von da ab ubernimmt die mechanische Warmetheorie das durch Spektroskopie herangezogene Gebiet, und Zollners schone Definition der Astrophysik, die heute wohl schon allgemein vergessen ist, gewinnt erst hier an Bedeutung

[1] Zollner Wiss Abh IV Bd Zur Geschichte der Astrophysik

II.

Schwingungslehre.

Theorie der schwingenden Bewegung.

Da alle in das Gebiet der Spektralanalyse gehörende Wahrnehmungen ihre Ursache in periodischen Bewegungen kleinster Körperteilchen finden, welche vom Äther, dem angenommenen interstellaren Medium fortgepflanzt werden, so ist ein Verständnis jener nicht möglich, wenn nicht die Erkenntnis dieser Art von Bewegung vorausgesetzt werden kann. Wir gelangen dazu durch die Anwendung der Lehre der Elastizität, die, wenn durch gegenseitige Molekularkräfte der Körperteilchen erklärt, zu einer ganz allgemeinen Eigenschaft der Materie wird.

Bekanntlich ist die Kraft P, welche der durch die jeweilige Deformation $\frac{v-v'}{v}$ erregten Elastizität das Gleichgewicht hält, proportional dieser Deformation selbst. Schreibt man also:

$$P = \mathfrak{k}\frac{v-v'}{v} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

so läſst sich hieraus die noch unbestimmte Konstante herleiten, wenn man — unbeschränkte Giltigkeit des hingeschriebenen Gesetzes voraussetzend — feststellt, daſs die Kraft, welche pressend oder dehnend angewendet das ursprüngliche Volumen bezüglich zu Null macht, oder verdoppelt, eine bekannte Eigenschaft der Materie sei. Nennt man diese Kraft E, den Elastizitätsmodul, so wird für die beiden Fälle

$$E = \mathfrak{k} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

und mithin auch:

$$P = \frac{E}{v}(v-v') \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Die Kraft E ist übrigens keine Konstante, so wie auch das Elastizitätsgesetz selbst nur in ziemlich engen Grenzen gültig ist, sondern hängt auſser von stofflichen Verschiedenheiten der Materie, lediglich von deren Zustande ab. Wir werden das Gesetz stets für unendlich kleine Deformationen anwenden, in welchem Falle es als durchaus genau zu betrachten ist.

1 Schwingungen isolierter Punkte

a) Wenn durch irgend eine Ursache eine im Innern des Korpers gelegene Molekel aus ihrer, durch Anziehung der ubrigen Teilchen festbestimmten Gleichgewichtslage herausgeruckt wird, so werden durch die entstandene Deformation, die man im Falle der Schwingungen mit dem Namen Elongation, Ausbiegung belegt, elastische Krafte geweckt, deren Grofse, wie aus dem hingeschriebenen Gesetze ersichtlich ist, der momentanen Elongation proportional ist Diese Krafte suchen das verschobene Teilchen, dessen Masse m sein moge in die Gleichgewichtslage zuruckzuziehen Ist die Grofse des Zuges fur die Einheit der Masse und der Elongation a^2, indem wir die stets positive Kraft mit dem quadratischen Ausdrucke belegen, so ist sie fur die Masse m und die Elongation s ma^2s Andrerseits ist dieselbe Kraft nach mechanischen Prinzipien durch den zweiten, nach der Zeit genommenen Differentialquotienten der Elongation und durch die Masse ausdruckbar, was die Gleichung liefert

$$m\frac{d^2 s}{dt^2} = -a^2 ms \tag{4}$$

wobei das negative Vorzeichen durch den Sinn des Zuges erklarbar Setzt man versuchsweise

$$s = e^{\alpha t} \tag{5}$$

so erhalt man zur Bestimmung von α die Gleichung

$$\alpha^2 = -a^2, \quad \alpha = \pm ai \tag{6}$$

und mithin ist ganz allgemein

$$s = Ae^{ait} + Be^{-ait} \tag{7a}$$

oder bei der bekannten Verbindung der exponentiellen und goniometrischen Funktionen

$$s = \mathfrak{A} \sin at + \mathfrak{B} \cos at \tag{7b}$$

wo sowohl A, B, als $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ vollkommen willkurliche Konstanten bedeuten Die Bestimmung derselben geschieht durch die bekannten Zustande des Anfangs der Bewegung Ware so fur $t = \frac{T}{4}$, wenn das Teilchen sich am weitesten von der Gleichgewichtslage entfernt hat, die Elongation r, die Geschwindigkeit aber o, so hatte man die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} r &= \mathfrak{A} \sin a \frac{T}{4} + \mathfrak{B} \cos a \frac{T}{4} \\ o &= \mathfrak{A} a \cos a \frac{T}{4} - \mathfrak{B} a \sin a \frac{T}{4} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

aus welchen folgt

$$T = \frac{2\pi}{a}, \quad r = \mathfrak{A} \quad \mathfrak{B} = o \tag{9}$$

und welche die willkurlichen Konstanten bestimmen, die Gleichung (7b) wird daher einfacher

$$s = r \sin 2\pi \frac{t}{T} \tag{10}$$

und druckt in dieser Form alle Eigenschaften der schwingenden Bewegung aus

Die Elemente der Schwingung sind durch die Oszillationsdauer und die Maximalelongation, die man kurz Amplitude nennt, gegeben Das erste Element steht in einem genau bestimmten Verhaltnisse zu den Koeffizienten der Differentialgleichung, das

zweite ist davon ganz unabhängig, wie es auch die eingangs besprochenen Lippich- und Ebertschen Versuche erhärten. Es ist üblich und bequemer, statt dieser unmittelbaren Schwingungselemente solche einzuführen, welche mit andern Umständen der Schwingung verknüpft, doch unmittelbar beobachtet werden können. Diese sind Wellenlänge und lebendige Kraft der Schwingung.

Ist dieselbe durch die Gleichung (10) dargestellt, so wird sie sich von dem schwingenden Punkte aus mit einer Geschwingkeit ausbreiten, die mit c bezeichnet werden möge. Ein von der Erregungsstelle um x abgelegener Punkt wird von der schwingenden Bewegung in der Zeit $t = \frac{x}{c}$ getroffen, und mithin ist die Bewegung in diesem Punkte um t gegen die der Erregungsstelle verspätet. Die Form der Schwingung ist also

$$s = r \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{c}\right) \qquad (11)$$

Nun ist aber das Produkt cT der Weg, den die Schwingung fortschreitend während einer Periode zurücklegt und die man als Element der Schwingung unter dem Namen der Wellenlänge begreift. Bezeichnet also

$$\lambda = cT \qquad (12)$$

so kommt

$$s = r \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad (13)$$

Man sieht aus dieser Ableitung, dafs die Wellenlänge kein reines Element der Schwingung ist, insofern sie von den stofflichen Eigenschaften des Mediums abhängt. Die Theorie ergiebt und die Erfahrung bestätigt, dafs sie umgekehrt proportional dem Brechungsindex des Mediums ist, was in Verbindung mit (12) besagt, dafs die Farbe einer Schwingung nicht durch die Wellenlänge, sondern durch die Schwingungsdauer gegeben ist. Insofern aber die meisten Untersuchungen in der atmosphärischen Luft vor sich gehen, deren Brechungsvermögen sich nur wenig von der Einheit entfernt, kann man von dieser Unterscheidung bei weniger genauen Experimenten absehen, wenn nötig, dieselbe jedoch stets mit Leichtigkeit berücksichtigen.

Das andere Element der Schwingung, welches statt der Amplitude eingeführt wird, ist die lebendige Kraft der oszillierenden Bewegung, die nach mechanischem Mafse genommen stets mit L bezeichnet werden mag. Man hat als ihre Definition:

$$L = \tfrac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \tfrac{1}{2} m \frac{4\pi^2}{T^2} r^2 \int \cos^2 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) dt \qquad (14)$$

Der Wert des Integrals ist in der unendlich kurzen Periode T veränderlich, und daher geben unser Auge, sowie alle physikalischen Apparate, die nur auf Eindrücke von endlicher Dauer reagieren, nur den konstanten Mittelwert des Integrals. Ist n irgend eine grofse ganze Zahl, so hat man während der endlichen Zeit nT:

$$L = \tfrac{1}{2} m \frac{4\pi^2}{T^2} r^2 \cdot \frac{1}{nT} \int^{nT} \cos^2 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) dt = m\pi^2 c^2 \frac{r^2}{\lambda^2} \qquad (15)$$

Die Energie oder Intensität der Schwingung ist also proportional dem Quadrate der Amplitude, und umgekehrt proportional dem Quadrate der Wellenlänge.

Bei den mathematischen Entwickelungen behalten wir Amplitude und Schwingungszahl der grofseren Bequemlichkeit halber bei, drucken diese Grofsen aber stets durch Wellenlange und Intensitat aus, wenn sie sich auf Falle der Anwendung beziehen

Wir knupfen nun sofort an Gleichung (3) an um einerseits die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der schwingenden Bewegung angenahert zu berechnen anderntells eine Gleichung zu gewinnen, welche fur die Beziehung der Schwingung zu aufeinanderfolgenden Punkten, mit andern Worten fur fortschreitende Wellen gilt

Wir nehmen in dem gegenseitigen Abstande dx drei Punkte A, B, C an, und lassen sich A verschieben um s_1, B um s, und C um s_2 Dann ist die Distanzanderung von AB $s - s_1 = \frac{ds_1}{dx} dx$ und von BC $s_2 - s = \frac{ds_2}{dx} dx$ Bezeichnet nun E den Elastizitatsmodul und q den Querschnitt des verschobenen Volums, so ist die elastische Kraft in B von A her $Eq \frac{ds_1}{dx} dx$ und von C her $Eq \frac{ds_2}{dx} dx$ Im Sinne der Bewegung ist also die Resultierende

$$Eq\left\{\frac{ds_2}{dx} - \frac{ds_1}{dx}\right\} dx = Eq \frac{d^2 s}{dx^2} dx$$

Fuhrt man diese Differentiation in der Schwingungsgleichung (13) aus, so erhalt man $-\frac{4\pi^2}{\lambda^2} s$, oder nach der Bedeutung von λ $-s \frac{4\pi^2}{c^2 T^2}$ Da nun die bewegenden Krafte einesteils durch $\frac{d^2 s}{dt^2}$, anderntells durch $a^2 s$ ausdruckbar sind, so erhalt man die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} Eq \frac{d^2 s}{dx^2} dx &= m \frac{d^2 s}{dt^2} \\ -Eq \frac{4\pi^2}{c^2 T^2} s dx &= -m a^2 s \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Ist nun ϱ die Dichtigkeit des Mediums, so hat man

$$m = q\, dx\, \varrho \tag{17}$$

womit (16) sich verwandelt in

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 s}{dt^2} &= \frac{E}{\varrho} \frac{d^2 s}{dx^2} \\ \frac{4\pi^2}{c^2 T^2} \frac{E}{\varrho} &= a^2 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Setzt man in der zweiten Gleichung fur a^2 seinen Wert aus (9), so kommt

$$c^2 = \frac{E}{\varrho} \tag{19}$$

womit die erste Gleichung (18) einfacher wird

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 s}{dx^2} \tag{20}$$

Es ist mithin die Geschwindigkeit der Fortpflanzung gefunden, welche sich in erster Annaherung unabhangig von den Elementen der Schwingung erweist, sowie die Gleichung fur fortschreitende Wellen, auf welche wir spater noch zuruckkommen wollen

b) Jetzt greifen wir zur ursprünglichen Schwingungsgleichung zurück, und lassen diese in einem Medium vor sich gehen, welches der Bewegung einen der Geschwindigkeit einfach proportionalen Widerstand entgegenstellt. Sei derselbe für die Einheit der Geschwindigkeit und der Maſse 2ε, so wird nunmehr die Bewegungsgleichung:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -a^2s - 2\varepsilon\frac{ds}{dt} \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

Setzt man wieder versuchsweise

$$s = e^{\alpha t} \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

so liefert die Substitution in die gegebene Gleichung für α die Beziehung:

$$\alpha^2 = -a^2 - 2\varepsilon\alpha,$$

aus welcher folgt:

$$\alpha = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - a^2}. \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

Die Integralgleichung wird mithin

$$s = Ae^{-\varepsilon t}e^{+\sqrt{a^2-\varepsilon^2}.\,ti} + Be^{-\varepsilon t}\cdot e^{-\sqrt{a^2-\varepsilon^2}.\,ti} \quad \ldots \ldots \quad (24a)$$

oder anders geschrieben:

$$s = [\mathfrak{A}\sin\sqrt{a^2-\varepsilon^2}\cdot t + \mathfrak{B}\cos\sqrt{a^2-\varepsilon^2}\cdot t]\,e^{-\varepsilon t} \quad \ldots \ldots \quad (24b)$$

Soll wieder für $\sqrt{a^2-\varepsilon^2}\cdot t = \frac{\pi}{2}$, wie im vorigen Falle, $\mathfrak{B} = o$ und $\mathfrak{A} = r$ werden, so erhält man nun völlig bestimmt:

$$s = re^{-\varepsilon t}\sin\sqrt{a^2-\varepsilon^2}\cdot t \quad \ldots \ldots \quad (25)$$

Die Schwingungsperiode und Wellenlänge wird:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-\varepsilon^2}},\quad \lambda = \frac{2\pi c}{\sqrt{a^2-\varepsilon^2}}$$

also gröſser, als wenn das Medium keinen Widerstand entgegensetzte. Die Amplituden nehmen mit gleichförmig wachsender Zeit in geometrischem Verhältnisse ab, dessen Quotient $e^{-\varepsilon\frac{T}{2}}$ ist, und dessen Logarithmus, der mithin eine der verzögernden Kraft proportionale Konstante ist, nach Gauſs[1] das logarithmische Dekrement der Schwingungen genannt wird.

c) Es war betont, daſs das unseren Untersuchungen zu Grunde liegende Elastizitätsgesetz nur innerhalb enger Grenzen gelte, und es kann somit der Fall eintreten, wo die Elongationen der schwingenden Teilchen zu groſs sind, um einfach der geweckten Elastizität proportional gesetzt werden zu können. Entwickelt man in diesem Falle das Elastizitätsgesetz in eine nach Potenzen der Elongation fortschreitende Reihe, so erhält man als Bewegungsgleichung den Ausdruck:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -a^2s - a_1s^2 \quad \ldots \ldots \quad (26)$$

wenn man in der Entwickelung bei dem zweiten Gliede abbrechen darf. Bei der Integration der Gleichung benutzen wir die von Helmholtz[2] vorgeschlagene Methode. Entwickelt man nämlich s in eine nach Potenzen einer kleinen Gröſse ε fortschreitende Reihe, so kommt:

$$s = \varepsilon s_1 + \varepsilon^2 s_2 + \cdots \quad \ldots \ldots \quad (27)$$

---

[1] Result. aus den Beob. des magn. Vereins. 1857. p. 55.

[2] Pogg. Ann. 99.

und durch Vergleichung gleich hoher ε-Potenzen, nachdem das vorstehende Resultat in (26) eingesetzt wurde

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2 s_1}{dt^2} &= -a^2 s_1\\ \frac{d^2 s_2}{dt^2} &= -a^2 s_2 - a_1 s_1^2\\ \frac{d^2 s_3}{dt^2} &= -a^2 s_3 - 2a_1 s_1 s_2\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Die Integration der ersten Gleichung giebt

$$s_1 = A \sin at + B \cos at \tag{29}$$

wodurch die zweite übergeht in

$$\frac{d^2 s_2}{dt^2} = -a^2 s_2 - a_1 \left\{A^2 \sin^2 at + B^2 \cos^2 at + 2AB \sin at \cos at\right\}$$

Durch Anwendung der Reduktionsformeln für die Überführung von Produkten auf Summen der trigonometrischen Funktionen wird dies

$$\frac{d^2 s_2}{dt^2} = -a^2 s_2 - a_1 \left\{\tfrac{1}{2}(A^2 + B^2) - \tfrac{1}{2}(A^2 - B^2) \cos 2at + AB \sin 2at\right\} \tag{30}$$

welche sich nun einfach durch Versuche integrieren läſst. Man erhält

$$s_2 = M \sin at + N \cos at + P \sin 2at + Q \cos 2at + R \tag{31}$$

und findet durch Rücksubstitution in die Gleichung (30) die Beziehungen

$$P = \frac{a_1}{3a^2} AB,\; Q = \frac{a_1}{6a^2}(B^2 - A^2),\; R = -\frac{a_1}{2a^2}(A^2 + B^2) \tag{32}$$

Kann man die dritte Potenz der kleinen Gröſse ε schon vernachlässigen, so kommt unter Berücksichtigung von (27), (29), (31) und (32) als Integral der vorgelegten Differentialgleichung

$$\begin{aligned}s &= \varepsilon(A \sin at + B \cos at)\\ &+ \varepsilon^2 \left\{M \sin at + N \cos at + \frac{a_1}{3a^2} AB \sin 2at + \frac{a_1}{6a^2}(B^2 - A^2) \cos 2at - \frac{a_1}{2a^2}(A^2 + B^2)\right\}\end{aligned} \tag{33}$$

in welcher A, B, M, N die willkürlichen Konstanten bedeuten.

Es ist leicht einzusehen, daſs die in dem angeregten Sinne weitergeführten Substitutionen die stets höheren Multipla der Schwingungszahlen ergeben. Da ein Körper um so elastischer genannt wird, eine je kleinere Deformation einer gegebenen Druck- oder Zugkraft entspricht, so können wir das Gefundene dahin aussprechen:

Je mehr sich ein Körper dem elastischen Zustande nähert, desto mehr und desto höhere Vielfache der Schwingungen werden durch die Eigenschwingung angeregt.

d) Wir wollen nun noch einen sehr allgemeinen Fall betrachten, auf den wir später auch in andern Anwendungen noch mehrmals werden zurückgreifen müssen: die mathematische Theorie der Fluoreszenz, allgemein des Mitschwingens.

Wir nehmen an, auf ein schwingendes Medium, dessen der Schwingungsgeschwindigkeit proportionaler Widerstand für die Einheit der Masse und der Geschwindigkeit 2ε betrage, wirke eine für die Masseneinheit durch

$$f(t) = \sum P \sin(pt + \beta)$$

gegebene periodische Kraft ein. Die allgemeine Differentialgleichung dieser Erscheinung ist dann:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -a^2 s_t - a_1 s^2 - 2\varepsilon \frac{ds}{dt} + \sum P \sin(pt+\beta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

wenn man bei Gliedern zweiter Ordnung der Elongation stehen bleibt. Setzt man ähnlich wie früher

$$s = \eta s_1 + \eta^2 s_2,\ P\cos\beta = Q = Q'\eta,\ P\sin\beta = R = R'\eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

so wird, wenn η^3 als verschwindend Kleines der sehr kleinen Gröfse η vorausgesetzt wird, aus der allgemeinen Differentialgleichung das folgende System von explizit simultanen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2s_1}{dt^2} &= -a^2 s_1 - 2\varepsilon \frac{ds_1}{dt} + \sum Q' \sin pt + \sum R' \cos pt \\ \frac{d^2s_2}{dt^2} &= -a^2 s_2 - a_1 s_1{}^2 - 2\varepsilon \frac{ds_2}{dt} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Das Integral der ersten Gleichung ist in der Form enthalten:

$$s_1 = e^{\alpha t} + \sum Q'' \sin pt + \sum R'' \cos pt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

mit den durch die Rücksubstitution in die erste Gleichung (36) folgenden Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 &= -a^2 - 2\varepsilon\alpha \text{ oder } \alpha = -\varepsilon \pm \sqrt{a^2-\varepsilon^2}\,.\,i \\ -p^2 Q'' &= -a^2 Q'' + 2\varepsilon p R'' + Q' \\ -p^2 R'' &= -a^2 R'' + 2\varepsilon p Q'' + R' \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

wonach sich (37) verwandelt in:

$$\begin{aligned} s_1 &= e^{-\varepsilon t}\left\{A \sin \varkappa t + B \cos \varkappa t\right\} + \sum Q'' \sin pt + \sum R'' \cos pt, \\ Q'' &= \frac{P}{\eta}\,\frac{(a^2-p^2)\cos\beta + 2\varepsilon p \sin\beta}{(a^2-p^2)^2 + (2\varepsilon p)^2},\ R'' = \frac{P}{\eta}\,\frac{(a^2-p^2)\sin\beta - 2\varepsilon p\cos\beta}{(a^2-p^2)^2+(2\varepsilon p)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39) \\ &\sqrt{a^2-\varepsilon^2} = \varkappa \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung des Systems (36) wird sonach, indem man die Quadrate und Produkte der trigonometrischen Funktionen sogleich auf einfache Funktionen reduziert:

$$\begin{aligned} \frac{d^2s_2}{dt^2} = -a^2 s_2 - 2\varepsilon \frac{ds_2}{dt} - a_1 \Big\{ & e^{-2\varepsilon t}\left[\tfrac{1}{2}(A^2+B^2) + \tfrac{1}{2}(B^2-A^2)\cos 2\varkappa t + AB \sin 2\varkappa t\right] \\ & + \tfrac{1}{2}\left(\sum Q''^2 + \sum R''^2\right) + \tfrac{1}{2}\left(\sum R''^2 \cos 2pt - \sum Q''^2 \cos 2pt\right) \\ & + \sum Q''R'' \sin(p+p)t + \sum Q''R'' \sin(p-p)t \\ & + e^{-\varepsilon t}\Big[\sum AQ'' \cos(\varkappa-p)t + \sum BR'' \cos(\varkappa-p)t + \sum AR'' \sin(\varkappa-p)t \\ & - \sum BQ'' \sin(\varkappa-p)t - \sum AQ'' \cos(\varkappa+p)t + \sum BR'' \cos(\varkappa+p)t \\ & + \sum AR'' \sin(\varkappa+p)t + \sum BQ'' \sin(\varkappa+p)t\Big]\Big\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40) \end{aligned}$$

In den Summen $\sum Q''R'' \sin(p \pm p)t$ müssen natürlich nur verschiedene Indizes genommen werden, da die gleichen schon berücksichtigt worden sind.

Um nun diese Gleichung nicht durch Versuche lösen zu müssen, was jedenfalls sehr umständlich wäre, schreiben wir statt der rechten Klammergröfse kurzweg $\varphi(t)$, und erhalten so als Integral der Gleichung:

$$\frac{d s}{dt^2} = - a s - 2\varepsilon \frac{ds}{dt} - a_1 \varphi(t)$$

den Ausdruck

$$s_- = \frac{1}{2\varkappa i} \left\{ e^{-(\varepsilon+\varkappa i)t} \int e^{(\varepsilon+\varkappa i)t} \varphi(t)dt - e^{-(\varepsilon-\varkappa i)t} \int e^{(\varepsilon-\varkappa i)t} \varphi(t)dt \right\}$$

Die hier auftretenden Integrale haben die Form

$$I_{,} = \int e^{(\alpha+\beta i)t} \sin mt \; dt = \frac{e^{(\alpha+\beta i)t}}{(\alpha+\beta i)^2 + m} [(\alpha+\beta i) \sin mt - m \cos mt]$$

$$I_{,,} = \int e^{(\alpha+\beta i)t} \cos mt \; dt = \frac{e^{(\alpha+\beta i)t}}{(\alpha+\beta i) + m} [(\alpha+\beta i) \cos mt + m \sin mt]$$

Führt man nun die Integration direkt aus was keine Schwierigkeiten mehr verursacht so erhält man folgendes

$$s_2 = e^{-\varepsilon t} \left\{ \mathfrak{A} \sin \varkappa t + \mathfrak{B} \cos \varkappa t \right\} - \frac{a_1}{2a} \sum (Q'' + R') + e^{-\varepsilon t} \left\{ - \frac{a_1}{2a}(A + B) + C \cos 2\varkappa t + D \sin 2\varkappa t \right\}$$
$$+ E \cos 2pt + F \sin 2pt + G \sin (p+p)t + H \cos (p+p)t + I \sin (p-p)t + K \cos (p-p)t$$
$$+ e^{-\varepsilon t} \left\{ L \sin (\varkappa - p)t + M \cos (\varkappa - p)t + N \sin (\varkappa + p)t + O \cos (\nu + p)t \right\} \quad (41)$$

wobei die Koeffizienten aus den folgenden Gleichungen zu berechnen sind

$$\left.\begin{aligned}
C[(a^2 - 4\varkappa) + (4\varepsilon\varkappa)^2] &= 4a_1\varepsilon\nu AB - \frac{a_1}{2}(a - 4\varkappa^2)(B - A) \\
D[(a^2 - 4\varkappa) + (4\varepsilon\varkappa)^2] &= 2a_1\varepsilon\varkappa(B - A) - a_1(a - 4\varkappa^2)AB \\
E[(a^2 - 4p) + (4\varepsilon p)] &= 2a_1\varepsilon p R_{,} Q_{,} - \frac{a_1}{2}(a - 4p)(R' - Q') \\
F[(a^2 - 4p) + (4\varepsilon p)^2] &= -2a_1\varepsilon p(R' - Q) - \frac{a_1}{2}(a - 4p^2)R_{,}' Q_{,}' \\
G[(a^2 - (p+p)) + (2\varepsilon(p+p))] &= -\frac{a_1}{2}[a - (p+p)]Q'R \\
H[(a - (p+p)^2) + (2\varepsilon(p+p))] &= -a_1\varepsilon(p+p)Q' R' \\
I[(a - (p-p)^2) + (2\varepsilon(p-p))^2] &= -\frac{a_1}{2}[a^2 - (p-p)]Q R \\
K[(a - (p-p)^2)^2 + (2\varepsilon(p-p))] &= -a_1\varepsilon(p-p)Q R' \\
L[(\nu - (\varkappa-p)^2)^2 + (2\varepsilon(\varkappa-p))] &= 2a_1\varepsilon(\varkappa-p)(AQ'' + BR') \\
&\quad - [\varkappa - (\varkappa-p)]a_1(AR - BQ) \\
M[(\nu - (\nu-p)^2) + (2\varepsilon(\varkappa-p))] &= -2a_1\varepsilon(\varkappa-p)(AR' - BQ') \\
&\quad - a_1[\varkappa - (\nu-p)](AQ + BR) \\
N[(\varkappa - (\nu+p)) + (2\varepsilon(\nu+p))] &= 2a_1\varepsilon(\varkappa+p)(-AQ + BR'') \\
&\quad - a_1[\varkappa - (\nu+p)^2](AR' + BQ) \\
O[(\varkappa^2 - (\varkappa+p)^2) + (2\varepsilon(\varkappa+p))] &= -2a_1\varepsilon(\nu+p)(AR + BQ) \\
&\quad - a_1[\nu^2 - (\nu+p)^2](-AQ + BR
\end{aligned}\right\} \quad (42)$$

Die Amplituden aller Schwingungen, welche A und B enthalten, bleiben unbestimmt während in den übrigen Q und R nach (39) durch P ersetzt werden muſs Ist dies erfolgt, so hat man noch die Gleichungen (41) und (39) in (35) einzusetzen, um das vollständige Integral zu erhalten

Fällt aber auf einen Körper, der selbst zu schwingen fähig ist die Strahlung eines andern Körpers, so sehen wir neue Schwingungen entstehen, die eine Verbindung

beider bilden. Wir nennen solche Schwingungen Kombinationsschwingungen, und zwar von der n-ten Ordnung, wenn die Schwingungszahlen durch Addition oder Subtraktion der n-ten Vielfachen der Grundschwingungen entstanden; in diesem Falle reden wir von Differenz-, in jenem von Summationsschwingungen. Die Schwingung $\sin \varkappa t$, welche dem Körper angehört, wird Eigenschwingung genannt.

Schwingt also ein Teilchen mit der Wellenlänge $\frac{2\pi c}{\varkappa}$ und fällt auf ihn eine Strahlung von der Wellenlänge $\frac{2\pi c}{p}$, so werden im Körper allgemein noch die folgenden Wellen erregt: $\frac{2\pi c}{2\varkappa}$, $\frac{2\pi c}{2p}$, $\frac{2\pi c}{p_r \pm p_s}$, $\frac{2\pi c}{\varkappa \pm p_s}$. Betrachtet man die Intensität des auffallenden Strahles als eine Gröſse nullter Ordnung, so wird die Intensität der Kombinationsschwingung erster Ordnung eine Gröſse zweiter, der Kombination n-ter Ordnung eine Gröſse $2n$-ter Ordnung werden.

Diese Gleichung nun ist es, welche alle Erscheinungen des Mitschwingens erklärt. Ist die auffallende Welle — die man sich bei veränderlichem p auch als Strahlenkomplex vorstellen kann, so beschaffen, daſs sie auſserhalb des sichtbaren Spektrums fällt, so kann für den Fall des Ultraviolets die Kombination $\varkappa - p$, $p_r - p_s$, für den Fall des ultraroten Lichtes die Verbindung $\varkappa + p$, $p_r + p_s$ sichtbar werden, und wir haben somit die Erscheinungen der Fluorenszenz und Kaloreszenz. Fluoreszenz ist Differenz-, Kaloreszenz Summationsschwingung. In hohem Grade auffallend wird es sein, daſs die Kombinationsschwingungen des auffallenden Lichtes unter einander im Körper keinen Widerstand erfahren, mit keinem Extinktionskoeffizienten versehen sind, wie man zu sagen pflegt. Während also die Eigenschwingung des Körpers, sowie deren alle denkbaren Kombinationen unter sich und mit den ankommenden Strahlen infolge des bei allen Körpern ziemlich beträchtlichen Widerstandes bald erlöschen müssen, wenn die Ursache der Schwingung nicht fortdauernd wirkt, bleiben die Kombinationen der ankommenden Wellen unter sich ungeschwächt. Sind es also diese, welche die Fluoreszenz bewirken, so geht diese in Phosphoreszenz, die sich von jener Erscheinung durch die längere Dauer unterscheidet, über.

Da der Widerstand des Mediums gegen die durch die Elongation geweckte Elastizitätskraft nur klein sein kann, $\varkappa^2$ sich also wenig von a^2 unterscheidet, so kann es vorkommen, daſs die Intensitäten der im Körper neu angeregten Schwingungen nahezu unendlich groſs werden. Dies wird für alle Strahlen der Fall sein, wenn die Wellenlänge der ankommenden Welle mit der Eigenschwingung identisch ist (39); es wird dann Q'' und R'' unendlich, und damit alle Koeffizienten (42), die diese beiden Faktoren enthalten. Die Intensität wird unendlich, heiſst aber soviel, daſs das schwingende Atom aus dem Molekularverbande gerissen wird. Es entstehen dabei unregelmäſsige Schwingungen, die nicht mehr der Bewegung der lichterzeugenden analog sind, die Welle ist als Licht verbraucht, wir sagen, sie ist absorbiert.[1] Diese Art der Absorption wird die direkte genannt. Absorption — und diese werden wir die indirekte nennen — tritt aber auch dann noch ein, wenn die auffallende Welle die nächst höhere

[1] Lommel, Pogg. Ann. 143.

oder tiefere Oktave der Eigenschwingung darstellt, wie man aus der bloſsen Ansicht der Koeffizienten (42) entnehmen kann. Offenbar kann aber die Absorption nicht die durch die Gleichung angedeutete Groſse annehmen, wir durfen nicht vergessen, daſs die Schwingungsgleichung nur fur unendlich kleine Elongationen gilt, die nicht mehr ohne weiteres vorausgesetzt werden durfen, wenn eine auſsere Strahlung die Ausbiegung des Teilchens in jedem Punkte der Bahn kontinuierlich zu vergroſsern strebt, wie es eben eine mit der Eigenschwingung identische Schwingung anstrebt.

Im Falle der indirekten Absorption wird stets die Eigenschwingung verstärkt, da zwar die eintretende Welle absorbiert wird, die Wellenlänge dieser absorbierten Strahlung stets der der Eigenschwingung gleich wird, so daſs Superposition entsteht.

Es ist leicht zu sehen, daſs fortgefuhrte Substitutionen und Mitnehmen hoherer Glieder der Elongation nach einander die Kombinationsschwingungen hoherer Ordnung hervorbringen werden.

Interferenz der Schwingungen

e) Es mogen nun die Veranderungen untersucht werden, die ein schwingendes Teilchen erleidet, wenn es von zwei Strahlen getroffen wird, welche in derselben Richtung schwingen. Sind die ankommenden Strahlen durch die Gleichungen gegeben

$$s_1 = a_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right), \quad s_2 = a_2 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{\delta}{\lambda}\right) \tag{43}$$

in welcher δ den Überschuſs der Entfernung der Lichtquelle s_2 vom schwingenden Punkte uber die der Quelle s_1 bedeutet. Die resultierende Schwingung

$$S = s_1 + s_2 \tag{44a}$$

hat, da bekanntlich die goniometrischen Funktionen ein Additionstheorem besitzen, wieder die Form der einfachen Schwingung. Wir setzen also

$$S = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{\Delta}{\lambda}\right) \tag{44b}$$

und finden leicht folgende Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} a_2 \cos 2\pi\frac{\delta}{\lambda} + a_1 &= A \cos 2\pi\frac{\Delta}{\lambda} \\ a_2 \sin 2\pi\frac{\delta}{\lambda} &= A \sin 2\pi\frac{\Delta}{\lambda} \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

daher

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos 2\pi\frac{\delta}{\lambda}, \quad \operatorname{tang} 2\pi\frac{\Delta}{\lambda}\left[a_1 + a_2 \cos 2\pi\frac{\delta}{\lambda}\right] = a_2 \sin 2\pi\frac{\delta}{\lambda},$$

welche die neue Amplitude und die Phasenverschiebung zu berechnen gestatten. Ganz dieselben Formeln erhalt man naturlich, wenn man statt der Amplituden die Schwingungsgeschwindigkeiten einfuhrt. Ist diese durch u, ihr Maximalwert durch v bezeichnet, so ubergeht (43) bei nun veranderter Zahlungsweise der Zeit in

$$u = v \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \tag{46}$$

die naturlich fur die Interferenzschwingung ganz analoge Formeln liefert.

Wir setzen in den obigen Formeln $\delta = \frac{\lambda}{4}$, dann erhalten wir

$$S = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\, \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x+D}{\lambda}\right), \quad \operatorname{tang} 2\pi\frac{D}{\lambda} = \frac{a_2}{a_1} \tag{47}$$

Ist nun umgekehrt eine Wellenbewegung gegeben durch:

$$U = V \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x+D}{\lambda}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (48)$$

so kann dieselbe stets in zwei Schwingungen zerlegt werden, deren Gleichungen sind:

$$u = v \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),\ u_1 = v_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{1}{4}\right) = - v_1 \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad (49)$$

die also den Phasenunterschied $\frac{\lambda}{4}$ haben. Es ist also auch weiter:

$$\left.\begin{array}{l} V^2 = v^2 + v_1^2,\ \operatorname{tang} 2\pi \frac{D}{\lambda} = \frac{v_1}{v} \\ \text{und} \quad v_1 = V \sin 2\pi \frac{D}{\lambda},\ v = V \cos 2\pi \frac{D}{\lambda} \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (50)$$

Wir stellen uns nun die Aufgabe die Resultierende mehrerer parallelen, ähnlichen und nach derselben Richtung schwingenden Wellensysteme zu bestimmen. Sind die Oszillationsgeschwindigkeiten der $n+1$ einzelnen Schwingungen gegeben durch:

$$\left.\begin{array}{l} U_1 = V_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{a_1}{\lambda}\right) = V_1 \sin(\alpha - \gamma_1) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ U_{n+1} = V_{n+1} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{a_{n+1}}{\lambda}\right) = V_{n+1} \sin(\alpha - \gamma_{n+1}) \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (51)$$

so kann jede derselben in zwei Schwingungen zerlegt gedacht werden, deren Phasendifferenz $\frac{1}{4}$ Wellenlänge beträgt. Dies giebt:

$$U_r = v_r \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + v_r' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{1}{4}\right) \quad \ldots \quad (52a)$$

oder abgekürzt:

$$\left.\begin{array}{l} U_1 = v_1 \sin \alpha + v_1' \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ U_{n+1} = v_{n+1} \sin \alpha + v'_{n+1} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (52b)$$

und dabei ist dann

$$v_r' = V_r \cos 2\pi \frac{a_r}{\lambda} = V_r \cos \gamma_r;\ v_r' = V_r \sin 2\pi \frac{a_r}{\lambda} = V_r \sin \gamma_r \quad \ldots \quad (53)$$

Summiert man über alle vorkommenden $n+1$ Schwingungen, so wird

$$\sum U = \sum v_r \sin \alpha + \sum v_r' \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \quad \ldots \ldots \quad (54)$$

als Gleichung der Resultierenden. Um diese auf die übliche Form zu bringen, setzen wir:

$$\sum U = \Phi \sin(\alpha - \varphi) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (55)$$

und erhalten somit durch Vergleichung der Koeffizienten von $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ in beiden Ausdrücken für U:

$$\left.\begin{array}{l} \Phi \cos \varphi = \sum v_r \\ \Phi \sin \varphi = \sum v'_r \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (56)$$

Daraus folgt dann sogleich als Ausdruck der resultierenden Schwingung:

$$\sum U = \sqrt{\left(\sum v_i\right)^2 + \left(\sum v_i\right)^2}\,\sin\left[\alpha - \operatorname{arctang}\frac{\sum v_i}{\sum v_i}\right] \tag{57}$$

Diese Resultate wollen wir nun auf einige Spezialfälle anwenden.

1. Sind die Oscillationsgeschwindigkeiten alle gleich, so hat man wegen

$$V_1 = V_2 = \ldots = V_{n+1} = V \tag{58}$$

$$\sum v_i = V \sum \cos\gamma_i,\quad \sum v_i = V\sum \sin\gamma_i,\quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\sum \sin\gamma_i}{\sum\cos\gamma_i}$$

als Schwingungsgleichung die Formel

$$\sum U = V\sqrt{\left(\sum \sin\gamma_i\right)^2 + \left(\sum\cos\gamma_i\right)^2}\,\sin\left[\alpha - \operatorname{arctang}\frac{\sum\sin\gamma_i}{\sum\cos\gamma_i}\right] \tag{59}$$

2. Sind außer der bereits gemachten Annahme auch die gleichzeitigen Phasen der Schwingungen gleich, ist also noch

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_{n+1} = \gamma \tag{60}$$

so hat man einfach

$$\sum U = (n+1)\,V\sin(\alpha - \gamma) \tag{61}$$

3. Sind die Oszillationsgeschwindigkeiten gleich, und bilden die gleichzeitigen Phasen eine arithmetische Progression, so daß ist

$$\gamma_1 = \gamma,\quad \gamma_2 = \gamma + \varepsilon,\quad \gamma_3 = \gamma + 2\varepsilon,\quad \ldots\quad \gamma_{n+1} = \gamma + n\varepsilon \tag{62}$$

so handelt es sich um die Darstellung der Summen $\sum \sin\gamma_i$ und $\sum\cos\gamma_i$. Zu dem Ende setzen wir etwas allgemeiner

$$\left.\begin{aligned} A &= \sin x + a\sin(x-y) + a^2\sin(x-2y) + \ldots + a^{n-1}\sin(x-(n-1)y) \\ B &= \cos x + a\cos(x-y) + a^2\cos(x-2y) + \ldots + a^{n-1}\cos(x-(n-1)y) \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

Addiert man die beiden Gleichungen, nachdem zuvor die erste mit der imaginären Einheit multipliziert wurde, so kommt

$$B + Ai = e^{xi} + a e^{xi-yi} + a^2 e^{xi-2yi} + \ldots + a^{n-1} e^{xi-(n-1)yi} = e^{xi}\,\frac{(a e^{-yi})^n - 1}{a e^{-yi} - 1} \tag{64}$$

Multipliziert man Zähler und Nenner mit $a e^{+yi} - 1$, so erhält man die folgende Gleichung

$$B + Ai = \frac{e^{xi} - a e^{yi+xi} - a^n e^{-nyi+xi} + a^{n+1} e^{-(n-1)yi+xi}}{1 - 2a\cos y + a^2} \tag{65}$$

Ersetzt man die Exponentialgrößen wieder durch die trigonometrischen Funktionen und trennt sogleich Reelles vom Imaginären, so kommt

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1-2a\cos y + a^2}\left\{\sin x - a\sin(x+y) - a^n\sin(x-ny) + a^{n+1}\sin(x-(n-1)y)\right\} \\ B &= \frac{1}{1-2a\cos y + a^2}\left\{\cos x - a\cos(x+y) - a^n\cos(x-ny) + a^{n+1}\cos(x-(n-1)y)\right\} \end{aligned} \tag{66}$$

Für unsern Fall vereinfachen sich die Formeln noch um ein Beträchtliches, da $a = 1$ zu setzen ist. Man erhält so einfacher

$$A = \frac{1}{2 - 2\cos y}\left\{[\sin x - \sin(x-ny)](1-\cos y) - \sin y[\cos x - \cos(x-ny)]\right\}$$

und nach einer leichten Reduktion

$$A = \frac{\sin \frac{n}{2} y}{\sin \frac{1}{2} y} \sin\left(x - \frac{n-1}{2} y\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (67a)$$

und auf ganz entsprechende Weise auch:

$$B = \frac{\sin \frac{n}{2} y}{\sin \frac{1}{2} y} \cos\left(x - \frac{n-1}{2} y\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (67b)$$

Um das Resultat unserem vorliegenden Falle anzupassen, setzen wir

$$x = \gamma, \ y = -\varepsilon, \ a = 1, \ n = (n^1 + 1)$$

und erhalten so statt n^1 wieder n schreibend:

$$\sum \cos \gamma_r = \frac{\sin \frac{n+1}{2} \varepsilon}{\sin \frac{1}{2} \varepsilon} \cos\left(\gamma + \frac{n}{2} \varepsilon\right), \ \sum \sin \gamma_r = \frac{\sin \frac{n+1}{2} \varepsilon}{\sin \frac{1}{2} \varepsilon} \sin\left(\gamma + \frac{n}{2} \varepsilon\right) \quad . \quad (68)$$

Damit wird dann weiter:

$$\left(\sum \sin \gamma_r\right)^2 + \left(\sum \cos \gamma_r\right)^2 = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} \varepsilon}{\sin^2 \frac{1}{2} \varepsilon} \ \text{und} \ \frac{\sum \sin \gamma_r}{\sum \cos \gamma_r} = \operatorname{tang}\left(\gamma + \frac{n}{2} \varepsilon\right) . \ . \quad (69)$$

und sonach die explizite Schwingungsgleichung der Resultierenden:

$$\sum U = V \frac{\sin \frac{n+1}{2} \varepsilon}{\sin \frac{1}{2} \varepsilon} \sin\left[\alpha - \left(\gamma + \frac{n}{2} \varepsilon\right)\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (70)$$

4. Endlich läfst sich die Resultierende auch dann noch aufschreiben, wenn die γ wie zuvor eine arithmetische Progression bilden, zugleich aber auch die Beziehung besteht:

$$U_r = V \sin a_r \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (71)$$

wo nun auch die Gröfsen a Glieder einer arithmetischen Pregression sind. Es sei also

$$a_1 = a, \ a_2 = a + \delta, \ a_3 = a + 2\delta, \ .. \ a_{n+1} = a + n\delta \quad \ldots \ldots \quad (72)$$

Dann ist

$$\sum v_r = V \sum \sin a_r \cos \gamma_r, \ \sum v_r' = V \sum \sin a_r \sin \gamma_r,$$

was mit Hilfe der trigonometrischen Formeln

$$\sin x \cos y = \tfrac{1}{2} \sin(y + x) - \tfrac{1}{2} \sin(y - x), \ \ \sin x \sin y = -\tfrac{1}{2} \cos(y + x) + \tfrac{1}{2} \cos(y - x)$$

das folgende Ergebnis liefert:

$$\sum v_r = \tfrac{1}{2} V \left\{ \sum \sin(\gamma_r + a_r) - \sum \sin(\gamma_r - a_r) \right\}; \ \sum v'_r = \tfrac{1}{2} V \left\{ -\sum \cos(\gamma_r + a_r) + \sum \cos(\gamma_r - a_r) \right\} \quad . \quad (73)$$

Die Argumente $(\gamma_r + a_r)$, $(\gamma_r - a_r)$ bilden wieder eine arithmetische Progression mit den Differenzen $(\varepsilon + \delta)$, $(\varepsilon - \delta)$ Man hat also nach dem vorigen Satze:

$$\sum v_r = \tfrac{1}{2} V \left\{ \frac{\sin \frac{n+1}{2} (\varepsilon + \delta)}{\sin \frac{1}{2} (\varepsilon + \delta)} \sin\left[\gamma + a + \frac{n}{2} (\varepsilon + \delta)\right] - \frac{\sin \frac{n+1}{2} (\varepsilon - \delta)}{\sin \frac{1}{2} (\varepsilon - \delta)} \sin\left[\gamma - a + \frac{n}{2} (\varepsilon - \delta)\right] \right. \quad \ldots \ldots \quad (74)$$

$$\sum v'_r = \tfrac{1}{2} V \left\{ - \frac{\sin \frac{n+1}{2} (\varepsilon + \delta)}{\sin \frac{1}{2} (\varepsilon + \delta)} \cos\left[\gamma + a + \frac{n}{2} (\varepsilon + \delta)\right] + \frac{\sin \frac{n+1}{2} (\varepsilon - \delta)}{\sin \frac{1}{2} (\varepsilon - \delta)} \cos\left[\gamma - a + \frac{n}{2} (\varepsilon - \delta)\right] \right.$$

und mit diesen Werten wird endlich:

$$\sum U = \tfrac{1}{2} V \left\{ \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}(\varepsilon+\delta)}{\sin^2 \frac{1}{2}(\varepsilon+\delta)} + \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}(\varepsilon-\delta)}{\sin^2 \frac{1}{2}(\varepsilon-\delta)} - 2\, \frac{\sin \frac{n+1}{2}(\varepsilon+\delta)}{\sin \frac{1}{2}(\varepsilon+\delta)} \, \frac{\sin \frac{n+1}{2}(\varepsilon-\delta)}{\sin \frac{1}{2}(\varepsilon-\delta)} \cos(2a+n\delta) \right\}^{\frac{1}{2}} \sin(\alpha-\varphi) \tag{75}$$

$$\varphi = \text{arctang} \frac{\sum v_i}{\sum v_r}$$

f) Wir behandeln endlich noch den Fall, daſs zwei zu einander geneigte Schwingungen gleichzeitig auf einen Punkt einwirken Dieselben seien durch die folgenden Gleichungen gegeben

$$x = r_1 \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad \text{und} \quad y = r_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + n\right) \tag{76}$$

Dann erhalt man die von dem angeregten Punkte durchlaufene Bahnkurve, wenn man aus beiden Gleichungen die Zeit t eliminiert Explizite ist dies stets moglich, wenn die Schwingungsperioden zu einander im Verhaltnis ganzer Zahlen stehen

Wir behandeln hier nur den einfachen Fall

$$T^1 = T \tag{77}$$

den wir in spateren Untersuchungen noch zu benutzen haben Wir entwickeln

$$y = r_2 \sin 2\pi \frac{t}{T} \cos 2n\pi + r_2 \cos 2\pi \frac{t}{T} \sin 2n\pi \tag{78}$$

und substituieren darin die aus der ersten Gleichung (76) sich ergebenden Werte

$$\sin 2\pi \frac{t}{T} = \frac{x}{r_1}, \quad \cos 2\pi \frac{t}{T} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{r_1^2}} \tag{79}$$

wodurch man erhalt

$$y = \frac{r_2}{r_1} x \cos 2n\pi + \frac{r_2}{r_1} \sqrt{r_1^2 - x^2} \sin 2n\pi,$$

was auch in folgender Form geschrieben werden kann

$$y^2 - 2 \frac{r_2}{r_1} xy \cos 2n\pi + \frac{r_2^2}{r_1^2} x^2 = r_2^2 \sin^2 2n\pi \tag{80}$$

Die Gleichung charakterisiert eine Ellipse, die Lage der Hauptaxen gegen die Schwingungsrichtungen, die wir nun gegeneinander senkrecht liegend annehmen, ist gegeben durch

$$\text{tang}\, 2\omega = \frac{2 r_1 r_2}{r_1^2 - r_2^2} \cos n\pi \tag{81}$$

Bemerkenswerte Spezialfalle sind

1 Fur $n = 0\ 1, 2$ wird die Gleichung der Bahnkurve

$$y^2 - 2 \frac{r_2}{r_1} xy + \frac{r_2^2}{r_1^2} x^2 = 0 = \left(y - \frac{r_2}{r_1} x\right)^2 \tag{82}$$

die in diesem Falle eine durch die Gleichgewichtslage des schwingenden Teilchens hindurchgehende Gerade vorstellt Eben diese Gerade, die jedoch mit der fruheren gegen die negative Seite der y Elongationen den Winkel $\text{arctg} \frac{r_1 r_2}{r_1^2 - r_2^2}$ einschlieſst, erhalt man, wenn

2. Für $n = 1.\frac{1}{2}$, $3.\frac{1}{2}$, $5.\frac{1}{2}\ldots$ gesetzt wird. Die Gleichung der Linie ist

$$\left(y + \frac{r_2}{r_1} x\right)^2 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (83)$$

die sich wie die frühere auf beiden Seiten der Gleichgewichtslage gleicherweise erstreckt.

3. Ist endlich $n = \frac{1}{4}(2m+1)$, wo m beliebige ganze Zahlen bedeutet, also $n = \frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}\ldots$ so wird

$$y^2 + \frac{r_2^2}{r_1^2} x^2 = r_2^2, \text{ oder } \frac{y^2}{r_2^2} + \frac{x^2}{r_1^2} = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (84)$$

die Schwingungskurve eine Ellipse, deren Mittelpunkt mit dem Gleichgewichtspunkte des schwingenden Teilchens zusammenfällt. Die Schwingungsrichtungen sind dann ganz allgemein ein Paar konjugierter Durchmesser der Ellipse. Sind endlich die Amplituden der beiden interferierenden Schwingungen gleich, so geht die Ellipse, wie man sogleich sieht, in einen Kreis über.

Wir haben nun noch die Intensität der Interferenzschwingung zu untersuchen, da ja die Wellenlänge unverändert geblieben ist. Dieselbe ist nach (45) und (43) proportional der Gröfse:

$$L = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (85)$$

während die Intensitäten der interferierenden Strahlen durch

$$L_1 = a_1^2, \; L_2 = a_2^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (86)$$

gegeben sind. Nun mufs aber angenommen werden, dafs für zwei verschiedene Lichtquellen selbst in unmefsbar kurzer Zeit $\frac{\delta}{\lambda}$ alle Werte von 0 bis 1 durchläuft, statt $\cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$ also, handelt es sich um eine endliche Beobachtungszeit, der Mittelwert $= 0$ gesetzt werden mufs. Damit hat man dann den Satz:

$$L = L_1 + L_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (87)$$

Die Intensitäten zweier interferierenden Strahlen verschiedener Lichtquellen summieren sich einfach.

Legt man durch die Ruhelage des nach der Gleichung

$$s = r \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (88)$$

schwingenden Teilchens drei zu einander senkrechte Koordinaten, welche mit der Richtung x, der Normalen zur Wellenfläche Winkel einschliefsen, deren Cosinusse sind m, n, p, so werden die Koordinaten des schwingenden Teilchens x^1, y^1, z^1 die Projektionen von x auf die neuen Axen, also

$$x^1 = mx, \; y^1 = nx, \; z^1 = px \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (89)$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit m, n, p, indem man die bekannte Cosinusrelation

$$m^2 + n^2 + p^2 = 1$$

beachtet, so verwandelt sich (88) in

$$s = r \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{mx^1 + ny^1 + pz^1}{\lambda}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (90)$$

Sind endlich α, β, γ die Cosinusse der Winkel, welcher die Elongation s mit den Axen x^1, y^1, z^1 bildet, so zerlegt sich die gegebene Schwingung in die folgenden, nach den neuen Axen genommenen Komponenten:

$$
\left.\begin{aligned}
u &= \alpha r \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{mx^1 + ny^1 + pz^1}{\lambda}\right)\\
v &= \beta r \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{mx^1 + ny^1 + pz^1}{\lambda}\right)\\
w &= \gamma r \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{mx^1 + ny^1 + pz^1}{\lambda}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{91}
$$

und wir bezeichnen mit dem Namen Richtung den Winkel, welchen die Richtung der Elongation mit der zur Wellenfläche gezogenen Normalen einschliefst Ist dieser ϑ genannt, so hat man

$$\cos\vartheta = \alpha m + \beta n + \gamma p \tag{92}$$

wo $\vartheta = 90^0$ oder 0^0 ist, je nachdem die Schwingung senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung, oder parallel derselben vor sich geht Im ersteren Falle nennen wir die Schwingung transversal, im letzteren longitudinal Wir werden später den Nachweis liefern, dafs die Schwingungen, welche der Äther als Licht vermittelt, nur transversale sind

2 Schwingungen kohärenter Punktsysteme

Indem wir auch die dem schwingenden Punkte benachbarten Teilchen in Betracht zogen, gelangten wir (20) zu der allgemeinen Gleichung der schwingenden Bewegung

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 s}{dx^2} \tag{93}$$

die längs einer mit der Dichtigkeit ϱ erfüllten Linie von der elastischen Kraft E Geltung hat c bedeutet die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwingung, und war als Quotient der Quadratwurzel aus Elastizitätsmodulus und Dichtigkeit gefunden

Setzen wir versuchsweise

$$s = u e^{\alpha t} \tag{94}$$

wo u eine Funktion von x allein sein mag, so erhält man durch Substitution in die gegebene Gleichung zur Bestimmung von u

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{\alpha^2}{c^2} u \tag{95}$$

aus welcher der Wert von u sogleich aufgeschrieben werden kann Mit (94) vereint, giebt dies dann als eine Lösung der vorgelegten Differentialgleichung

$$s = e^{\frac{\alpha}{c}x + \alpha t} \tag{96a}$$

oder da die durch die Gleichung charakterisierte Bewegung voraussichtlich eine periodische ist, durch Vertauschung von α gegen αi

$$s = \cos\left(\frac{\alpha}{c}x + \alpha t\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{c}x + \alpha t\right) \tag{96b}$$

Die Lösung befriedigt die Gleichung auch dann noch, wenn sowohl das Cosinus- als Sinusglied mit einem ganz beliebigen Koeffizienten versehen wird Als allgemeine Lösung haben wir somit

$$s = \left[A \sin\frac{\alpha}{c}x + B\cos\frac{\alpha}{c}x\right]\sin\alpha t + \left[C\sin\frac{\alpha}{c}x + D\cos\frac{\alpha}{c}x\right]\cos\alpha t \tag{96c}$$

wo an Stelle der Koeffizienten und für α eine jede beliebige Gröfse gesetzt werden kann

Physikalisch ist also die Lösung unbestimmt, es kämen denn genügend viele Nebenbedingungen hinzu, welche die Lösung möglich machen.

Dasselbe gilt auch noch von einer andern, formell noch allgemeineren Auflösung, die von d'Alembert herrührt. Man sieht auf den ersten Blick, daſs, was auch immer die Zeichen f und F für Funktionen charakterisieren mögen, der Ausdruck

$$s = f(x + ct) + F(x - ct) \quad \ldots \ldots \quad (96\mathrm{d})$$

die vorgelegte Differentialgleichung befriedigt.

Wir werden ihrer Wichtigkeit halber beide Lösungen näher besprechen, zunächst die erstere, die von Bernouilli herrührt. Da wir aber allgemein nur eine Punktreihe vor Augen haben, so müssen wir auch die Bedingungen, an welche physikalisch genommen die Koeffizienten gebunden sind, etwas allgemeiner halten.

Am Ende der Punktreihe, deren Länge a sein mag, ist die Elongation und Geschwindigkeit stets eine Funktion der Zeit allein; es sei also

$$\left.\begin{array}{l} s = 0, \ \dfrac{ds}{dt} = 0 \ \text{für} \ x = 0 \\ s = \varphi(t), \ \dfrac{ds}{dt} = \psi(t) \ \text{für} \ x = a \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (97\mathrm{a})$$

Die Voraussetzung der Ruhe für den Anfangspunkt der Linie ist keine Beschränkung, denn wäre hier Ausbiegung und Geschwindigkeit eine von Null verschiedene endliche Funktion der Zeit, so brauchte man nur die Linie umzukehren und die beiden Lösungen zu addieren, indem man statt $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ die neuen Funktionen einsetzt, statt x: $a - x$ schreibt und die Verdoppelung der so entstandenen Koeffizienten der Zeitfunktionen ($\sin \alpha t$, $\cos \alpha t$) berücksichtigt.

Für den Beginn der Zeit sei weiter Ausbiegung und Geschwindigkeit nur eine Funktion der Koordinate x:

$$s = \chi(x), \ \frac{ds}{dt} = \omega(x), \ \text{für} \ t = 0 \quad \ldots \ldots \quad (97\mathrm{b})$$

Endlich ist die Elongation aber so klein vorausgesetzt, daſs Veränderungen in der Elastizität und Dichte der Linie nicht berücksichtigt zu werden brauchen.

Wir lösen die Aufgabe am einfachsten, indem wir die Elongation in mehrere Teile zerlegen, die für sich einfacheren Bedingungen unterliegen, und die so gefundenen Partiallösungen kombinieren.

I. Es sei also zunächst:

$$s = \chi(x), \ \frac{ds}{dt} = \omega(x) \ \text{für} \ t = 0, \ s = 0, \ \frac{ds}{dt} = 0, \ \text{für} \ x = 0, \ s = 0, \ \frac{ds}{dt} = 0, \ \text{für} \ x = a \quad \ldots \quad (98)$$

Setzt man in (96c) $x = 0$, so muſs für den Nullwert der linken Seite sein:

$$B = D = 0, \ \frac{\alpha}{c} a = n\pi \ \text{oder} \ \alpha = n\pi \frac{c}{a} t \quad \ldots \ldots \quad (99)$$

und es ist somit die Elongation s gegeben durch:

$$s_1 = A \sin n\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{c}{a} t + C \sin n\pi \frac{x}{a} \cos n\pi \frac{c}{a} t \quad \ldots \quad (100)$$

für $t = 0$ hat man dann weiter gemäſs (98):

$$\chi(x) = \sum_1^\infty {}^n C_n \sin n\pi \frac{x}{a} \ \text{und} \ \omega(x) = \pi \frac{c}{a} \sum_1^\infty {}^n nA_n \sin n\pi \frac{x}{a} \quad \ldots \quad (101)$$

da ja für A und C alle möglichen Zahlenwerte gesetzt werden können. Entwickelt man aber andrerseits die Funktion $f(x)$ in eine Fouriersche Reihe, so erhält man das folgende Resultat

$$\chi(x) = \sum_1^\infty{}^m A_m \sin m\pi \frac{x}{a}, \quad A_m = \frac{2}{a}\int_0^a \chi(\lambda) \sin m\pi \frac{\lambda}{a}\, d\lambda$$

und demzufolge hat man auch

$$C_n = \frac{2}{a}\int_0^a \chi(\lambda) \sin n\pi \frac{\lambda}{a}\, d\lambda, \quad A_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^a \omega(\lambda) \sin n\pi \frac{\lambda}{a}\, d\lambda$$

Die vollständige Lösung ist also

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= \frac{2}{a}\sum_1^\infty{}^n \cos n\pi \frac{c}{a} t \sin n\pi \frac{x}{a}\int_0^a f(\lambda) \sin n\pi \frac{\lambda}{a}\, d\lambda \\ &+ \frac{2}{\pi c}\sum_1^\infty{}^n \frac{1}{n} \sin n\pi \frac{c}{a} t \sin n\pi \frac{x}{a}\int_0^a \omega(\lambda) \sin n\pi \frac{\lambda}{a}\, d\lambda \end{aligned}\right\} \tag{102}$$

II. Die Nebenbedingungen der vorgelegten Aufgabe seien

$$s = 0,\ s^1 = X(x) \text{ für } t = 0,\quad s = 0, s^1 = 0 \text{ für } x = 0,\quad s = \varphi(t),\ s^1 = \Omega(t) \text{ für } x = a \tag{103}$$

wobei X und $\Omega(t)$ vorläufig noch unbekannte Funktionen bedeuten mögen. Aus (96c) folgt kraft der ersten und dritten Bedingung $C = D = B = 0$, wodurch die vierte schon mit berücksichtigt ist. Es bleibt sonach

$$s = A \sin \frac{\alpha}{c} x \sin \alpha t \tag{104}$$

Um nun darnach $\varphi(t)$ darzustellen, setzen wir für $x = a$

$$\sin \frac{\alpha}{c} a = (-1)^m, \quad \frac{\alpha}{c} a = \frac{2n+1}{2}\pi \tag{105}$$

und erhalten so aus

$$\varphi(t) = \sum_1^\infty{}^m (-1)^m A_m \sin (2m+1)\frac{\pi c}{2a} t \tag{106}$$

nachdem wir beiderseits mit $\sin (2n+1)\frac{\pi c}{2a} t\, dt$ multipliziert und zwischen den Grenzen 0 und $\frac{a}{c}$ integriert haben für $n = m$

$$\frac{1}{2}\frac{a}{c} A_n = \int_0^{a/c} (-1)^n \sin (2n+1)\frac{\pi c}{2a} \lambda\, d\lambda\ \ \varphi(\lambda) \tag{107}$$

woraus dann nach (104) folgt

$$s_2 = \frac{2c}{a}\sum_1^\infty{}^n \sin (2n+1)\frac{\pi x}{2a} \sin (2n+1)\frac{\pi c}{2a} t \int_0^{a/c} (-1)^n \sin (2n+1)\frac{\pi c}{2a} \lambda\, d\lambda\ \ \varphi(\lambda) \tag{108}$$

Da nun über alle Konstanten verfügt ist, können die Funktionen $X(x)$ und $\Omega(t)$ nicht mehr willkürlich angenommen werden, sondern sind schon mit bestimmt. Wir finden, indem wir (108) nach t differenzieren, und das eine Mal $t = 0$, das anderemal $x = a$ setzen

$$X(x) = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \pi \sum_1^\infty {}^n (2n+1) \sin (2n+1) \frac{\pi x}{2a} \int_0^{a/c} (-1)^n \varphi(\lambda) \sin (2n+1) \frac{\pi c}{2a} \lambda . d\lambda \quad . \quad . \quad (109)$$

$$\Omega(t) = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \pi \sum_1^\infty {}^n (-1)^n (2n+1) \sin (2n+1) \frac{\pi c}{2a} t \int_0^{a/c} (-1)^n \varphi(\lambda) \sin (2n+1) \frac{\pi c}{2a} \lambda . d\lambda \quad . \quad . \quad (110)$$

wodurch die Aufgabe gelöst ist.

III. Wir setzen nun analog dem früheren Falle die Bedingungen fest:

$s = \Xi(x)$, $s^1 = o$ für $t = 0$; $s = 0$, $s^1 = 0$ für $x = 0$; $s = \Psi(t)$, $s^1 = \psi(t)$ für $x = 0$. (111)

worin $\Xi(t)$ und $\Psi(t)$ wieder zwei nachträglich zu bestimmende Funktionen bedeuten. Die zweite, dritte und vierte Bedingung erfordert: $A = B = D = 0$, so daſs als Lösung bloſs gelten kann:

$$s = C \sin \frac{\alpha}{c} x \cos \alpha t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (112)$$

Soll diese für $x = a$ in $s^1 = \psi(t)$ übergehen, so muſs zunächst wieder die Gleichung (105) bestehen. Ähnlich wie dort finden wir dann:

$$C_n = \frac{4}{\pi} \frac{1}{2n+1} \int_0^{a/c} (-1)^{n+1} \psi(\lambda) \sin (2n+1) \frac{\pi c}{2a} \lambda . d\lambda$$

und daher die Elongation selbst in der Form:

$$s_3 = \frac{4}{\pi} \sum_1^\infty {}^n \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \sin (2n+1) \frac{\pi x}{2a} \cos (2n+1) \frac{\pi c}{2a}$$

$$\int_0^{a/c} (-1)^{n+1} \sin (2n+1) \frac{\pi c}{2a} \lambda . \psi(\lambda) . d\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (113)$$

und für die zwei noch unbestimmten Funktionen $\Xi(x)$ und $\Psi(t)$ folgt ganz so wie früher:

$$\Xi(x) = \frac{4}{\pi} \sum_1^\infty {}^n \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \sin (2n+1) \frac{\pi x}{2a} \int_0^{a/c} (-1)^{n+1} \sin (2n+1) \frac{\pi c}{2a} \lambda . \psi(\lambda) . d\lambda \quad . \quad . \quad . \quad (114)$$

$$\Psi(t) = \frac{4}{\pi} \sum_1^\infty {}^n \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \cos (2n+1) \frac{\pi c}{2a} t \int_0^{a/c} (-1)^{n+1} \psi(\lambda) \sin (2n+1) \frac{\pi c}{2a} \lambda . d\lambda \, . \quad . \quad . \quad (115)$$

IV. Wir betrachten schlieſslich noch eine sehr einfache Lösung der vorgelegten Differentialgleichung,

$$s = \frac{g}{a} x \left(t + \frac{h}{g}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (116)$$

welche der Bedingung genügt, im Anfange der Zeit $\frac{h}{a} x$ als auch ihr Differentialquotient $\frac{g}{a} x$ zu sein. Für $x = 0$ werden beide, Elongation und Geschwindigkeit Null, und für $x = a$: $s = gt + h$, $s^1 = g$. Setzt man:

$$s = g \frac{a - x}{a} \left(t + \frac{h}{g}\right) . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (117)$$

so gelten ganz analoge Schlüsse. Beide Lösungen lassen sich noch beträchtlich vereinfachen, wenn man $g = 0$ setzt. Dann wird s für $t = 0$: $\frac{h}{a} x$, und für $x = a$: $s = h$; in allen übrigen Fällen erhält man Null.

Addiert man also zu dieser Lösung die unter I gefundene (102), nachdem man in ihr [entsprechend (116) oder (117)] $\chi(x) = -\frac{g}{a}x\left(t+\frac{h}{g}\right)$, oder $\chi(x) = -g\frac{a-x}{a}\left(t+\frac{h}{g}\right)$ und $\omega(x) = 0$ addiert hat, so erhält man eine Schwingungs-Elongation, die am Ende oder Anfange der Linie konstant ist, sonst aber in den Anfangszuständen mit ihrer Geschwindigkeit zugleich verschwindet

Da die Funktionen $\varphi(\lambda)$ und $\psi(\lambda)$ als Bedingungen des Problems von vorne her bekannt sind, so gilt dies natürlich auch von $X(x)$, $\Xi(x)$, $\Omega(t)$, $\Psi(t)$ Sind daher die ursprünglichen Bedingungen nicht in der unter (97) gegebenen Form in das Problem eingeführt sondern setzt man

$\chi(x)-\Xi(x)$ statt $\chi(x)$, $\omega(x)-X(x)$ statt $\omega(x)$, $\varphi(t)-\Psi(t)$ statt $\varphi(t)$, $\psi(t)-\Omega(t)$ statt $\psi(t)$

so werden gerade die unter (97) gestellten Bedingungen befriedigt, wenn man die drei Lösungen (102), (108), (113) addiert Die Funktion, die diese Bedingungen erfüllt, ist also

$$s = \frac{2}{a}\sum_{1}^{\infty}{}_{n} \sin n\pi\frac{x}{a}\left\{\cos n\pi\frac{c}{a}t\int_0^a[\chi(x)-\Xi(x)]\sin n\pi\frac{\lambda}{a}\,d\lambda + \frac{a}{\pi c}\,\frac{1}{n}\sin n\pi\frac{c}{a}t\int_0^a[\omega(x)-X(x)]\sin n\pi\frac{\lambda}{a}\,d\lambda\right\}$$

$$+\frac{2c}{a}\sum_{1}^{\infty}{}_{n}\sin(2n+1)\frac{\pi x}{2a}\left\{(-1)^n\sin(2n+1)\frac{\pi c}{2a}t\int_0^{a/c}[\varphi(t)-\Psi(t)]\sin(2n+1)\frac{\pi c}{2a}\lambda\,d\lambda\right.$$

$$\left.+\frac{2a}{\pi c}\frac{1}{2n+1}\cos(2n+1)\frac{\pi c}{2a}t\int_0^{a/c}[\psi(t)-\Omega(t)]\sin(2n+1)\frac{\pi c}{2a}\lambda\,d\lambda\right\} \tag{118}$$

Soll nun die hingeschriebene Funktion außer den vorgelegten Bedingungen auch für $x=0$ etwa $s=\varrho(t)$ und $s^1=\varsigma(t)$ liefern, so braucht man nur in der letzteren Summe statt x $a-x$, statt $\varphi(t)-\Psi(t)$ $\varrho(t)-\Omega(t)$, statt $\psi(t)-\Omega(t)$ $\varsigma(t)-\Psi(t)$ einzuführen, und dieses neue Resultat mit dem obigen durch Addition zu verbinden

Wir diskutieren nun eine der Lösungen, indem wir die elastische Linie als eine an beiden Enden eingeklemmte Saite auffassen Für die Endpunkte sind dann Ausbiegung und Geschwindigkeit konstant Null, und es kommt somit die in I abgeleitete Schwingung in Betracht Diese können wir noch dadurch vereinfachen, daß wir auch die Anfangsgeschwindigkeit $\omega(x) = 0$ setzen Es bleibt somit nur

$$s = \frac{2}{a}\sum_{1}^{\infty}{}_{n}\sin n\pi\frac{c}{a}\cos n\pi\frac{c}{a}t\int_0^a\chi(\lambda)\sin n\pi\frac{\lambda}{a}\,d\lambda,$$

wo nun $\chi(x)$ die Form der Saite im Augenblicke $t=0$ darstellt Wir können diese Funktion noch näher bestimmen Wird nämlich die Saite im Punkte $\mathfrak{a}$ um $\mathfrak{b}$ aus der Gleichgewichtslage heraus bewegt, so bildet sie über der ganzen Länge als Basis ein Dreieck mit der Spitze im Punkte $\mathfrak{b}, \mathfrak{a}$ Es ist also zwischen 0 und $\mathfrak{a}$ $s = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}x$ und zwischen $\mathfrak{a}$ und a $u = \frac{\mathfrak{b}}{a-\mathfrak{a}}(a-x)$ Dies giebt

$$\int_0^a \chi(\lambda)\sin n\pi\frac{\lambda}{a}\,d\lambda = \int_0^{\mathfrak{a}} \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\lambda\sin n\pi\frac{\lambda}{a}\,d\lambda + \int_{\mathfrak{a}}^a \frac{\mathfrak{b}}{a-\mathfrak{a}}(a-\lambda)\sin n\pi\frac{\lambda}{a}\,d\lambda$$

$$= \frac{\mathfrak{b}a^3}{\mathfrak{a}(a-\mathfrak{a})n^2\pi^2}\sin n\pi\frac{\mathfrak{a}}{a}$$

wie man leicht findet. Die vollständige Schwingungsgleichung lautet also:

$$s = \frac{2\mathfrak{b}a^2}{\mathfrak{a}(a-\mathfrak{a})\pi^2}\sum_1^\infty{}_n\frac{1}{n^2}\sin n\pi\frac{\mathfrak{a}}{a}\sin n\pi\frac{x}{a}\cos n\pi\frac{c}{a}t.$$

Der Ton einer Saite ist also durchaus nicht einfach zu nennen. Erklingt die Saite im Punkte $\mathfrak{a}$, wo $\mathfrak{a}$ einen aliquoten Teil der Länge bedeutet, so tönt der betreffende Knotenpunkt nicht. Mit einem angeschlagenen Tone erklingen zugleich alle Obertöne, da n alle ganzen Zahlenwerte annehmen kann. Die Amplitude dieser Töne nimmt aber sehr rasch, im Verhältnis des umgekehrten Quadrates der Ordnungszahl ab, so daſs in jedem Falle der angeschlagene Grundton prävalieren muſs.

b) In analoger Weise kann man auch die zweite von d'Alembert gegebene Lösung (96d) behandeln. Von dieser sehen wir jedoch vorläufig zu Gunsten einer allgemeiner gehaltenen Ableitung der Schwingungsgleichung für Bewegungen im Innern der Körper ab.

Wie früher, machen wir auch hier die Annahme der Kontinuität der Materie; denken wir uns also im Punkte x, y, z das unendlich kleine Parallelepipedon $dx\,dy\,dz$ (unabhängig von der dasselbe erfüllenden Materie) festgehalten, so können wir das materieerfüllte Volumenelement unter dem Einflusse einer z. B. in der Richtung der x-Axe wirkenden Druckkraft als derart veränderlich annehmen, daſs ein Teil des Stoffes aus dem Volumenelemente in ein in der Richtung der Kraft gelegenes andere Element gedrängt wird, während aus dem davorliegenden in das festgedachte Raumelement neuer Stoff gepreſst wird. Wir können aber dann mit eben diesem Rechte das Volumenelement mit dem Stoffe in feste Verbindung setzen, und den Stoffwechsel als Materiefluſs betrachten.

Unter diesen Voraussetzungen sei im Punkte x, y, z ein verschwindend kleines Parallelepipedon mit den Kanten dx, dy, dz gegeben, welches sich während des Zeitelementes dt um die Strecken dx, dy, dz in der Richtung der einander senkrecht schneidenden Koordinatenaxen verschiebt. Sind die Geschwindigkeiten längs der Axen gemessen u, v, w, so hat man, da diese allgemein Funktionen des Ortes sind, für die Beschleunigung:

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot v + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot w\\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot v + \frac{\partial v}{\partial z}\cdot w\\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot v + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot w\end{aligned}\right\} \quad \text{. . . . . (119)}$$

woraus die beschleunigende Kraft durch Multiplikation mit der Masse $\varrho\,dx\,dy\,dz$ folgt, wenn ϱ die Dichtigkeit bedeutet. Diese ist andrerseits gleich der Summe der beschleunigenden äuſseren Kräfte, X, Y, Z, und der Druckkräfte der benachbarten Massenelemente. Ist die Gröſse derselben p auf die Einheit der Fläche, so beträgt der Druck auf unser Volumenelement in der Richtung der x-Axe $dy\,dz\,p$. Geht man im Punkte x

um dx weiter, so treffen wir das der Fläche $dy\,dz$ entgegengesetzte Flächenelement, auf welches in entgegengesetzter Richtung der Druck $dy\,dz\left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)$ wirkt. Die Druckkraft, welche in der Richtung der wachsenden x das Parallelepipedon zu bewegen sucht, ist sonach

$$p\,dy\,dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dy\,dz = -\frac{\partial p}{\partial x}\,dx\,dy\,dz \tag{120}$$

und ganz ähnliche Ausdrücke erhalten wir durch Vertauschung von x mit y und z für die andern zwei Koordinaten. Die vollständigen Bewegungsgleichungen sind daher aus (119) und (120)

$$\varrho\,dx\,dy\,dz\,X - \frac{\partial p}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \varrho\,dx\,dy\,dz\,\frac{du}{dt}$$

oder anders geschrieben

$$\left.\begin{aligned}\varrho X - \frac{\partial p}{\partial x} - \varrho\frac{du}{dt} &= 0\\ \varrho Y - \frac{\partial p}{\partial y} - \varrho\frac{dv}{dt} &= 0\\ \varrho Z - \frac{\partial p}{\partial z} - \varrho\frac{dw}{dt} &= 0\end{aligned}\right\} \tag{121}$$

Der Materiefluſs muſs nun notwendigerweise so beschaffen sein, daſs keine inneren Risse, keine Unterbrechung der Stetigkeit der Raumerfüllung vorkommen können. Dazu ist notwendig und hinreichend, daſs die durch Ein- und Ausfluſs von Masse aus den einzelnen Flächenelementen des Parallelepipedons verursachten Stoffänderungen der Veränderung des Volumens als Ganzes betrachtet, gleich sei. Da nun die Fortbewegung der Stoffteile in der Zeit dt die Gröſse $u = \frac{dx}{dt}\,dt$ hat, so tritt durch die Fläche $dy\,dz$ während dieser Zeit vom Koordinatenanfangspunkte her die Masse $dy\,dz\,\varrho u\,dt$ ein, in der Richtung der wachsenden x aber aus dem Elemente durch dieselbe Fläche die Masse $dy\,dz\left(\varrho u + \frac{\partial(\varrho u)}{\partial x}dx\right)dt$ aus. Die entstandene Dichtigkeitsänderung während der Zeit dt infolge des Zu- und Abflusses beträgt demnach $-\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x}\,dx\,dy\,dz\,dt$. Ähnliche Ausdrücke, die durch einfache Vertauschung der Buchstaben x und u in y, v, z, w hervorgehen, gelten für die beiden anderen Koordinaten. Diese drei Änderungen müssen der erwähnten Kontinuitätsbedingung nach gleich sein der Änderung des ganzen Volumens $dx\,dy\,dz\,\frac{\partial\varrho}{\partial t}\,dt$. Man hat daher die Bedingung

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \frac{\partial(u\varrho)}{\partial x} + \frac{\partial(v\varrho)}{\partial y} + \frac{\partial(w\varrho)}{\partial z} = 0 \tag{122}$$

die noch zu dem Systeme (121) gehört. Endlich muſs auch noch eine Gleichung gegeben sein, welche den Zusammenhang von Druck und Dichtigkeit giebt, was wir mit

$$p = f(\varrho) \tag{123a}$$

bezeichnen. Sind die Gleichungen auf inkompressible Materie angewandt, so ist einfach

$$\varrho = \text{konst} \tag{123b}$$

und dann tritt noch eine beträchtliche Vereinfachung ein. (122) wird dann nämlich explizite aufgeschrieben

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + u\frac{\partial \varrho}{\partial x} + v\frac{\partial \varrho}{\partial y} + w\frac{\partial \varrho}{\partial z} + \varrho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

infolge der Gleichung (123b) zu der folgenden reduziert:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (124)$$

Die inneren Elastizitätskräfte sind nun in allen Fällen so grofs, dafs dagegen die äufseren Kräfte, meistens blofs die Anziehung der Erde, als verschwindend klein betrachtet werden müssen. Wir setzen also

$$X = Y = Z = 0 \quad \ldots \ldots \quad (125)$$

und nehmen weiter an, dafs die ganze Masse im Ruhestande homogen ist. Das Gleichgewicht soll nur so wenig aufgehoben werden, dafs die auftretenden Geschwindigkeiten unendlich klein bleiben; Produkte von der Form also, wie $u\frac{\partial u}{\partial x} \cdots w\frac{\partial w}{\partial z}$ als unendlich kleine Gröfsen zweiter Ordnung wegfallen. Dann werden die Gleichungen mit Rücksicht auf (119) zu den folgenden:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} &= -\frac{\partial w}{\partial t} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (126)$$

Die konstante Dichtigkeit des Ruhezustandes sei mit a bezeichnet; dann können wir mit Rücksicht auf die Kleinheit der entstehenden Bewegungen die veränderliche Dichtigkeit ϱ durch

$$\varrho = a(1 + \sigma) \quad \ldots \ldots \quad (127)$$

ausdrücken, wo σ, je nachdem es positiv oder negativ ist, Kompression oder Dilatation anzeigt. Berücksichtigt man nun (123a), so wird die Bewegungsgleichung (126):

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial f(\varrho)}{\partial \varrho}\cdot\frac{\partial \varrho}{\partial x} = \frac{a}{a(1+\sigma)}f'(a + a\sigma)\cdot\frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

Weil nun σ sehr klein ist, so können wir es als Summand neben der Einheit als verschwindend vernachlässigen, und erhalten so:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} = f'(a)\frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad \ldots \ldots \quad (128)$$

Da nun mit wachsender Dichte auch der Druck zunimmt, so ist $f'(a)$ stets positiv. Setzen wir dafür

$$f'(a) = c^2 \quad \ldots \ldots \quad (129)$$

so gehen (126) über in

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -c^2\frac{\partial \sigma}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -c^2\frac{\partial \sigma}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -c^2\frac{\partial \sigma}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (130)$$

und aus der noch zu berücksichtigenden Kontinuitätsgleichung wird:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{131}$$

da die Glieder von der Form $u\frac{\partial \sigma}{\partial x}$ $\sigma\frac{\partial u}{\partial z}$ ihrer Kleinheit halber nicht mitgenommen zu werden brauchen. Diese vier Gleichungen können nun verbunden werden. Differenziert man sie der Reihe nach in Bezug auf x, y, z und t und addiert die ersten drei, so kommt

$$-c\left\{\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2}\right\}=\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial z}$$

während die letztere giebt

$$-\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}+\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial t}+\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial t}$$

und da Koordinaten und Zeit von einander unabhängige Variabele vorstellen, so sind die Differentialquotienten rechterseits einander paarweise gleich. Man erhält daher mit nur einer abhängigen Variabelen

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2}=c\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \sigma}{\partial z}\right) \tag{132}$$

welches die allgemeine Gleichung räumlicher Schwingungen ist.

Die Nebenbedingungen zur Lösung dieser partiellen Differentialgleichung sind der gegebene Anfangszustand des Mediums, das heifst die Geschwindigkeiten u_0, v_0, w_0 für $t=0$, die anfängliche Dilatation σ_0 als Funktion der Koordinaten, und die Kontinuitätsbedingung (131) für den Beginn der Bewegung.

c) Integration der Gleichung

Mit Hilfe der bisher aufgestellten Anfangsbedingungen und der Gleichungen (130) ist die Integration vollständig durchführbar, denn σ ergiebt sich aus (132) als Funktion der Zeit und der Koordinaten mit dem gegebenen Anfangszustande

$$\left.\begin{aligned} &\text{für } t=0 \text{ sei } \sigma_0=f(x,y,z)\\ &\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)_0=F(x,y,z)\\ &u=u_0,\ v=v_0,\ w=w_0 \text{ als Funktion von } (x,y,z) \end{aligned}\right\} \tag{133}$$

sodann findet man aus (130) durch einfache Quadraturen die Geschwindigkeiten als Funktion der Zeit

$$u=u_0-c^2\int_0^t\frac{\partial \sigma}{\partial x}\partial t \quad v=v_0-c^2\int_0^t\frac{\partial \sigma}{\partial y}\partial t \quad w=w_0-c^2\int_0^t\frac{\partial \sigma}{\partial z}dt \tag{134}$$

Um nun (132) zu integrieren, setzen wir versuchsweise

$$\sigma=e^{(\lambda x+\mu y+\nu z\pm c\varrho t)i}=\cos(\lambda x+\mu y+\nu z\pm c\varrho t)+i\sin(\lambda x+\mu y+\nu z\pm c\varrho t) \tag{135}$$

und finden durch Rücksubstitution

$$\varrho=\lambda+\mu^2+\nu^2 \tag{136}$$

Wir zerlegen nun ähnlich wie früher, σ in zwei Teile, $\sigma_1+\sigma_2$, so dafs für den Anfangszustand $t=0$ gelte

$$\sigma_1=f(x,y,z),\quad \sigma=0 \text{ und } \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial t}\right)_0=0,\ \left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial t}\right)_0=F(x,y,z)$$

Aus der Lösung (135) haben dann für uns Bedeutung die Kombinationen:

$$\sigma_1 = \cos(\lambda x + \mu y + \nu z) \cos c\varrho t \quad \text{und} \quad \sigma_2 = \cos(\lambda x + \mu y + \nu z) \sin c\varrho t$$
$$\sigma_1 = \sin(\lambda x + \mu y + \nu z) \cos c\varrho t \quad \quad \sigma_2 = \sin(\lambda x + \mu y + \nu z) \sin c\varrho t$$

Um mit Beibehaltung der ersten Lösung auch die zweite mit berücksichtigen zu können, schreiben wir an Stelle von x, y, z bezüglich $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$, und verallgemeinern das Resultat dadurch, dafs wir die Lösung mit der willkürlichen Funktion $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ multiplizieren, und in Bezug auf λ, μ, ν, α, β, γ das sechsfache Integral zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ nehmen. Da sich diese Operationen nur auf Parameter der Lösung beziehen, so bleibt sie noch immer giltig. Es ist also:

$$\sigma_1 = \int_{-\infty}^{+\infty}{}^{(6)} \cos\left\{\lambda(x-\alpha) + \mu(y-\beta) + \nu(z-\gamma)\right\} \cos c\varrho t \,.\, \varphi(\alpha, \beta, \gamma) \,.\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu \quad . \quad (137)$$

Infolge der ersten der für σ_1 geltenden Bedingungen hat man, indem $t=0$ gesetzt wird:

$$f(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty}{}^{(6)} \cos\left\{\lambda(x-\alpha) + \mu(y-\beta) + \nu(z-\gamma)\right\} \varphi(\alpha, \beta, \gamma) \,.\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu \quad . \quad . \quad (138)$$

Für σ_2 wählen wir ebenfalls die Cosinus-Lösung der Koordinatenverbindung, und erhalten ganz wie in (137), indem wir noch den Faktor $\frac{1}{c\varrho}$ hinzufügen:

$$\sigma_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}{}^{(6)} \cos\left\{\lambda(x-\alpha) + \mu(y-\beta) + \nu(z-\gamma)\right\} \frac{\sin c\varrho t}{c\varrho} \cdot \psi(\alpha, \beta, \gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu \quad . \quad (139)$$

und die für dessen Differentialquotienten nach der Zeit im Augenblicke $t = 0$ geltende Bedingung:

$$F(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty}{}^{(6)} \cos\left\{\lambda(x-\alpha) + \mu(y-\beta) + \nu(z-\gamma)\right\} \psi(\alpha, \beta, \gamma) \,.\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu \quad . \quad . \quad (140)$$

Es reduziert sich also das weitere Verfahren auf das Aufsuchen der Funktionen φ und ψ. Zu dem Ende benutzen wir den Fourierschen Lehrsatz über die Darstellung willkürlicher Funktionen mehrerer Variabelen durch mehrfache bestimmte Integrale. Es ist stets:

$$\chi(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty}{}^{(6)} \cos \lambda(\alpha - x) \,.\, \cos \mu(\beta - y) \cos \nu(\gamma - z) \,.\, \chi(\alpha, \beta, \gamma) \,.\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu.$$

Um unsere sechsfachen Integrale mit dem Fourierschen konform zu machen, bemerken wir, dafs ist:

$$\cos a \cos b \cos c = \tfrac{1}{4}\left[\cos(a+b+c) + \cos(-a+b+c) + \cos(a-b+c) + \cos(a+b-c)\right]$$

wie man durch Ausführung der Cosinussummen leicht sieht. Dadurch zerfällt das Integral des Fourierschen Satzes in vier Teile, die aber für die Integration selbst nicht verschieden sind. Denn wird z. B. in Bezug auf b von $-\infty$ bis $+\infty$ integriert, so kann in $\cos(a-b+c)$ $-b$ mit $+b$ vertauscht werden. Es sind daher alle vier Cosinus-Integrale einander gleich. Setzt man nun a, b, c der Reihe nach gleich $\lambda(x-\alpha)$, $\mu(y-\beta)$, $\nu(z-\gamma)$, so wird das vorgelegte Integral (138) und (140) mit dem Fourierschen identisch, und man hat:

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{(2\pi)^3} f(\alpha, \beta, \gamma); \quad \psi(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{(2\pi)^3} F(\alpha, \beta, \gamma) \quad . \quad . \quad . \quad (141)$$

und demnach aus (137) und (139):

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_1 &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}{}^{(6)} \cos\left\{\lambda(x-\alpha)+\mu(y-\beta)+\nu(z-\gamma)\right\}\cos c\varrho t\; f(\alpha,\beta,\gamma)\; d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu \\
\sigma_2 &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}{}^{(6)} \cos\left\{\lambda(x-\alpha)+\mu(y-\beta)+\nu(z-\gamma)\right\}\frac{\sin c\varrho t}{c\varrho}\; F(\alpha,\beta,\gamma)\; d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu
\end{aligned}\right\} \tag{142}
$$

womit die Aufgabe gelöst ist. Und zwar sehen wir an den Grenzen des Integrals, daſs die Lösung für eine nach allen drei Koordinaten hin bis ins Unendliche ausgedehnte Raumerfüllung gilt.

Die Integrale lassen sich noch beträchtlich reduzieren, indem man λ, μ, ν als orthogonale Koordinaten auffaſst und in polare transformiert. Es sei also

$$
\left.\begin{aligned}
\lambda = \varrho\cos\Theta,\ \mu = \varrho\sin\Theta\cos\varphi,\ \nu = \varrho\sin\Theta\sin\varphi,\ \varrho^2 = \lambda^2+\mu^2+\nu^2, \\
d\lambda\, d\mu\, d\nu = \varrho^2\sin\Theta\, d\varrho\, d\Theta\, d\varphi
\end{aligned}\right\} \tag{143}
$$

und da sich die Grenzen auf den ganzen unendlichen Raum bezogen, so sind sie in polaren Koordinaten für ϱ, Θ, φ über 0 bis ∞, 0 bis π und 0 bis 2π zu nehmen. Man sieht leicht, daſs σ_1 aus σ_2 hervorgeht, wenn man nach t differenziert und statt f setzt F, es wird daher genügen, bloſs die Transformation von σ_2 durchzuführen. Dem Gesagten nach hat man

$$
\begin{aligned}
\sigma_2 = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}{}^{(3)} F(\alpha,\beta,\gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma \int\limits_0^{\pi} d\Theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} \cos\left\{\varrho\left[(\alpha-x)\cos\Theta+(\beta-y)\sin\Theta\cos\varphi\right.\right. \\
\left.\left. +(\gamma-z)\sin\Theta\sin\varphi\right]\right\}\frac{\sin c\varrho t}{c\varrho}\,\varrho^2\sin\Theta\, d\varrho
\end{aligned} \tag{144}
$$

Wir betrachten zunächst das über $0,\pi$ und $0,2\pi$ genommene Doppelintegral, verschieben darin den Koordinatenanfangspunkt um x, y, z, so daſs an Stelle von α, β, γ tritt $\alpha+x$, $\beta+y$, $\gamma+z$. Da die Grenzen der Integrale hiervon unabhängig sind, haben wir, das Doppelintegral vorübergehend mit J bezeichnend

$$
J = \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \cos\left\{\varrho\left[\alpha\cos\Theta+\beta\sin\Theta\cos\varphi+\gamma\sin\Theta\sin\varphi\right]\right\}\sin\Theta\; d\Theta\, d\varphi \tag{145}
$$

Substituiert man nun

$$
\varrho\alpha = r\cos p,\ \varrho\beta = r\sin p\cos q,\ \varrho\gamma = r\sin p\sin q,\ \text{also}\ r = \varrho\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} \tag{146}
$$

so ist

$$
\left.\begin{aligned}
J &= \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos\left\{r\left[\cos\Theta\cos p+\sin\Theta\cos\varphi\,\sin p\cos q+\sin\Theta\sin\varphi\,\sin p\sin q\right]\right\}\sin\Theta\, d\Theta\, d\varphi \\
&= \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos\left\{r\left[\cos\Theta\cos p+\sin\Theta\sin p\cos(\varphi-q)\right]\right\}\sin\Theta\, d\Theta\, d\varphi
\end{aligned}\right\} \tag{147a}
$$

Nun ist aber der trigonometrische Klammerausdruck der Bogen eines gröſsten Kreises, welcher die auf der mit dem Radius Eins geschlagenen Kugel befindlichen Punkte Θ, φ und p, q verbindet. Bezeichnet man diesen Bogen mit w, so wird einfach

$$
J = \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos\left\{r\cos w\right\}\sin\Theta\, d\Theta\, d\varphi \tag{147b}
$$

Es ist weiter $r\cos w$ der Bedeutung von w nach die Projektion des in der Kugel vom Radius r zum sphärischen Elemente gezogenen Radius auf den Leitstrahl des Punktes

p, q, oder mit andern Worten, der Abstand dieses Elementes von einer auf den Radius des Punktes p, q senkrechten Äquatorebene. Da die Lage dieser Ebene auf das Integral keinen Einfluſs hat, so wählen wir sie so, daſs die Richtung p, q die Polaraxe werde, $p = q = 0$ gesetzt werden kann. Dann ist auch $w = \Theta$. Multipliziert man unter dem Integral mit r^2 und dividiert auſserhalb mit eben derselben Gröſse, was an der Richtigkeit der Gleichung (147b) nichts ändert, so bedeutet nun das Integral die Summe aller sphärischen Elemente, jedes multipliziert mit seinem Abstande von einer festen Äquatorebene genommen über die ganze Kugel. Es ist also:

$$J = \frac{2\pi}{r^2}\int_0^\pi \cos\left\{r\cos\Theta\right\} r^2 \sin\Theta \, . \, d\Theta = -\frac{2\pi}{r}\int_{+r}^{-r}\cos z \, . \, dz = 4\pi\frac{\sin r}{r} \quad . \quad . \quad (147\text{c})$$

wie man sich sogleich überzeugt, wenn man $r\cos\Theta = z$ setzt. Das ursprüngliche Integral (142) wird daher mit Rücksicht auf die in (144) und (146) angewandten Koordinatentransformationen:

$$\sigma_2 = \frac{2}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}{}^{(4)} F(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma)\frac{\sin c\varrho t \, . \sin\left(\varrho\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\right)}{c\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (148)$$

In diesem Integrale führen wir nun wieder Polarkoordinaten ein, indem wir setzen:

$$\alpha = r\cos\Theta, \quad \beta = r\sin\Theta\cos\varphi, \quad \gamma = r\sin\Theta\sin\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (149)$$

durch welche Substitution (148) übergeht in:

$$\sigma_2 = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\Theta}{c}\, d\Theta\, d\varphi \int_0^\infty\int_0^\infty r\, F(x+r\cos\Theta, y+r\sin\Theta\cos\varphi, z+r\sin\Theta\sin\varphi) \\ \sin c\varrho t \, . \, \sin r\varrho \, . dr \, . d\varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (150)$$

Das innere Doppelintegral stellt nun wieder den Fourierschen Satz dar, denn man hat für eine Variabele

$$f(ct) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty f(r)\sin r\varrho \sin\varrho ct\, dc\, d\varrho$$

und zwar ist das Doppelintegral gleich der Funktion $\frac{\pi}{2} \cdot ct . F(x+ct\cos\Theta, y+ct\sin\Theta\cos\varphi, z+ct\sin\Theta, \sin\varphi)$. Demzufolge ist:

$$\sigma_2 = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^\pi t\, F(x+ct\cos\Theta,\; y+ct\sin\Theta\cos\varphi,\; z+ct\sin\Theta\sin\varphi)\;\sin\Theta\, d\Theta\, d\varphi \quad . \quad (151)$$

und σ_1 erhält man hieraus, wie schon früher erwähnt wurde, indem man nach t differenziert und f durch F ersetzt. Die vollständige Lösung der vorgelegten Differentialgleichung ist also:

$$\left.\begin{aligned} \sigma = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_0^\pi t\, f(x+ct)\cos\Theta,\; y+ct\sin\Theta\cos\varphi,\; z+ct\sin\Theta\sin\varphi)\sin\Theta\, d\Theta\, d\varphi \\ + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^\pi t\, F(x+ct\cos\Theta,\; y+ct\sin\Theta\cos\varphi,\; z+ct\sin\Theta\sin\varphi)\sin\Theta\, d\Theta\, d\varphi \end{aligned}\right\} \quad . \quad (152)$$

wozu dann noch die schon bezeichneten Quadraturen (134) kommen.

Ohne diese Formeln rechnend weiter benutzen zu wollen, können wir aus ihnen doch schon jetzt einige interessante Folgerungen von allgemeiner Gültigkeit ableiten. Es war $F(x, y, z)$ der Anfangswert von $\frac{\partial s}{\partial t}$ in dem Punkte (x, y, z), daher die unter dem Integrale (152) stehende Funktion F derselbe Differentialquotient in dem Punkte $x+ct \cos\theta$, $y+ct\sin\theta\cos\varphi$, $z+ct\sin\theta\sin\varphi$, welcher auf einer mit dem Halbmesser ct um den Punkt (x, y, z) geschlagenen Kugeloberfläche liegt. Das sphärische Element am betrachteten Punkte ist aber $c^2t^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$, und daher ist das Integral σ_2 in (152), das wir nun so schreiben wollen

$$\sigma_2 = t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F(x+ct\cos\theta,\ y+ct\sin\theta\cos\varphi,\ z+ct\sin\theta\sin\varphi)\,\frac{c^2t^2\sin\theta}{4\pi c^2t^2}\,d\theta\, d\varphi$$

der Mittelwert der Funktion F auf der ganzen Oberfläche, multipliziert mit t, und da man Ähnliches auch von der Lösung σ_1, dem ersten Integrale in (152) sagen kann, so hat man den Satz:

Die Dilatation, welche zur Zeit t in einem Punkte x, y, z stattfindet, hängt ab von dem Anfangszustande auf einer um diesen Punkt mit dem Radius ct beschriebenen Kugeloberfläche.

Diese Bemerkung genügt zur Bestimmung der Zeit, in welcher ein Punkt (x, y, z) die Schwingungsbewegung beginnt, wenn die Erschütterung auf einen gegebenen Anfangsraum beschränkt ist. Solange nämlich ct eine gewisse Gröfse nicht erreicht, liegt (x, y, z) aufserhalb des Erschütterungsraumes, fällt aber in denselben und verbleibt darin so lange, als die betrachtete Kugeloberfläche das Gebiet schneidet, in welchem f und F von Null verschiedene Werte besitzen. Sind demnach die gröfste und kleinste Entfernung des Punktes (x, y, z) von der Oberfläche des Erschütterungsraumes, durch r_1 und r_2 gegeben, so beginnt die Bewegung, wenn $ct_2 = r_2$ ist, sie hört auf, wenn $ct_1 = r_1$ geworden ist. Alle jene Punkte beginnen daher die Schwingungsbewegung gleichzeitig, welche in demselben Abstande r von der Aufsenfläche des Erschütterungsraumes liegen. Alle Punkte, welche denselben Abstand von dieser Fläche besitzen, sind durch eine dieser Fläche parallele Fläche verbunden denkbar, welche die Wellenfläche darstellt. Zwei Punkte in dem Abstande r und r' beginnen also die Bewegung in den Zeiten $t = \frac{r}{c}$ und $t' = \frac{r'}{c}$, und daher braucht die Schwingung die Zeit $t'-t = \frac{r'-r}{c}$, um sich auf der Strecke $r'-r$ fortzupflanzen. Es ist daher c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der schwingenden Bewegung, die für kleine Bewegungen nach (129) durch die Quadratwurzel aus dem konstanten Teile der Druckänderung in Bezug auf Dichtigkeitsänderungen gegeben ist.

Eine formell allgemeine Lösung ergiebt sich — ähnlich der d'Alembertschen in der Schwingung eines linearen Punktsystems auch hier. Setzt man

$$r^2 = x^2+y^2+z^2$$

so lautet dieselbe

$$\sigma = \frac{1}{r}F_1(r+ct) + \frac{1}{r}F_2(r-ct) \tag{153}$$

und bezeichnet ganz allgemein zwei Systeme von Kugelwellen, deren eine sich mit der Geschwindigkeit c vom Centrum entfernt, die andere sich demselben mit eben dieser Geschwindigkeit nähert.

d) Schwingungen in einem unendlich langen Cylinder.

Nachdem wir nun die inneren Bewegungsgleichungen auch körperlicher Systeme abgeleitet, gehen wir wieder auf die Lösung (96d) zurück, die sich natürlich auch aus (132) ergiebt, wenn wir annehmen, die Bewegung gehe nur in einer Richtung, etwa der x-Axe vor sich, und alle Punkte einer zur x-Axe senkrechten Ebenen besitzen gleichzeitig gleiche Geschwindigkeit und Dilatation. Dann wird nämlich σ von y und z unabhängig, und die Differentialgleichung reduziert sich auf die schon unter (93) gegebene. Unter Annahme der Lösung:

$$\sigma = f(x+ct) + F(x-ct) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (154)$$

setzen wir noch die Anfangsbedingungen für $t = 0$ fest. Es sei $\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right) = \varphi'(x)$, $\sigma_0 = \psi(x)$.
Infolge dieser Bedingungen hat man:

$$f(x) + F(x) = \psi(x), \; cf'(x) - cF'(x) = \varphi'(x) \quad \ldots \ldots \quad (155)$$

woraus sich ergiebt:

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\psi(x) + \frac{1}{2c}\varphi(x) \text{ und } F(x) = \tfrac{1}{2}\psi(x) - \frac{1}{2c}\varphi(x)$$

und womit die willkürlichen Funktionen f und F bestimmt sind. Die vollständige Lösung lautet daher:

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\psi(x+ct) + \tfrac{1}{2}\psi(x-ct) + \frac{1}{2c}\varphi(x+ct) - \frac{1}{2c}\varphi(x-ct) \quad \ldots \quad (156)$$

Liegt nun der Bewegungsimpuls innerhalb des Raumes $-\alpha < x < +\alpha$, so hat bei der Zeit $t = 0$ ein jeder Punkt aufserhalb dieses Raumes, also $-\alpha > x > \alpha$, $\sigma = \psi(x)$ den Wert Null, während innerhalb desselben $\psi(x)$ allgemein einen endlichen Wert besitzt. Ist nun die Zeit eine endliche, so ist für einen Punkt $x > +\alpha$ stets $x + ct > \alpha$, daher auch $\psi(x+ct) = \varphi(x+ct) = 0$, und aus (156) wird einfacher:

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\psi(x-ct) - \tfrac{1}{2}\varphi(x-ct) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (157a)$$

Jeder Punkt $x > \alpha$ ist also anfänglich in Ruhe; wächst aber die Zeit, so hören die Funktionen $\psi(x-ct)$ und $\varphi(x-ct)$ für den Augenblick $t_1 = \frac{x-\alpha}{c}$ auf der Null gleich zu sein, der betrachtete Punkt beginnt seine Bewegung. Wächst die Zeit weiter, so wird bei $t_2 = \frac{x+\alpha}{c}$ der Punkt x wieder mit $-\alpha$ zusammenfallen, die nun fortdauernden Nullwerte der Funktionen φ und ψ beginnen, der Punkt kommt zur Ruhe. Die Dauer seiner Bewegung betrug also $t_2 - t_1 = \frac{2\alpha}{c}$. Da c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwingung bedeutet, so kann man sagen: Die Dauer der Bewegung eines Punktes im Erschütterungsraume ist die Zeit, welche die schwingende Bewegung bedarf, um diesen Raum zu durchmessen. Da wir mit wachsender Zeit uns immermehr dem positiven x nähern, so geht von dem Erschütterungsraume eine Welle nach der positiven Seite der x-Axe aus.

Liegt der Punkt x aufserhalb des Erschütterungsraumes auf der negativen Seite, ist also $x < -\alpha$, so ist umsomehr $x - ct < -\alpha$, und es fallen die Funktionen $\psi(x-ct)$ und $\varphi(x-ct)$ weg, so dafs nur bleibt:

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\psi(x+ct) + \frac{1}{2c}\varphi(x+ct) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (157b)$$

Wie früher finden wir, daſs ein jeder Punkt $x < -\alpha$ anfänglich in Ruhe, seine Bewegung in dem Momente beginnt, als $x + ct = -\alpha$, $t_1 = -\frac{x+\alpha}{c}$ wird. Der Punkt hört auf zu schwingen, wenn $t = -\frac{x-\alpha}{c}$ wird, die Dauer der Bewegung ist daher $t - t_1 = \frac{2\alpha}{c}$ wie oben, und wir finden, daſs sich eine Welle auch nach der negativen Seite der x-Axe fortpflanzt.

Nehmen wir nun einen Punkt im Innern des Erschütterungsraumes $-\alpha < x < +\alpha$, so verschwinden im Augenblicke als $t = \frac{\alpha - x}{c}$ wird zwei Glieder der Lösung (156), und die anderen beiden, wenn $t = \frac{x+\alpha}{c}$ wird. Für die gröſsere der beiden Zeiten verschwinden alle vier Glieder, die Bewegung hört auf.

Zwei Punkte auſserhalb des Erschütterungsraumes beginnen ihre Bewegung, je nachdem sie auf der positiven oder negativen Seite derselben liegen, zur Zeit $t = \frac{\pm x - \alpha}{c}$ und $t' = \frac{\pm x'' - \alpha}{c}$. Es ist also $t' - t = \pm\frac{x'' - x}{c}$ die Zeit, welche zur Fortpflanzung der Schwingung von dem näheren Punkte x zum entfernteren x'' nötig ist. Das Ende der Schwingung tritt im Punkte x'' zur Zeit $t' = \frac{\pm x'' + \alpha}{c}$ ein. Bestimmt man nun die Länge der Strecke, welche gleichzeitig in Bewegung ist, so hat man dafür Gleichheit der Zeit, in welcher die Schwingung in x beginnt, in x' jedoch aufhört. Daraus folgt als Länge dieses Weges der mit der Geschwindigkeit c fortrückt $x'' - x = \pm 2\alpha$, und ist gleich der Länge des anfänglichen Erschütterungsraumes.

Geht man nun auf die erste Gleichung des Systems (134) zurück, so findet man

$$u - u_0 = -c\left\{\frac{1}{2c}\psi(x+ct) - \frac{1}{2c}\psi(x-ct) + \frac{1}{2c}\varphi(x+ct) + \frac{1}{2c^2}\varphi(x-ct) - \frac{1}{c^2}\psi(x)\right\} \quad (158)$$

Vergleicht man nun die einzelnen Wellenzweige (157a) und (157b) mit den zugehörigen Geschwindigkeiten, so ergiebt sich

$$u - u_0 = +c\sigma \text{ und } u - u_0 = -c\sigma \quad (159)$$

für bezüglich den positiven und negativen Ast. Da aber c eine wesentlich positive Gröſse ist, so besitzt $u - u_0$ mit σ stets gleiches Zeichen, wenn das Vorzeichen in der vorstehenden Gleichung als Richtungsmerkmal der Geschwindigkeit angesehen wird. Die Bewegung des schwingenden Punktes ist daher stets nach der Stelle der Verdichtung hin gerichtet.

Die angezogene Vergleichung lehrt auch, daſs wir nur einen positiven Wellenzug erhalten, wenn wir für den Anfangszustand die erste, nur einen negativen Wellenzug, wenn wir für $t = 0$ die zweite der Gleichungen (159) setzen. Vereint besagt dann (156), daſs durch einen im Raume $-\alpha < x < +\alpha$ erfolgten Bewegungsimpuls stets zwei bezüglich in der positiven und negativen Richtung der x-Axe mit der Geschwindigkeit c sich fortpflanzende Wellenzüge von der Länge 2α entstehen. Von diesen beiden Wellensystemen braucht aber nur das positive berücksichtigt zu werden, denn infolge der Superposition der Schwingungen kann jeder Anfangszustand aus zwei einzelnen Zuständen eines nur positiven und eines nur negativen Wellenzuges dargestellt werden. Schreibt

man nämlich in den Gleichungen für σ und $\frac{\partial \sigma}{\partial t}$ (156) statt $\psi(x) = \psi_1(x) \pm \psi_2(x)$ und $\varphi(x) = \varphi_1(x) \pm \varphi_2(x)$, so erhält man je vier Glieder, welche ein σ und $\frac{\partial \sigma}{\partial t}$ in den Funktionen ψ_1 und φ_1 und ψ_2 und φ_2 bilden. Diese lassen sich dann linear stets so in $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ausdrücken, dafs man hat:

$$\sigma_{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}\psi(x+ct) + \frac{1}{2c}\varphi(x+ct) \text{ und } \sigma_{\mathrm{II}} = \tfrac{1}{2}\psi(x-ct) + \frac{1}{2c}\varphi(x-ct)$$

wo σ_{I} nur nach der negativen, σ_{II} nur nach der positiven Seite fortschreitet.

e) Schwingungen in einem begrenzten Cylinder.

Wir begrenzen zunächst den vorhin auf beiden Seiten sich ins Unendliche erstreckenden Cylinder auf der einen Seite durch eine zur Cylinderaxe senkrechte feste Ebene, an welcher also fortdauernd Ruhe herrscht. Geht die Ebene durch den Anfangspunkt der Koordinaten hindurch, so giebt dies die Bedingungen:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \text{ für } x = 0 \text{ und für beliebige Zeit } t,$$

während die der vorigen Aufgabe noch weiterhin bestehen. Die allgemeine Lösung war (154):

$$\sigma = f(x+ct) + F(x-ct)$$

und gab mit den vorgeschriebenen Bedingungen für positive Argumente die Beziehungen:

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\psi(x) + \frac{1}{2c}\varphi(x) \text{ und } F(x) = \tfrac{1}{2}\psi(x) - \frac{1}{2c}\varphi(x).$$

Die Bestimmung der Funktion f ist also, da sie stets nur positive Argumente hat, vollendet. In F kann aber $x - ct$ negativ werden, und da die negative, jenseits der Schlufsplatte des Cylinders liegende Seite für unser Problem physikalisch sinnlos ist, so haben wir zu untersuchen, was aus der Funktion F wird, wenn sie negative Argumente annimmt. Zu dem Zwecke benutzen wir den Satz, dafs an der Schlufsplatte Ruhe herrscht. Das giebt für beliebige Zeiten:

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)_{x=0} = 0 = f'(ct) - F'(-ct), \text{ oder } F(-ct) = -f(ct) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (160)$$

Wir haben demnach, wenn $t > \frac{x}{c}$ wird, statt $F(x-ct)$ zu schreiben $-f(ct-x)$, und da das Argument der letzteren Funktion positiv ist, so ist die Funktion ebenfalls bekannt. Für die beiden Fälle eines positiven und negativen Argumentes können wir also schreiben:

$$\left.\begin{aligned} x-ct > 0:\ \sigma &= \tfrac{1}{2}\psi(x+ct) + \tfrac{1}{2}\psi(x-ct) + \frac{1}{2c}\varphi(x+ct) - \frac{1}{2c}\varphi(x-ct) \\ x-ct > 0:\ \sigma &= \tfrac{1}{2}\psi(x+ct) - \tfrac{1}{2}\psi(ct-x) + \frac{1}{2c}\varphi(x+ct) - \frac{1}{2c}\varphi(ct-x) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (161)$$

Da nun die vorgelegten Funktionen nur für positive Argumente gegeben sind, so können wir sie nach der negativen Seite hin ganz willkürlich fortsetzen. Wir setzen also:

$$\left.\begin{aligned} \psi(x-ct) &= -\psi(ct-x) \\ \varphi(x-ct) &= +\varphi(ct-x) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (162)$$

und können dann die beiden Fälle $t < \frac{x}{c}$ und $t > \frac{x}{c}$ vereinigen. Es bleibt daher zu untersuchen, was die hingeschriebene Definition aussagt. Haben wir auf der positiven Seite einen Bewegungsimpuls, der Schwingungen hervorruft, so entstehen der Definition nach Schwingungen in eben derselben Entfernung und Größe auch jenseits der Begrenzungsebene, gerade als ob diese gar nicht vorhanden wäre, und zwar entsprechen sich beiderseits Dilatation und Kompression, jedoch mit entgegengesetzter Bewegungsrichtung. Nach dem Satze der Superposition kleiner Schwingungen genügt es nur die positive Wellenbewegung der negativen Erregungsstelle zu beachten. Trennen wir diese ab, so findet sich

von der positiven Erregungsstelle geht ein Wellenzug

nach der positiven Seite $\sigma_1 = \frac{1}{2}\psi(x - ct) - \frac{1}{2c}\varphi(x - ct)$

nach der negativen Seite $\sigma_2 = \frac{1}{2}\psi(x + ct) + \frac{1}{2c}\varphi(x + ct)$

von der negativen Erregungsstelle geht ein Wellenzug

nach der positiven Seite $\sigma_3 = -\frac{1}{2}\psi(x + ct) - \frac{1}{2c}(x + ct)$

War nun der Erregungsraum auf $x = p$, $x = q$ beschränkt, so erreichen und verlassen σ_2 und σ_3 den Punkt $x = 0$ in der Zeit $\frac{p}{c}$ und $\frac{q}{c}$, zwischen beiden Momenten hat man stets entgegengesetzt gleiche Bewegungszustände, daher herrscht in $x = 0$ zu jeder Zeit Ruhe. Nach der Zeit $\frac{q}{c}$ entfällt σ_2 ganz, und es schreiten nur σ_1 und σ_3 in derselben Richtung fort. Der letztere Wellenzug verhielt sich, wie wir sahen, gegenüber dem positiven Aste, wie das Spiegelbild eines Planspiegels gegenüber dem Gegenstande. Wir nennen deshalb diesen Wellenzug den reflektierten.

Ist der betrachtete Cylinder endlich auch auf die Entfernung $x = a$ durch eine feste Ebene senkrecht zur Axe geschlossen, so kommen zu den vorigen Bedingungen noch $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$ für $x = a$ und jede beliebige Zeit t. Die Funktionen φ und ψ sind jetzt für $t = 0$ bestimmt, wenn der Ungleichung $0 < x < a$ Genüge geleistet ist.

Wir gehen wieder auf die ursprüngliche Lösung zurück (154) und erhalten dieselben formellen Bestimmungen der Funktion $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, nämlich

$$f(x) = \frac{1}{2}\psi(x) + \frac{1}{2c}\psi(x), \text{ und } F(x) = \frac{1}{2}\psi(x) - \frac{1}{2c}\varphi(x)$$

Da x nur die positiven Werte von 0 bis a durchlaufen soll, so umfaßt $x + ct$ alle Werte von 0 bis $+\infty$, $x - ct$ dagegen alle Werte von a bis $-\infty$. Im ersteren Falle kommt die Funktion f, im zweiten F zur Anwendung, die wir nun für Argumente außer $x = 0$ und $x = a$ definieren müssen. Hierzu dienen die Grenzbedingungen, welche ergeben

$$0 = f(ct) - F(ct) \text{ und } 0 = f'(a + ct) - F(a - ct) \tag{163}$$

Für F liefert die erste Gleichung die Kenntnis dieser Funktion von 0 bis $-a$, da ja f von 0 bis $+a$ gegeben war. Da aber für dieses Intervall auch F schon im Voraus gegeben war, so kennen wir die Funktion überhaupt zwischen den Grenzen $+a$ und $-a$. Setzt man nun in der zweiten Gleichung statt $a - ct$ alle Werte von $-c$ bis $+c$, so

durchläuft die Funktion f alle Werte des Argumentes von $3c$ bis c, at selbst also die Werte von $2c$ bis o, wodurch wieder die Kenntniss von f erweitert wurde. Damit gelangt man mit Hilfe der ersten Gleichung wieder zur Kenntnis von F zwischen den Grenzen des Arguments $+c$ bis $-2c$, und kann mit diesem Ergebnisse wieder f erweitern usw.

Setzt man $\alpha + at = s$, so ergiebt die zweite Gleichung:

$$f(s) = -F(-s + 2\alpha) \quad \quad (164a)$$

und die erste

$$f(s) = -F(-s) \quad \quad (164b)$$

oder vereinigt:

$$F(-s) = F(-s + 2\alpha) \quad \quad (164c)$$

d. h. die Funktion F verändert sich nicht, wenn man das Argument um ein beliebiges ganzzahliges Vielfache der Cylinderlänge vermehrt. Sie ist daher nach dem Periodizitätsmodul 2a periodisch, und dasselbe gilt natürlich auch von f.

Die weitere Behandlung des Problems liefert nun nichts besonderes Neues und wird mit dem vorhin untersuchten konform, wenn man die Bedingungen hinzutreten läfst:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(-x) &= -\varphi(x), & \varphi(x + 2c) &= \varphi(x) \\ \psi(-x) &= \psi(x), & \psi(x + 2c) &= \psi(x) \end{aligned}\right\} \quad \quad (165)$$

3. Schwingungen diskreter Punktsysteme.

a) Während den vorigen Untersuchungen mehr oder weniger die Vorstellung der Kontinuität der Materie zu Grunde lag, und teilweise selbst in besonderen Kontinuitätsgleichungen ausgedrückt wurde, lassen wir nun diese Annahme fallen, und gelangen so zu einer Klasse von Gleichungen, welche für die Erkenntnis der Natur des Lichtes von höchster Bedeutung wurden.

Wir gehen also hier von der Daltonschen Hypothese der Atomistik aus, und betrachten den körperlichen Raum als mit Molekeln und Ätherteilchen erfüllt.

Durch eine Äthermolekel legen wir das rechtwinklige Koordinatensystem, und nehmen an, dafs zwischen den Ätherteilchen der Masse m, Kräfte wirken, welche durch $f(r)$, zwischen diesen und den Körpermolekeln m_1 Kräfte, welche durch $f_1(r_1)$ darstellbar seien. In einem so definierten Systeme wird Gleichgewicht herrschen, wenn ist:

$$\left.\begin{aligned} \sum m f(r) \frac{x}{r} + \sum m_1 f_1(r_1) \frac{x_1}{r_1} &= 0 \\ \sum m f(r) \frac{y}{r} + \sum m_1 f_1(r_1) \frac{y_1}{r_1} &= 0 \\ \sum m f(r) \frac{z}{r} + \sum m_1 f_1(r_1) \frac{z_1}{r_1} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \quad (166)$$

Erteilt man nun den Massen m und m_1 die unendlich kleinen, aber sonst willkürlichen Elongationen ξ, η, ζ und ξ_1, η_1 und ζ_1, so werden die gegenseitigen Distanzen in die folgenden überführt:

$$\left.\begin{aligned} (r_1 + \varDelta r_1)^2 &= (x_1 + \xi_1 - \xi)^2 + (y_1 + \eta_1 - \eta)^2 + (z_1 + \zeta_1 - \zeta) \\ (r + \varDelta r)^2 &= (x + \varDelta\xi)^2 + (y + \varDelta\eta)^2 + (z + \varDelta\zeta)^2 \end{aligned}\right\} \quad (167)$$

wobei wegen des physikalischen Zusammenhanges des Systems ist:

$$\left.\begin{aligned}\Delta\xi &= x\frac{\partial\xi}{\partial x}+y\frac{\partial\xi}{\partial y}+z\frac{\partial\xi}{\partial z}\\ \Delta\eta &= x\frac{\partial\eta}{\partial x}+y\frac{\partial\eta}{\partial y}+z\frac{\partial\eta}{\partial z}\\ \Delta\zeta &= x\frac{\partial\zeta}{\partial x}+y\frac{\partial\zeta}{\partial y}+z\frac{\partial\zeta}{\partial z}\end{aligned}\right\}\qquad(168)$$

Vernachlassigt man Glieder zweiter Ordnung so werden die Anderungen der Molekulardistanzen einfach

$$\left.\begin{aligned}\Delta r &= \frac{1}{r}[x\Delta\xi+y\Delta\eta+z\Delta\zeta]\\ \Delta r_1 &= \frac{1}{r_1}[x_1(\xi_1-\xi)+y_1(\eta_1-\eta)+z_1(\zeta_1-\zeta)]\end{aligned}\right\}\qquad(169)$$

Kurze halber fuhren wir noch folgende Definition ein

$$\frac{f(r)}{r}=\mathfrak{f}(r)\quad \frac{f_1(r_1)}{r_1}=\mathfrak{f}_1(r_1)\qquad(170a)$$

woraus dann mit dem vorher festgesetzten Genauigkeitsgrade folgt

$$\mathfrak{f}(r+\Delta r)=\mathfrak{f}(r)+\mathfrak{f}^1(r)\,\Delta r\quad \mathfrak{f}_1(r_1+\Delta r)=\mathfrak{f}_1(r_1)+\mathfrak{f}_1{}^1(r_1)\,\Delta r_1\qquad(170b)$$

Die Aufstellung der Bewegungsgleichungen der Atherteilchen unter Einfluſs der durch Storung des Gleichgewichtes geweckten Elastizitatskrafte ist nun leicht Sie lauten

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\xi}{\partial t} &= \sum m\,f(r+\Delta r)\frac{x+\Delta\xi}{r+\Delta r}+\sum m_1\,f_1(r_1+\Delta r_1)\frac{x_1+\xi_1-\xi}{r_1+\Delta r_1}\\ \frac{\partial^2\eta}{\partial t} &= \sum m\,f(r+\Delta r)\frac{y+\Delta\eta}{r+\Delta r}+\sum m_1\,f_1(r_1+\Delta r_1)\frac{y_1+\eta_1-\eta}{r_1+\Delta r_1}\\ \frac{\partial\zeta}{\partial t} &= \sum m\,f(r+\Delta r)\frac{z+\Delta\zeta}{r+\Delta r}+\sum m_1\,f_1(r_1+\Delta r_1)\frac{z_1+\zeta_1-\zeta}{r_1+\Delta r_1}\end{aligned}\right\}\qquad(171)$$

verwandeln sich aber kraft der gegebenen Definitionen (170) und der Gleichgewichtsgleichung (166) in die folgenden

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\xi}{\partial t^2} &= \sum m\,\mathfrak{f}(r)\Delta\xi+\sum m\,\mathfrak{f}^1(r)\,[x\Delta\xi+y\Delta\eta+z\Delta\zeta]\,\frac{x}{r}+\sum m_1\,\mathfrak{f}_1(r_1)(\xi_1-\xi)\\ &\quad+\sum m_1\,\mathfrak{f}_1{}^1(r_1)\,[x_1(\xi_1-\xi)+y_1(\eta_1-\eta)+z_1(\zeta_1-\zeta)]\,\frac{x_1}{r_1}\\ \frac{\partial\eta}{\partial t} &= \sum m\,\mathfrak{f}(r)\Delta\eta+\sum m\,\mathfrak{f}^1(r)\,[x\Delta\xi+y\Delta\eta+z\Delta\zeta]\,\frac{y}{r}+\sum m_1\,\mathfrak{f}_1(r_1)(\eta_1-\eta)\\ &\quad+\sum m_1\,\mathfrak{f}_1{}^1(r_1)\,[x_1(\xi_1-\xi)+y_1(\eta_1-\eta)+z_1(\zeta_1-\zeta)]\,\frac{y_1}{r_1}\\ \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} &= \sum m\,\mathfrak{f}(r)\Delta\zeta+\sum m\,\mathfrak{f}^1(r)\,[x\Delta\xi+y\Delta\eta+z\Delta\zeta]\,\frac{z}{r}+\sum m_1\,\mathfrak{f}_1(r_1)(\zeta_1-\zeta)\\ &\quad+\sum m_1\,\mathfrak{f}_1{}^1(r_1)\,[x_1(\xi_1-\xi)+y_1(\eta_1-\eta)+z_1(\zeta_1-\xi)]\,\frac{z_1}{r_1}\end{aligned}\right\}\qquad(172)$$

die sich durch Einführung der folgenden Definitionen noch kurzer schreiben lassen Setzt man namlich

$$\left.\begin{array}{ll}
A = \sum m\,\mathfrak{f}(r) + \sum m\,\mathfrak{f}^1(r)\frac{x^2}{r} & A^1 = -\sum m_1\,\mathfrak{f}_1(r_1) - \sum m_1\,\mathfrak{f}_1{}^1(r_1)\frac{x_1{}^2}{r_1} \\
B = \sum m\,\mathfrak{f}^1(r)\frac{xy}{r} & B^1 = -\sum m_1\,\mathfrak{f}_1{}^1(r_1)\frac{x_1 y_1}{r_1} \\
C = \sum m\,\mathfrak{f}^1(r)\frac{xz}{r} & C^1 = -\sum m_1\,\mathfrak{f}_1{}^1(r_1)\frac{x_1 z_1}{r_1} \\
A_1 = B & A_1{}^1 = B^1 \\
B_1 = \sum m\,\mathfrak{f}(r) + \sum m\,\mathfrak{f}^1(r)\frac{y^2}{r} & B_1{}^1 = -\sum m_1\,\mathfrak{f}_1(r_1) - \sum m_1\,\mathfrak{f}_1{}^1(r_1)\frac{y_1{}^2}{r_1} \\
C_1 = \sum m\,\mathfrak{f}^1(r)\frac{yz}{r} & C_1{}^1 = -\sum m_1\,\mathfrak{f}_1{}^1(r_1)\frac{y_1 z_1}{r_1} \\
A_2 = C & A_2{}^1 = C^1 \\
B_2 = C_1 & B_2{}^1 = C_1{}^1 \\
C_2 = \sum m\,\mathfrak{f}(r) + \sum m\,\mathfrak{f}^1(r)\frac{z^2}{r} & C_2{}^1 = -\sum m_1\,\mathfrak{f}_1(r_1) - \sum m_1\,\mathfrak{f}_1{}^1(r_1)\frac{z_1{}^2}{r_1}
\end{array}\right\} \quad (173)$$

und substituiert diese Ausdrücke in (172), so kommt einfacher:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = A\,\Delta\xi + B\,\Delta\eta + C\,\Delta\zeta + A^1(\xi-\xi_1) + B^1(\eta-\eta_1) + C^1(\zeta-\zeta_1) \\
\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = A_1\Delta\xi + B_1\Delta\eta + C_1\Delta\zeta + A_1{}^1(\xi-\xi_1) + B_1{}^1(\eta-\eta_1) + C_1{}^1(\zeta-\zeta_1) \\
\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = A_2\Delta\xi + B_2\Delta\eta + C_2\Delta\zeta + A_2{}^1(\xi-\xi_1) + B_2{}^1(\eta-\eta_1) + C_2{}^1(\zeta-\zeta_1)
\end{array}\right\} \quad . \ (174)$$

wo nun die Gröfsen $A, B \ldots C_2{}^1$ Funktionen der Lagen — nicht aber der Verschiebungen — der einzelnen Massenpunkte bedeuten. Beschränken wir uns aber auf den in der Natur wohl am häufigsten vorkommenden Fall, dafs ein isotroper, homogener Körper vorliege, so treten beträchtliche Vereinfachungen auf. Da nämlich in diesem vollkommene Symmetrie der ponderablen und inponderablen Partikelchen angenommen werden mufs, so müssen die Glieder, welche die einzelnen Koordinaten in ungeraden Potenzen enthalten, verschwinden. Es ist also:

$$\left.\begin{array}{l}
B = C = C_1 = B^1 = C^1 = C_1{}^1 = 0 \\
A = B_1 = C_2 = \sum m\,\mathfrak{f}(r) + \frac{1}{3}\sum m\,\mathfrak{f}^1(r)\,.\,r = \varkappa \\
A^1 = B_1{}^1 = C_2{}^1 = -\sum m_1\mathfrak{f}_1(r_1) - \frac{1}{3}\sum m_1\,\mathfrak{f}_1{}^1(r_1)r_1 = \varkappa^1
\end{array}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ (175)$$

wodurch endlich (174) übergeht in:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \varkappa\,\Delta\xi + \varkappa^1(\xi-\xi_1) \\
\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \varkappa\,\Delta\eta + \varkappa^1(\eta-\eta_1) \\
\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = \varkappa\,\Delta\zeta + \varkappa^1(\zeta-\zeta_1)
\end{array}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (176)$$

in welchem Systeme nun die nach verschiedenen Koordinaten genommenen Ausweichungen von einander unabhängig sind. Es wird daher fortan genügen, eine einzige Koordinate zu behandeln.

Ahnlich hat die Erscheinungen des Lichtes schon Biot[1] untersucht, doch sind weder die vereinfachten, noch die vorhergehenden vollstandigen Gleichungen mit dessen Entwickelungen identisch, da sie nur das auf durchsichtige Korper auffallende Licht berucksichtigen, bei welchen Beschrankungen die Ausweichungen der ponderablen Korperteilchen als verschwindende Atherarbeit betrachtet werden durfen Wir legen unserer Definition des Spektrums nach gerade auf diese Schwingungen ein Hauptgewicht

Giebt man der Schwingung der Molekel die Form

$$\xi_1 = \mathfrak{B}\, e^{u x + v y + w z - s t} \tag{177}$$

so findet man das Integral der ersten Gleichung des Systems (176) in der Form

$$\xi = \mathfrak{A}_0\, e^{u x + v y + w z - s t} + \frac{\varkappa\, \mathfrak{B}}{\varkappa' + \varkappa(u x + v y + w z) - s^2}\, e^{u x + v y + w z - s t} \tag{178}$$

Zieht man hohere Potenzen der mit den Koordinaten veranderlichen Elongationen in Betracht, setzt also jedoch mit Berucksichtigung der schon betonten Symmetrie der Massenverteilung, infolge welcher ungerade Potenzen der Koordinaten verschwinden mussen

$$\varDelta\xi = \frac{1}{1\ 2}\left(x\frac{\partial\xi}{\partial x} + y\frac{\partial\xi}{\partial y} + z\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{1\ 2\ 3\ 4}\left(x\frac{\partial\xi}{\partial x} + y\frac{\partial\xi}{\partial y} + z\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^4 \tag{179}$$

wobei die Potenzierung eine symbolische ist, so erhalt man durch einfache Substitution von (178) in (176) die Beziehung

$$s^2 = \varkappa' + \varkappa\left[\frac{1}{1\ 2}(ux + vy + wz)^2 + \frac{1}{1\ 2\ 3\ 4}(ux + vy + wz)^4 + \quad\right] \tag{180}$$

auf welche wir noch spater zuruckkommen werden

Der Charakter der Periodizitat der Bewegung tritt klarer zu Tage, indem man schreibt

$$\left.\begin{aligned} u &= \mathfrak{u}i + U & \mathfrak{A}_0 &= \mathfrak{A}\, e^{\chi i} \\ v &= \mathfrak{v}i + V & & \\ & & \mathfrak{u}x + \mathfrak{v}y + \mathfrak{w}z &= \varphi \\ s &= \sigma i + S & Ux + Vy + Wz &= \Phi \\ \xi &= \xi_1 + \xi_2 i & & \end{aligned}\right\} \tag{181}$$

Trennt man in (178) Reelles vom Imaginaren, indem man fur u, v W' analoge Bezeichnungen wie die vorstehenden (181) einfuhrt, so erhalt man leicht

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \mathfrak{A}\, e^{\Phi - St}\cos(\varphi + \chi - \sigma t) + \frac{\varkappa\, \mathfrak{B}\, e^{\Phi - S t}}{M'}\sin(\varphi' + \gamma - \sigma t) \\ \xi_2 &= \mathfrak{A}\, e^{\Phi - St}\sin(\varphi + \chi - \sigma t) - \frac{\varkappa\, \mathfrak{B}\, e^{\Phi - S t}}{M'}\cos(\varphi' + \gamma - \sigma t) \\ M' \sin\gamma &= \varkappa' + \varkappa\,\Phi + \sigma^2 - S^2 \\ M' \cos\gamma &= \varkappa\,\varphi - 2\sigma S \end{aligned}\right\} \tag{182}$$

Die Vergleichung dieser Ausdrucke mit den ublicheren der Schwingung (90)

$$\xi = r \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{mx + ny + pz}{\lambda}\right)$$

in welchem m, n, p die Cosinusse der Winkel bedeuten, welche die Axen mit der Normalen der Wellenflachen einschliefsen, erweist die Richtigkeit folgender Gleichungen

[1] Theorie mathem de la lumière

$$\left.\begin{aligned} \sigma = \frac{2\pi}{T}; \; \varphi = \mathfrak{u}x + \mathfrak{v}y + \mathfrak{w}z = \frac{mx + ny + pz}{\lambda} 2\pi \\ m = \frac{\mathfrak{u}\lambda}{2\pi}, \; n = \frac{\mathfrak{v}\lambda}{2\pi}, \; p = \frac{\mathfrak{w}\lambda}{2\pi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (183a)$$

oder unter Berücksichtigung der Beziehung $m^2 + n^2 + p^2 = 1$ auch der Gleichung:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{\mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (183b)$$

in welcher λ die Wellenlänge, T die Schwingungsperiode bedeutet.

Mit Hilfe dieser Relationen erkennt man, daſs die betrachteten Schwingungen in einer der Ebene $\mathfrak{u}x + \mathfrak{v}y + \mathfrak{w}z = 0$ parallelen Ebene vor sich gehen, da alle Ätherteilchen, welche in der gleichen Entfernung

$$\Delta = \frac{\mathfrak{u}x + \mathfrak{v}y + \mathfrak{w}z}{\sqrt{\mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2}}$$

von dieser Ebene stehen, die gleiche Phase besitzen.

Diese Gleichungen bedingen die folgende Transformation der Beziehung (180):

$$s^2 = \varkappa' + \varkappa \left[\frac{1}{1.2}\left(\frac{2\pi\Delta}{\lambda}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3.4}\left(\frac{2\pi\Delta}{\lambda}\right)^4 + \cdots\right].$$

Bezeichnet c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwingungen, $a_0, a_1 ..$ aber nur von der Natur des Mediums abhängige Konstanten, so wird die vorstehende Gleichung

$$c^2 = a_0 + a_1\lambda^2 + \frac{a_2}{\lambda^2} + \frac{a_4}{\lambda^4} + \cdots \quad \ldots \ldots \ldots \quad (184)$$

an welche wir noch später anknüpfen müssen.

Zweifelsohne sind die Molekeln im Innern des Körpers weniger frei, als in näher zur Oberfläche gelegenen Schichten, und schon infolge der Verschiedenheit der Aufeinanderwirkung müssen wir annehmen, daſs die Gröſse σ' zwischen zwei einstweilen noch willkürlichen Grenzen σ_1' und σ_2' veränderlich ist. Berücksichtigt man dies, so werden die Gleichungen allgemein:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \sum \mathfrak{A}_1 e^{\Phi - St} \cos(\varphi + \chi_1 - \sigma t) + \varkappa' \sum \frac{\mathfrak{B}_1}{M'} e^{\Phi' - S't} \sin(\varphi' + \chi_1' - \sigma' t) \\ \eta &= \sum \mathfrak{A}_2 e^{\Phi - St} \cos(\varphi + \chi_2 - \sigma t) + \varkappa' \sum \frac{\mathfrak{B}_2}{M'} e^{\Phi' - S't} \sin(\varphi' + \chi_2' - \sigma' t) \\ \zeta &= \sum \mathfrak{A}_3 e^{\Phi - St} \cos(\varphi + \chi_3 - \sigma t) + \varkappa' \sum \frac{\mathfrak{B}_3}{M'} e^{\Phi' - S't} \sin(\varphi' + \chi_3' - \sigma' t) \end{aligned}\right\} \quad (185)$$

indem man nur das Bereich der reellen Schwingungen der Untersuchung unterzieht.

Wir transformieren diese Gleichungen noch, jedoch unter Weglassung der leicht zu berücksichtigenden Faktoren M' und der Exponenntiellen, indem wir bilden:

$$\frac{\xi}{\mathfrak{A}_1}\sin\chi_2 - \frac{\eta}{\mathfrak{A}_2}\sin\chi_1, \quad \frac{\eta}{\mathfrak{A}_2}\sin\chi_3 - \frac{\zeta}{\mathfrak{A}_3}\sin\chi_2, \quad \frac{\zeta}{\mathfrak{A}_3}\sin\chi_1 - \frac{\xi}{\mathfrak{A}_1}\sin\chi_3, \quad \frac{\xi}{\mathfrak{A}_1}\cos\chi_2 - \frac{\eta}{\mathfrak{A}_2}\cos\chi_1.$$

Der Wert der hingeschriebenen Ausdrücke führt uns zur Kenntnis der Polarisation unserer Schwingungen, indem ihre Kombination die beiden Gleichungen liefert:

$$\left(\frac{\xi}{\mathfrak{A}_1}\right)^2+\left(\frac{\eta}{\mathfrak{A}_2}\right)^2-2\frac{\xi\eta}{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2}\cos(\chi_1-\chi_2)=\sin^2(\chi_2-\chi_1)+\left(\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{A}_1}\right)^2\sin^2(\varphi'+\chi_1'-\sigma't)$$
$$+\left(\frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{A}_2}\right)^2\sin^2(\varphi'+\chi_2'-\sigma't)+2\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{A}_1}\sin(\chi_2-\chi_1)\sin(\varphi+\chi_2-\sigma t)\sin(\varphi'+\chi_1'-\sigma't)$$
$$-2\frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{A}_2}\sin(\chi_2-\chi_1)\sin(\varphi+\chi_1-\sigma t)\sin(\varphi'+\chi_2'-\sigma't)$$
$$-2\frac{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2}\cos(\chi_2-\chi_1)\sin(\varphi+\chi_1-\sigma t)\sin(\varphi'+\chi_2'-\sigma't)\quad(186)$$

$$\frac{\xi}{\mathfrak{A}_1}\sin(\chi_2-\chi_3)+\frac{\eta}{\mathfrak{A}_2}\sin(\chi_3-\chi_1)+\frac{\zeta}{\mathfrak{A}_3}\sin(\chi_1-\chi_2)=\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{A}_1}\sin(\chi_2-\chi_3)\sin(\varphi'+\chi_1'-\sigma't)$$
$$+\frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{A}_2}\sin(\chi_3-\chi_1)\sin(\varphi'+\chi_2'-\sigma't)$$
$$+\frac{\mathfrak{B}_3}{\mathfrak{A}_3}\sin(\chi_1-\chi_2)\sin(\varphi'+\chi_3'-\sigma't)\quad(187)$$

Die Amplitude der Schwingung tritt als willkürliche Konstante auf, die nicht aus dem Probleme selbst lösbar ist. Wir belassen sie noch als solche, und drücken durch sie sogleich die lebendige Kraft des Systems aus. Da aber unser Auge, wie alle physikalischen Apparate in unendlich kurzen Perioden vor sich gehende Veränderungen als konstante Phänomene auffassen, müssen wir aus den Gleichungen alles entfernen, was von der Zeit abhängt, indem wir Mittelwerte des Bewegungszustandes für eine so lange Zeitdauer entwickeln, welche beliebig nahe als Multiplum aller in der Strahlung auftretenden Perioden betrachtet werden kann. Bezeichnet man diese Energie mit L, so ist

$$L=\tfrac{1}{2}\sum m\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)^2\right]+\tfrac{1}{2}\sum m_1\left[\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta_1}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial t}\right)^2\right]\quad(188a)$$

worin bezüglich das erste und zweite Summenglied nach (185) und (177) zu berechnen ist. Man findet

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}=\sum\mathfrak{A}_1\sigma\sin(\varphi+\chi-\sigma t)-\varkappa'\sum\frac{\mathfrak{B}_1}{M}\sigma'\cos(\varphi'+\chi'-\sigma' t)$$
$$\frac{\partial\xi_1}{\partial t}=\sum B_1\sigma'\sin(\varphi'+\chi'-\sigma't)$$

wobei in dem ersten Ausdruck bezüglich der Faktor $e^{p-\delta t}$ und $e^{p'-\delta' t}$ unterdrückt ist. Summiert man sogleich über alle drei Koordinaten, wobei nun $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Amplitude selbst sein mag, so kommt

$$L=\tfrac{1}{4}\left[m_1\sum B^2\sigma'^2+m\sum\mathfrak{A}^2\sigma^2+\varkappa^2 m\sum\frac{\mathfrak{B}^2}{M}\sigma'^2-2\varkappa m\sum\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{M}\sigma\sigma'\right]\quad(188b)$$

wobei die letztere Summe nur über jene Glieder erstreckt werden darf, für welche $\sigma=\sigma'$ ist.

Die Gleichungen (186) und (187) sprechen das Polarisationsgesetz der betrachteten Schwingungen aus. Die Schwingungsebene fällt zusammen mit der Schnittfläche eines mit der Zeit periodisch veränderlichen elliptischen Cylinders und einer ebenfalls periodisch veränderlichen Ebene.

b) Wir wollen nun diese Aufgabe, jedoch mit Übergehung der Gleichungen, welche die Wellenlänge (184) und Polarisation (186, 187) ausdrücken, noch verallgemeinern, um bei späterer Anwendung einfach darauf hinweisen zu können.

Wir betrachten nun die körperliche Molekel als bestehend aus von zugehörigen Ätherhüllen umgebenen Atomen, deren Gesamtheit eine zweite Ätheratmosphäre um-

schliefst, die kontinuierlich — oder auf irgend eine andere Weise in den freien Äther des Mediums übergehen mag. Eine Partikel dieser Sphäre habe die Masse m, und die Koordinaten x, y, z. Die Atome mit der zugehörigen Ätherhülle besitzen die Masse m', die Koordinaten x', y', z'. Auf die Ätherteilchen wirken schliefslich noch die naheliegenden Molekeln $m''(x'', y'', z'')$ als Ganzes betrachtet, ein. Legt man den Koordinatenanfangspunkt in den Schwerpunkt der betrachteten Molekel, so besteht im Zustande des Gleichgewichts die Gleichung:

$$0 = \sum m\, f(r) \frac{x_n - x}{r} + \sum m' f_1(r') \frac{x' - x}{r'} + \sum m'' f_{,,}(r_{,,}) \frac{x'' - x}{r''} \quad . \quad . \quad . \quad (189)$$

wenn Äther, Atome und Molekeln mit den Kräften $f(r)$, $f_1(r')$, $f_{,,}(r'')$ auf den Äther einwirken. Zwei ganz analoge Gleichungen bestehen auch für die beiden andern Koordinaten, so dafs es genügen wird stets anzudeuten, wie jene aus dieser hervorgehen. Die Koordinatendifferenzen $x_n - x$, $y_n - y$, $z_n - z$ der ersten Summe wollen wir von nun an Einfachheit halber ohne Index aufschreiben, was keine Irrung veranlassen kann, da ja nie zwei Indizes dieser Differenz gleich sein können.

Erteilt man nun den hier vorkommenden Mafsen die beliebigen, aber unendlich kleinen Elongationen ξ, η, ζ; ξ', η', ζ'; ζ'', η'', ζ'', so ist der Ausdruck der durch die erweckte Elastizität erzeugten Beschleunigung:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \sum m f(r + \Delta r) \frac{x - x + \Delta\xi}{r + \Delta r} + \sum m' f_1(r' + \Delta r') \frac{x' - x + \xi' - \xi}{r' + \Delta r'}$$
$$+ \sum m'' f_{,,}(r'' + \Delta r'') \frac{x'' - x + \xi'' - \xi}{r'' + \Delta r''} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (190)$$

Vertauscht man hierin die x und entsprechenden ξ mit bezüglich den y und z und zugehörigen Verschiebungen, so erhält man die analogen Gleichungen der beiden übrigen Verschiebungskomponenten.

Nun sei mit Rücksicht auf die unendliche Kleinheit der vorkommenden Elongationen:

$$\frac{f(r + \Delta r)}{r + \Delta r} = \varphi(r) + \varphi'(r)\Delta r; \quad \frac{f_1(r' + \Delta r')}{r' + \Delta r'} = \varphi_1(r') + \varphi_1'(r')\Delta r';$$
$$\frac{f_{,,}(r'' + \Delta r'')}{r'' + \Delta r''} = \varphi_{,,}(r'') + \varphi_{,,}'(r'')\Delta r'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (191)$$

Führt man dies in (190) ein, indem man zugleich die Gleichgewichtsgleichung (189) berücksichtigt, so folgt:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \sum m\varphi(r)\Delta\xi + \sum m\varphi'(r)(x - x)\Delta r + \sum m'\varphi_1(r')(\xi' - \xi) + \sum m'\varphi_1'(r')(x' - x)\Delta r'$$
$$+ \sum m''\varphi_{,,}(r'')(\xi'' - \xi) + \sum m''\varphi_{,,}'(r'')(x'' - x)\Delta r'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (192)$$

Es sind aber $\Delta\xi$ und die entsprechenden Änderungen der übrigen Komponenten in (168) gegeben, und die Änderungen der in Betracht kommenden Distanzen werden:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta r &= \frac{1}{r}\left[(x - x)\Delta\xi + (y - y)\Delta\eta + (z - z)\Delta\zeta\right] \\
\Delta r' &= \frac{1}{r'}\left[(x' - x)(\xi' - \xi) + (y' - y)(\eta' - \eta) + (z' - z)(\zeta' - \zeta)\right] \\
\Delta r'' &= \frac{1}{r''}\left[(x'' - x)(\xi'' - \xi) + (y'' - y)(\eta'' - \eta) + (z'' - z)(\zeta'' - \zeta)\right]
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (193)$$

deren Berücksichtigung in (192) diese Gleichung in die folgende verwandelt:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \sum m\,\varphi(r)\Delta\xi + \sum m'\,\varphi_1(r')(\xi'-\xi) + \sum m''\,\varphi_{,,}(r'')(\xi''-\xi)$$
$$+\sum m\,\varphi'(r)\,\frac{x-x}{r}\,[(x-x)\Delta\xi + (y-y)\Delta\eta + (z-z)\Delta\zeta]$$
$$+\sum m'\varphi_1{}'(r')\,\frac{x'-x}{r'}\,[(x'-x)(\xi'-\xi) + (y'-y)(\eta'-\eta) + (z'-z)(\zeta'-\zeta)]$$
$$+\sum m''\varphi_{,,}{}'(r'')\,\frac{x''-x}{r''}\,[(x''-x)(\xi''-\xi) + (y''-y)(\eta''-\eta) + (z''-z)(\zeta''-\zeta)] \qquad (194)$$

Wir führen nun analog dem früheren (173) die folgenden Abkürzungen ein

$$\left.\begin{aligned}
&A = \sum m\,\varphi(r) + \sum m\,\varphi'(r)\frac{(x-x)}{r} && A' = \sum m'\,\varphi_1(r') + \sum m'\,\varphi_1{}'(r')\frac{(x'-x)^2}{r'}\\
& && A'' = \sum m''\,\varphi_{,,}(r'') + \sum m''\,\varphi_{,,}{}'(r'')\frac{(x''-x)}{r''}\\
&B = \sum m\,\varphi'(r)\frac{(x-x)(y-y)}{r} && B' = \sum m'\,\varphi_1{}'(r')\frac{(x'-x)(y'-y)}{r'}\\
& && B'' = \sum m''\,\varphi_{,,}{}'(r'')\frac{(x''-x)(y''-y)}{r''}\\
&C = \sum m\,\varphi'(r)\frac{(x-x)(z-z)}{r} && C' = \sum m'\,\varphi_1{}'(r')\frac{(x'-x)(z'-z)}{r'}\\
& && C'' = \sum m''\,\varphi_{,,}{}'(r'')\frac{(x''-x)(z''-z)}{r''}\\
&A_1 = B && A_1{}' = B'\\
& && A_1{}'' = B''\\
&B_1 = \sum m\,\varphi(r) + \sum m\,\varphi'(r)\frac{(y-y)^2}{r} && B_1{}' = \sum m'\,\varphi_1(r') + \sum m'\,\varphi_1{}'(r')\frac{(y'-y)^2}{r'}\\
& && B_1{}'' = \sum m''\,\varphi_{,,}(r'') + \sum m''\,\varphi_{,,}{}'(r'')\frac{(y''-y)^2}{r''}\\
&C_1 = \sum m\,\varphi'(r)\frac{(y-y)(z-z)}{r} && C_1{}' = \sum m'\,\varphi_1{}'(r')\frac{(y'-y)(z'-z)}{r'}\\
& && C_1{}'' = \sum m''\,\varphi_{,,}{}'(r'')\frac{(y''-y)(z''-z)}{r''}\\
&A_2 = C && A_2{}' = C'\\
& && A_2{}'' = C''\\
&B_2 = C_1 && B_2{}' = C_1{}'\\
& && B_2{}'' = C_1{}''\\
&C_2 = \sum m\,\varphi(r) + \sum m\,\varphi'(r)\frac{(z-z)}{r} && C_2{}' = \sum m'\,\varphi_1(r') + \sum m'\,\varphi_1{}'(r')\frac{(z'-z)}{r'}\\
& && C_2{}'' = \sum m''\,\varphi_{,,}(r'') + \sum m''\,\varphi_{,,}{}'(r'')\frac{(z''-z)^2}{r''}
\end{aligned}\right\} \qquad (195)$$

und können nun (194) explizite für alle drei Verschiebungskomponenten in folgende Form schreiben

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} &= A\varDelta\xi + B\varDelta\eta + C\varDelta\zeta + A'(\xi'-\xi) + B'(\eta'-\eta) + C'(\zeta'-\zeta)\\ &\qquad + A''(\xi''-\xi) + B''(\eta''-\eta) + C''(\zeta''-\zeta)\\ \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} &= A_1\varDelta\xi + B_1\varDelta\eta + C_1\varDelta\zeta + A_1'(\xi'-\xi) + B_1'(\eta'-\eta) + C_1'(\zeta'-\zeta)\\ &\qquad + A_1''(\xi''-\xi) + B_1''(\eta''-\eta) + C_1''(\zeta''-\zeta)\\ \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} &= A_2\varDelta\xi + B_2\varDelta\eta + C_2\varDelta\zeta + A_2'(\xi'-\xi) + B_2'(\eta'-\eta) + C_2'(\zeta'-\zeta)\\ &\qquad + A_2''(\xi''-\xi) + B_2''(\eta''-\eta) + C_2''(\zeta''-\zeta)\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (196)$$

Da die Ätherhüllen allmählich in den intramolekularen freien Äther übergehen, zweitens die Zahl der benachbarten Molekeln eine sehr grofse, im allgemeinen auch ihre Wirkung, des gröfseren Abstandes halber nur klein ist, dürfen wir für diese beiden Massenarten vollständige Homogenität voraussetzen. Nicht so für die Atome, deren Zahl in der Molekel eine sehr beschränkte ist. Dies liefert die schon von früher her bekannten Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} A = B_1 = C_2 = \varkappa, \qquad A'' = B_1'' = C_2'' = \varkappa''\\ B = C = C_1 = 0 \qquad B'' = C'' = C_1'' = 0\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (197)$$

und damit wird einfacher:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} &= \varkappa\varDelta\xi + \varkappa''(\xi''-\xi) + A'(\xi'-\xi) + B'(\eta'-\eta) + C'(\zeta'-\zeta)\\ \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} &= \varkappa\varDelta\eta + \varkappa''(\eta''-\eta) + A_1'(\xi'-\xi) + B_1'(\eta'-\eta) + C_1'(\zeta'-\zeta)\\ \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} &= \varkappa\varDelta\zeta + \varkappa''(\zeta''-\zeta) + A_2'(\xi'-\xi) + B_2'(\eta'-\eta) + C_2'(\zeta'-\zeta)\end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (198)$$

Es braucht wohl kaum in Erinnerung gebracht zu werden, dafs die Glieder $A'(\xi'-\xi)\,..\,C_2'(\zeta'-\zeta)$ eigentlich Summen von der Form $\sum A'_{(n)}(\xi'_n-\xi)\,..$ vorstellen sollen, da alle in der Molekel befindlichen Atome berücksichtigt werden müssen.

Um diese schon sehr komplizierte Differentialgleichung zu integrieren, müssen wir erst die Koordinaten zu sondern suchen. Zu dem Ende differenzieren wir die erste Gleichung zweimal nach t, und substituieren die Werte $\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}$ aus den beiden übrigen Gleichungen in dieselbe ein. Dieses Verfahren der zweimaligen Differentation nach t der ersten Gleichung und Einführung der rechten Seiten der beiden übrigen Gleichungen wiederholen wir so oft, bis so viele Differentialgleichungen in ξ erhalten sind, als zur Elimination der übrigen Koordinaten nötig sind. Besitzt also die Molekel n Atome, so haben wir, da ja die $\xi_1\,..\,\xi_n$ als gegeben anzusehen sind, drei Gleichungen mit drei abhängigen und einer unabhängigen Variabelen. Wir erhalten also durch das erwähnte Verfahren stets eine Gleichung sechster Ordnung in den einzelnen Koordinaten von der Form:

$$\frac{d^6\xi}{dt^6} + a_1\frac{d^5\xi}{dt^5} + \cdots a_5\frac{d\xi}{dt} + a_6 = 0, \quad \xi = e^{\alpha t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (199)$$

die ohne weiteres in der angegebenen Form integrierbar ist, und wo α je eine der sechs Wurzeln der Gleichung

$$\alpha^6 + a_1\alpha^5\,..\, + a_5\alpha + a_6 = 0$$

bedeutet. Freilich ist das Verfahren im allgemeinen nicht so einfach, wie hier angedeutet

worden, da die Elongationen auch wegen der Glieder $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$, Funktionen der Koordinaten sind. Die Berücksichtigung dieses Umstandes ist aber nicht schwierig, da in Beziehung auf diese Glieder die Elongationen der einen Komponente nicht von denen der anderen abhängen. Durch die aufeinanderfolgenden Substitutionen geht jedoch dieser Vorteil verloren und da wir für $\frac{\partial\xi}{\partial x} \cdots \frac{\partial\zeta}{\partial z}$ keine weiteren Beziehungen haben, ist auch das angeführte Eliminationsverfahren so lange unanwendbar, bis nicht noch weitere Gleichungen — etwa Kontinuitätsbedingungen zu (198) hinzugefügt werden.

Wir wollen aber diesen Weg der Lösung nicht weiter verfolgen, da wir sogleich einen mehr direkten einschlagen werden, und gehen nun auf die eigentlichen Atomschwingungen über, die ja im Vorigen als bekannt angesehen werden müssen, und von denen auch die Eigenschaften der Ätherschwingungen in erster Reihe abhängen müssen.

Legen wir den Anfangspunkt der Koordinaten x, y, z in den Schwerpunkt der Molekel, und drückt sich die gegenseitige Atomwirkung durch $m_r m_s F(r_{rs})$ aus, so ist das Bewegungsgesetz irgend eines Atoms in einer n-gliedrigen Molekel gegeben durch die Gleichung

$$m_p \frac{d^2x_p}{dt^2} = \sum_1^n m_p m_n F(r_{np}) \frac{x_n - x_p}{r_{np}} \tag{200}$$

Läfst man die Koordinaten des Atoms infolge seiner um die Gleichgewichtslage beschriebenen Schwingungen in $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ übergehen, so wird auch

$$m_p \frac{d^2x_p}{dt^2} + m_p \frac{d^2\xi_p}{dt^2} = \sum_1^n m_p m_n F(r_{np} + \varrho_{np}) \frac{x_n - x_p + \xi_n - \xi_p}{r_{np} + \varrho_{np}} \tag{201}$$

wo nun ϱ die infolge der Schwingungen eingetretene Veränderung der gegenseitigen Atomdistanzen bedeutet. Da wir anzunehmen gezwungen sind, dafs die Atomkräfte mit grofser werdenden Entfernungen sehr rasch abnehmen, so kann ϱ gegen r nicht endlich sein, ohne Dissoziation hervorzubringen. Wir wollen aber nicht nur das Eintreten der Dissoziation nicht voraussetzen, sondern von den Schwingungen als zu physikalisch demselben Körper gehörend auch dann schon absehen, wenn nur eine beträchtliche Lockerung der Atomverkettung und des Molekularverbandes — Disgregation — zu erwarten ist. Demzufolge ist ϱ gegen r unendlich klein, und wir dürfen überhaupt Glieder höherer Ordnung als der ersten in den Elongationen vernachlässigen.

Entwickelt man nun diese Gleichung ganz analog wie die früheren (166) — das Verfahren braucht nicht neuerdings aufgeschrieben zu werden — mit Ausnahme von Symmetriebeziehungen innerhalb der Molekel, die hier der geringen Zahl der Atome halber ausgeschlossen bleiben müssen, so gelangt man endlich zu folgenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\xi_p}{dt^2} &= \sum_1^n (A\xi + B\eta + C\zeta) \\
\frac{d^2\eta_p}{dt^2} &= \sum_1^n (A'\xi + B'\eta + C'\zeta) \\
\frac{d^2\zeta_p}{dt^2} &= \sum_1^n (A''\xi + B''\eta + C''\zeta)
\end{aligned}\right\} \tag{202}$$

in welchen $A, A' .. C''$ nur Funktionen der Koordinaten sind. Da aber die Koordinaten der Bewegung des Atomes halber auch die Zeit enthalten, so sind sie zugleich Funktionen der unabhängigen Variabelen. Glücklicherweise läſst sich aber die Methode der Mittelwerte auch hier verwerten. Besitzen nämlich die Atome veränderliche Koordinaten, so ist einleuchtend, daſs diese nur periodische Funktionen der Zeit sein können, oder aber mit beliebiger Näherung als solche angesehen werden dürfen — wie dies z. B. (wir werden diesen Fall später zu besprechen haben) auch bei der fortschreitenden Molekularbewegung von Gasen in festen Hüllen der Erfolg lehrt. Denn wäre dem nicht so, so könnte der betrachtete Stoff mit seinen uns bekannten Eigenschaften als solcher nicht bestehen. Da nun aber auch leicht einzusehen ist, daſs die Periode dieser Koordinatenveränderung gegen jede endliche Beobachtungszeit verschwinden muſs, so können wir unter den Koeffizienten $A .. C''$ einfach deren nach der Zeit genommene Mittelwerte verstehen, und dies umsomehr, als uns auch in den Schwingungen nicht so sehr ihr zeitlicher Verlauf interessiert, als vielmehr deren konstante Elemente.

In dem Falle ist es aber erlaubt, das früher erwähnte Eliminationsverfahren zu benutzen, mit welchem wir für jede Komponente der Verschiebung eine Differentialgleichung $6n$-ter Ordnung erhalten, die weil in der Form

$$\frac{d^{6n}\xi_p}{dt^{6n}} + a_2 \frac{d^{(6n-2)}\xi_p}{dt^{6n-2}} + \cdots + a_{6n-2}\frac{d^2\xi_p}{dt^2} + a_{6n} = 0$$

enthalten, stets integrierbar ist, und allgemein $6n$-Schwingungen liefert. Die Zahl derselben reduziert sich aber einfach auf n — wie dem auch bei der angenommenen Kleinheit der Schwingungen sein muſs — wenn man bedenkt, daſs stets drei Komponenten in eine zu kontrahieren sind, und daſs wegen der nur in paren Ordnungen vorkommenden Differentialquotienten das Quadrat der Schwingungszahl eine einfache Schwingung giebt.

Wie man aber sieht, führt selbst dieses Verfahren schon bei nur wenig zusammengesetzten Molekeln auf solche technische Schwierigkeiten, die, wenn auch überwältigt, nur wenig übersichtliche Resultate liefern könnten. Wir müssen daher noch einige — übrigens ganz in der Natur der Sache gelegene Vereinfachungen einführen.

Wir beobachten nie einzelne Molekeln, sondern stets ein aus dem Körper herausgeschnittenes Prisma, dessen Höhe allgemein der Dicke des Körpers, und dessen Querschnitt der Öffnung des Spektroskopspaltes (oder der Pupille) gleich ist. In einem solchen Prisma von endlichem Rauminhalte befinden sich nun jederzeit eine sehr groſse Anzahl von Molekeln. Da nun die Gesamtintensität eines solchen Prismas gleich ist der Intensität einer Flächenschichte, deren Dicke durchschnittlich nur eine Molekel enthält, multipliziert mit einem konstanten Faktor, der von der Zahl und dem Absorptionsvermögen der Schichten abhängt, so ändert es an der Untersuchung, abgesehen von diesem konstanten Faktor nichts, wenn wir unsere Aufmerksamkeit gleich auf das ganze Prisma ausdehnen. Legt man durch jede einzelne Molekel, welche gerade die Sehlinie passiert — denn wir haben es hier ganz allgemein mit Dämpfen und Gasen zu thun, da ein Zurückgehen bis auf die Atome bei festen und flüssigen Körpern nicht nötig erscheint — ein dem früheren analoges Koordinatensystem, so darf angenommen werden, daſs im Mittel auch folgende Gleichung gelten werde:

$$\frac{d^2\xi_p}{dt^2} = \sum_1^n m_n\left[\mathfrak{F}(r) + \mathfrak{F}'(r)\frac{(x_n - x_p)^2}{r_{np}}\right](\xi_n - \xi_p) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (203a)$$

welche aus (201) hervorgeht, wenn darin analoge Definitionen wie (173) mit den Bedingungen (175) eingeführt werden. Führt man die Summationen aus, so erhält die Differentialgleichung die Form

$$\frac{d^2\xi_p}{dt^2} = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \dots + a_p\xi_p + \dots + a_n\xi_n \tag{203b}$$

wo nun den gemachten Annahmen zufolge $a_1, a_2, \dots a_n$ als Konstante betrachtet werden dürfen.

Zu eben denselben Gleichungen gelangt man auch durch einen anderen Schlufs, denkt man sich die Aufeinanderfolge der Molekeln, so werden wegen den verschiedenen und gleich wahrscheinlichen Richtungen der Schwingungskomponenten in der Gleichung

$$a^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

wo a die Elongation überhaupt bedeutet, die nach den Koordinaten geschätzten Elongationen im Mittel einander gleich sein, oder wenigstens die Beziehungen

$$\xi = \alpha a,\ \eta = \beta a,\ \zeta = \gamma a$$

in welchen α, β, γ Konstante bedeuten, befolgen. Wir brauchen dann statt der drei Koordinaten deren blofs eine zu berücksichtigen, und erhalten so

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\xi_1}{dt^2} &= a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \dots + a_{1n}\xi_n \\
\frac{d^2\xi_2}{dt^2} &= a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \dots + a_{2n}\xi_n \\
&\dots \\
\frac{d^2\xi_n}{dt^2} &= a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \dots + a_{nn}\xi_n
\end{aligned}\right\} \tag{204a}$$

deren Lösung nun einfach zu n Gleichungen $2n$-ter Ordnung führen, deren Integrale unmittelbar aufgeschrieben werden können. Die Zahl der willkürlichen Konstanten beträgt demnach $2n^2$, während in der That deren nur $2n$ vorhanden sein sollen. Daraus folgt, dafs $2(n-1)n$ Beziehungen zwischen den Integrationskonstanten bestehen müssen.

Wir wollen nun diese Rechnung für die r-te Schwingung andeuten. Die Gleichung

$$\frac{d^2\xi_r}{dt^2} = a_{r1}\xi_1 + a_{r2}\xi_2 + \dots + a_{rn}\xi_n \tag{204b}$$

ist zweimal nach t zu differenzieren, wobei die rechts entstehenden Differentialquotienten zweiter Ordnung aus (204) einzusetzen sind. Die Koeffizienten der einzelnen Verschiebungskomponenten werden dann

$$\left.\begin{aligned}
&\text{In der Gleichung für } \frac{d^4\xi_r}{dt^4} \\
&\overset{(4)}{a}_{r1} = a_{r1}a_{11} + a_{r2}a_{21} + \dots + a_{rn}a_{n1} \\
&\overset{(4)}{a}_{r2} = a_{r1}a_{12} + a_{r2}a_{22} + \dots + a_{rn}a_{n2} \\
&\dots \\
&\overset{(4)}{a}_{rn} = a_{r1}a_{1n} + a_{r2}a_{2n} + \dots + a_{rn}a_{nn} \\
&\text{In der Gleichung für } \frac{d^6\xi_r}{dt^6}
\end{aligned}\right\} \tag{205}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\overset{(6)}{a}_{r1} = \overset{(4)}{a}_{r1} a_{11} + \overset{(4)}{a}_{r2} a_{21} + \cdots + \overset{(4)}{a}_{rn} a_{nn} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\overset{(6)}{a}_{rn} = \overset{(4)}{a}_{r1} a_{1n} + \overset{(4)}{a}_{r2} a_{2n} + \cdots + \overset{(4)}{a}_{rn} a_{nn}
\end{array}\right\}$$

und mithin ganz allgemein in der Gleichung für $\frac{d^{2s}\xi_r}{dt^{2s}}$:

$$\overset{(2s)}{a}_{rq} = \overset{(2s-2)}{a}_{r1} a_{1q} + \overset{(2s-2)}{a}_{r2} a_{2q} + \cdots + \overset{(2s-2)}{a}_{rn} a_{nq}$$

wo die Bedeutung der Indizes leicht ersichtlich ist.

Man hat demnach zur Bestimmung von ξ_r die Gleichung:

$$0 = -\Delta_r \xi_r + D_{r2} \frac{d^2\xi_r}{dt^2} + D_{r4} \frac{d^4\xi_r}{dt^2} + \cdots + D_{r2n} \frac{d^{2n}\xi_r}{dt^{2n}} \quad \ldots \ldots \quad (206)$$

worin

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} \overset{(2)}{a}_{r1} & \overset{(2)}{a}_{r2} & \cdots & \overset{(2)}{a}_{rn} \\ \overset{(4)}{a}_{r1} & \overset{(4)}{a}_{r2} & \cdots & \overset{(4)}{a}_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overset{(2n)}{a}_{r1} & \overset{(2n)}{a}_{r2} & \cdots & \overset{(2n)}{a}_{rn} \end{vmatrix} \qquad \overset{(2)}{a}_{rq} = a_{rq} \quad \ldots \ldots \quad (207)$$

während die D die entsprechenden Unterdeterminanten vorstellen. Die Frage, inwiefern nun die auftretenden Schwingungen verschieden sein werden, ist auf die Untersuchung dieser Determinante zurückgeführt.

Aber schon eine dreiatomige Molekel besitzt 162 Glieder in der Determinante Δ_r, und daher bietet auch diese Methode noch unübersteigbare Hindernisse. Wir werden daher einen ganz andern Weg einschlagen, und nach Stefan[1] das Potential einführen.

Unter Voraussetzung aller jener Vereinfachungen, durch welche das zuletzt behandelte Gleichungssystem entstanden, erhalten wir für das Potential der vorkommenden Schwingungen den Ausdruck:

$$P = A_{11}\xi_1^2 + A_{22}\xi_2^2 + \cdots + 2A_{12}\xi_1\xi_2 + 2A_{13}\xi_1\xi_3 + \cdots \quad \ldots \ldots \quad (208)$$

worin $A_{11}, \ldots A_{n-1}, A_n$ von den Verschiebungen unabhängig sind. Unsere Gleichungen der Schwingungsbewegung lassen sich also auch in der einfachen Form schreiben:

$$m_1 \frac{d^2\xi_1}{dt^2} = \frac{\partial P}{\partial \xi_1}, \quad m_2 \frac{d^2\xi_2}{dt^2} = \frac{\partial P}{\partial \xi_2}, \cdots \quad \ldots \ldots \quad (209)$$

und die Auflösung derselben ist:

$$\xi_1 = a_1 \cos \sigma t, \quad \xi_2 = a_2 \cos \sigma t, \cdots \quad \ldots \ldots \quad (210)$$

wenn

$$-\sigma^2 m_1 a_1 = \frac{\partial P_0}{\partial a_1}, \quad -\sigma^2 m_2 a_2 = \frac{\partial P_0}{\partial a_2}, \cdots \quad \ldots \ldots \quad (211)$$

ist und P_0 den Wert von P bedeutet, welchen das Potential annimmt, wenn an Stelle der ξ das betreffende a gesetzt wird. Dies giebt aber n Beziehungen zwischen den n Koeffizienten, und daher können $n-1$ derselben durch eine, z. B. a ausgedrückt werden. Damit dann die n Gleichungen unter einander verträglich sind, mufs die nach Elimination der $n-1$ Beziehungen übrig bleibende Gleichung eine identische sein,

[1] Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. Wien. LXVI. II. Abth. 1872.

d. h. die Determinante der n linearen Gleichungen muſs Null sein. Aus der letzten Gleichung erhält man dann n Werte für σ^2.

Es seien nun σ_r und σ_s zwei Wurzeln dieser Gleichung, es gelte also

$$\left.\begin{aligned} -\sigma_r^2 m_1 a_1 &= \frac{\partial P_0}{\partial a_1}, \quad -\sigma_r^2 m_2 a_2 = \frac{\partial P_0}{\partial a_2}, \dots \\ -\sigma_s^2 m_1 a_1' &= \frac{\partial P_0}{\partial a_1'}, \quad -\sigma_s^2 m_2 a_2' = \frac{\partial P_0}{\partial a_2'}, \dots \end{aligned}\right\} \qquad (212a)$$

Multipliziert man die Gleichungen der oberen Reihe bezüglich mit $a_1', a_2' \dots$, die der unteren mit $a_1, a_2, \dots$ und subtrahiert, so kommt

$$(\sigma_r^2 - \sigma_s^2)[m_1 a_1 a_1' + m_2 a_2 a_2' + \dots] = \frac{\partial P_0}{\partial a_1} a_1' + \frac{\partial P_0}{\partial a_2} a_2' + \dots - \frac{\partial P_0}{\partial a_1'} a_1 - \frac{\partial P_0}{\partial a_2'} a_2 - \dots \qquad (212b)$$

Nun ist aber P eine homogene Funktion zweiten Grades, für welche bekanntlich folgende Beziehungen bestehen:

$$\frac{dX}{dx_1} x_1' + \frac{dX}{dx_2} x_2' + \dots = \frac{dX'}{dx_1'} x_1 + \frac{dX'}{dx_2'} x_2 + \dots$$

$$\frac{dX}{dx_1} x_1 + \frac{dX}{dx_2} x_2 + \dots = 2X,$$

wenn X' aus X hervorgeht, indem man an Stelle von $x_1, x_2 \dots$ treten läſst $x_1', x_2' \dots$ Die rechte Seite der Gleichung (212b) ist also Null, und da die σ zwei verschiedenen Lösungen angehören sollten, so muſs sein

$$m_1 a_1 a_1' + m_2 a_2 a_2' + \dots = 0 \qquad (213)$$

und diese Relation gilt für zwei beliebige Systeme der a_1, die zwei beliebigen Wurzeln der Gleichung in σ^2 angehören. Aus dieser Beziehung folgt sogleich, daſs keine der Gröſsen σ komplex sein kann. Denn wäre dies der Fall, so müſsten auch die zugehörigen a konjugiert sein. Ihr Produkt wäre dann eine Summe von Quadraten, welche nur durch das Nullwerden jedes Gliedes für sich verschwinden könnte. Daſs die σ nur reell, also σ^2 nur positiv sein können, beweist übrigens auch die Bedingungsgleichung für die Koeffizienten a (212a). Multipliziert man sie der Reihe nach mit $a_1, a_2, \dots$ und addiert, so kommt

$$-\sigma^2(a_1^2 m_1 + a_2^2 m_2 + \dots) = \frac{\partial P_0}{\partial a_1} a_1 + \frac{\partial P_0}{\partial a_2} a_2 + \dots = 2P_0 \qquad (214)$$

P_0 bedeutet die Arbeit, welche die auf die einzelnen Punkte des Systems wirkenden Kräfte leisten, wenn die Punkte aus ihren Gleichgewichtslagen um $\xi_1, \xi_2 \dots$ verschoben werden. Diese Arbeit ist aber wesentlich negativ, die linksseitige Klammergröſse kann nicht negativ sein, also muſs σ^2 positiv sein.

Wäre nun aber die Auflösung des Gleichungssystems (209) in der Form gegeben

$$\xi_1 = A_1 \sin \sigma t, \quad \xi_2 = A_2 \sin \sigma t, \dots \qquad (215)$$

so müſste man ganz so wie früher finden

$$\left.\begin{aligned} m_1 A_1 A_1' + m_2 A_2 A_2' + \dots &= 0 \\ m_1 a_1' A_1 + m_2 a_2' A_2 + \dots &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (216)$$

Die vollständige Lösung lautet also

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= A_1 \sin \sigma t + a_1 \cos \sigma t + A_1' \sin \sigma' t + a_1' \cos \sigma' t + \dots \\ \xi_2 &= A_2 \sin \sigma t + a_2 \cos \sigma t + A_2' \sin \sigma' t + a_2' \cos \sigma' t + \dots \\ &\dots \\ \xi_n &= A_n \sin \sigma t + a_n \cos \sigma t + A_n' \sin \sigma' t + a_n' \cos \sigma' t + \dots \end{aligned}\right\} \qquad (217a)$$

oder der Form nach den früheren Ergebnissen angepaſst

$$\left.\begin{array}{l}\xi_1 = \mathfrak{a}_{11}\sin\sigma_1 t + \mathfrak{A}_{11}\cos\sigma_1 t + \mathfrak{a}_{12}\sin\sigma_2 t + \mathfrak{A}_{12}\cos\sigma_2 t + \cdots + \mathfrak{a}_{1n}\sin\sigma_n t + \mathfrak{A}_{1n}\cos\sigma_n t \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \xi_n = \mathfrak{a}_{n1}\sin\sigma_1 t + \mathfrak{A}_{n1}\cos\sigma_1 t + \mathfrak{a}_{n2}\sin\sigma_2 t + \mathfrak{A}_{n2}\cos\sigma_2 t + \cdots + \mathfrak{a}_{nn}\sin\sigma_n t + \mathfrak{A}_{nn}\cos\sigma_n t\end{array}\right\} \quad (217b)$$

und die dabei bestehenden Bedingungsgleichungen sind:

$$\left.\begin{array}{l}m_1\mathfrak{A}_{11}\mathfrak{A}_{12} + m_2\mathfrak{A}_{21}\mathfrak{A}_{22} + \cdots + m_n\mathfrak{A}_{n1}\mathfrak{A}_{n2} = 0 \\ m_1\mathfrak{A}_{11}\mathfrak{A}_{13} + m_2\mathfrak{A}_{21}\mathfrak{A}_{23} + \cdots + m_n\mathfrak{A}_{n1}\mathfrak{A}_{n3} = 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ m_1\mathfrak{A}_{11}\mathfrak{A}_{1n} + m_2\mathfrak{A}_{21}\mathfrak{A}_{2n} + \cdots + m_n\mathfrak{A}_{n1}\mathfrak{A}_{nn} = 0\end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (218)$$

sowie ganz analoge für die Gröfsen $\mathfrak{a}$ und deren entsprechenden Kombinationen mit den $\mathfrak{A}$. Die Zahl der Bedingungsgleichungen ergiebt sich leicht: Ein jedes $\mathfrak{A}$ mit allen $\mathfrak{A}$ ohne Wiederholung kombiniert giebt $\frac{n(n-1)}{2}$ Gleichungen. Ebenso viele geben die Kombinationen $\mathfrak{a}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$. Im Ganzen hat man also $2n(n-1)$ Bedingungsgleichungen. Da nun aus den früheren Gleichungen in P_0 schon Alles auf eine Konstante reduziert wurde, so geben diese $2n(n-1)$ Unbekannte, womit endlich $2n^2 - 2n(n-1)$, gerade die verlangte Zahl willkürlicher Konstanten der Integration bleibt.

Bezeichnen nun p und q die $2n$ arbiträren Konstanten, so ist auch

$$\begin{array}{l}\xi_1 = \alpha_{11}(p_1\cos\sigma_1 t + q_1\sin\sigma_1 t) + \cdots + \alpha_{1n}(p_n\cos\sigma_n t + q_n\sin\sigma_n t) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \xi_n = \alpha_{n1}(p_1\cos\sigma_1 t + q_1\sin\sigma_1 t) + \cdots + \alpha_{nn}(p_n\cos\sigma_n t + q_n\sin\sigma_n t)\end{array}$$

wobei die α fest bestimmte Gröfsen bedeuten. Diese oder das System der Gleichungen (217) spricht die Wellenlängen und Intensitäten der infolge der Atombewegung entstehenden charakteristischen Schwingungen aus. Die Wellenlängen könnten auch der Gröfse nach bestimmt werden, wenn die Koeffizienten der Potentialfunktion bekannt wären, oder wenigstens die Gesetze, welche die Atombewegungen innerhalb der Molekel regeln. Da dies aber in der That nicht zutrifft, so müssen wir uns einstweilen mit dem formellen Ergebnisse begnügen, und die Wellenlängen und Intensitäten analytisch unbestimmt lassen, um sie durch die Werte, welche die Beobachtung liefert, zu ersetzen.

Wir bemerken schon bei der Ableitung (188) der lebendigen Kraft von Schwingungen eines zusammengesetzten Systems, dafs diese der Summe der Einzelschwingungen gleich war. Es beruhte dieser Satz darauf, dafs das Integral einfacher goniometrischer Funktionen genommen über ein beliebiges Vielfache der Periode verschwindet. Doch mufsten wir, um eben dieses Vielfache zu erhalten, endliche Beobachtungszeit annehmen. Die vorliegenden Entwickelungen geben ein Mittel an die Hand, den Satz: Die gesamte lebendige Kraft (daher auch Intensität) eines schwingenden Punktsystems ist in jedem Augenblicke gleich der Summe der lebendigen Kräfte der einzelnen Schwingungen, ganz allgemein und unabhängig von der Dauer einer angenommenen Beobachtungszeit zu beweisen. Differenziert man nämlich die Gleichungen (217b) nach der Zeit, quadriert und addiert, nachdem man sie der Reihe nach mit $m_1, m_2 \ldots$ multipliziert hat, so erhält man auf der linken Seite

$$m_1\left(\frac{d\xi_1}{dt}\right)^2 + m_2\left(\frac{d\xi_2}{dt}\right)^2 + \cdots$$

während auf der rechten nur die Quadrate der den einzelnen Wurzelwerten σ entsprechenden Glieder bleiben, da alle doppelten Produkte infolge der Gleichungen (218)

wegfallen. Wir haben also Gleichheit der lebendigen Kräfte des ganzen Systems, und der Summe der lebendigen Kräfte aller vorkommenden Einzelnschwingungen.

Nachdem nun die den Atombewegungen entsprechenden Schwingungen in (204) und (217) entwickelt sind und demnach als bekannt angenommen werden können, gehen wir wieder auf die Gleichung (198) zurück, die sich sogleich auf eine der Gleichung (176) vollständig entsprechende Form bringen läßt, wenn wir die bisher gemachten Vereinfachungen für die Atomschwingungen auch für die Ätherschwingungen gelten lassen. Die Gleichung wird dann einfach

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \varkappa \Delta \xi + \sum \left\{ P \sin(pt + \pi) - A\xi \right\} + \varkappa''(\xi'' - \xi) \tag{219}$$

und besitzt ein dem (178) vollkommen analoges Integral, für welches die Gleichung (184) gilt. ξ repräsentiert hier aber nun nicht mehr die in der Axe der x gemessene Elongation, sondern die Elongation unabhängig von der Richtung überhaupt.

Für die Wellenlänge und die Polarisation der Schwingungen gelten die schon früher gefundenen Sätze, so daß wir als Resultat der beiden vorhergegangenen Untersuchungen als wesentlich hervorzuheben haben: Das intramolekulare Medium, welches die Materie durchdringt, übernimmt die Schwingungen der kleinsten Körperteilchen qualitativ unverändert, und quantitativ nur durch einen höchstens von der Natur der Materie und der Qualität der Schwingung bedingten Faktor beeinflußt.

Dieser Satz ist es eigentlich, den wir bei der Ausbildung der Spektralanalyse werden benutzen müssen, und es ist leicht einzusehen, daß derselbe auch unabhängig von den eingeführten Vereinfachungen gelten müsse, die der Behandlung von Schwingungen, wo es wie schon erwähnt, nur auf die konstanten Elemente derselben ankommt, nie zum Vorwurf gemacht werden kann.

4. Besondere Eigenschaften der Schwingungen

Einige Eigenschaften der schwingenden Bewegung liegen bereits in den bisherigen Entwickelungen verborgen, wie die Erscheinung der Interferenz, der Dispersion, der Polarisation. Doch sind dieselben für die Bedeutung der Spektralanalyse von so hoher Wichtigkeit, und nicht nur theoretisch, sondern auch praktisch von so häufiger Anwendung, daß ein näheres Eingehen auf deren mathematische Theorie durchaus geboten erscheint. Wir wollen an dieser Stelle die Spiegelung, Brechung, Dispersion, Diffraktion und Polarisation besprechen.

A. Reflexion und Refraktion der Strahlung

Durch Anwendung vom Satze des geringsten Aufwandes kommt man für den Gang von Lichtstrahlen zu dem Schlusse, daß die Zeit, welche eine Schwingung braucht, um von einem Punkte eines Mediums zu einem Punkte desselben oder eines andern Mediums zu gelangen, ein Maximum oder Minimum ist.[1] Es ist hier nötig, statt des einfacheren Begriffes Weg, den der Zeit einzuführen, da sonst eine Verschiedenheit der Medien nicht berücksichtigt werden könnte.

[1] Helmholtz, Physiol. Optik. S. 239. Leipzig 1867.

Es sei nun a, b, c ein Punkt des einen, a', b', c' ein Punkt des anderen Mediums und beide zugleich dem Strahle angehörig. Die Trennungsfläche der beiden Medien habe die Form

$$z = f(x, y) \qquad (220)$$

und sei nur an die Bedingung stetiger Krümmung gebunden. Im Punkte x, y, z derselben trifft der Strahl diese Fläche. Dann soll nach unserm Prinzipe die Länge des Weges, dividiert durch die Geschwindigkeit der Fortpflanzung in dem betreffenden Medium, ein Minimum werden. Bezeichnet man diese Geschwindigkeit, die wie wir früher schon sahen, stets von der Natur des Mediums abhängig ist, mit c, oder ihren reziproken Wert mit n, so ist die Zeit des Lichtstrahls gegeben durch:

$$t = n\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} + n'\sqrt{(x-a')^2 + (y-b')^2 + (z-c')^2} = nl + n'l' \qquad (221)$$

wenn l einfach die Länge des Weges angiebt. Mit Rücksicht auf die Gleichung der Trennungsfläche werden die Bedingungen des Minimums:

$$\frac{\partial t}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial y} = 0 \qquad (222a)$$

oder entwickelt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{n}{l}\left[(x-a) + (z-c)\frac{\partial z}{\partial x}\right] + \frac{n'}{l'}\left[(x-a') + (z-c')\frac{\partial z}{\partial x}\right] = 0 \\ \frac{n}{l}\left[(y-b) + (z-c)\frac{\partial z}{\partial y}\right] + \frac{n'}{l'}\left[(y-b') + (z-c')\frac{\partial z}{\partial y}\right] = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (222b)$$

Verlegt man den Koordinatenanfangspunkt in den Einfallspunkt der Fläche $z = f(x, y)$, die z-Axe zum Einfallslote nehmend, so werden die Bedingungen einfach:

$$\frac{n}{l}a + \frac{n'}{l'}a' = 0, \quad \frac{n}{l}b + \frac{n'}{l'}b = 0 \qquad (222c)$$

Wir führen nun Polarkoordinaten ein, und nennen den Winkel, den der Strahl mit der z-Axe, der Normalen zur Trennungsfläche der beiden Medien im ersten Medium bildet, α, den Einfallswinkel, den entsprechenden Winkel des zweiten Mediums, α' den Brechungswinkel. Ist weiter Θ, Θ' der Neigungswinkel der Einfalls- und Brechungsebene zur Ebene x, y, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} a &= l\sin\alpha\cos\Theta \qquad & a' &= l'\sin\alpha'\cos\Theta' \\ b &= l\sin\alpha\sin\Theta & b' &= l'\sin\alpha'\sin\Theta' \\ c &= l\cos\alpha & c' &= l'\cos\alpha' \end{aligned}\right\} \qquad (223)$$

Transformiert man mit diesen Werten die Gleichungen (222c), so kommt:

$$n\sin\alpha\cos\Theta = -n'\sin\alpha'\cos\Theta', \quad n\sin\alpha\sin\Theta = -n'\sin\alpha'\sin\Theta' \qquad (224)$$

und durch Quadrieren und Addieren:

$$n^2\sin^2\alpha = n'^2\sin^2\alpha' \quad \text{oder} \quad \frac{n}{n'} = \pm\frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha} \qquad (225)$$

Es sind nun zwei Fälle möglich: entweder wird der Strahl an der Trennungsfläche reflektiert und kehrt in das alte Medium zurück, wo dann $n' = n$ ist, oder er tritt in das neue Medium über. Im ersten Falle ist, da $\sin\alpha$ stets im ersten Quadranten zu nehmen ist, α' im vierten Quadranten gelegen; also

$$\sin\alpha' = -\sin\alpha$$

$$\cos\Theta' = \cos\Theta, \quad \sin\Theta' = \sin\Theta, \quad \text{daher } \Theta' = \Theta,$$

wie aus (224) folgt; die Einfalls- und Reflexionsebene fallen zusammen. Dies giebt folgende Gesetze der Reflexion:

Der einfallende und reflektierte Strahl bilden mit dem Einfallslote denselben Winkel und liegen mit ihm in derselben Ebene.

Im zweiten Falle liegt der Brechungswinkel stets zwischen 90° und 180°, $\sin\alpha$ ist daher positiv. Daher folgt wieder

$$\cos\Theta' = -\cos\Theta, \quad \sin\Theta' = -\sin\Theta \quad \text{oder} \quad \Theta' = \Theta + 180^0$$

Daraus folgt als Gesetz der Brechung:

Die Sinusse des Einfalls- und Brechungswinkel verhalten sich, wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Strahlung in den betreffenden Medien. Einfallender und gebrochener Strahl liegen mit dem Einfallslote in derselben Ebene.

Da das Verhältnis der Sinusse des Einfalls- und Brechungswinkels der Beobachtung zugänglich ist, so pflegt man das so bestimmbare Verhältnis $\frac{n'}{n} = \frac{c}{c'}$, den relativen Brechungs-Koeffizienten (oder -Index) der beiden Medien zu nennen. Substituiert man für das erste Medium den freien Äther des Weltraumes, in welchem $c = 1$ ist, so nennt man das Verhältnis

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = n \tag{226}$$

den absoluten Brechungskoeffizienten des Mediums. Er ist, wie schon erwähnt, der reziproke Wert der auf den Weltraum als Einheit bezogenen Strahlungsgeschwindigkeit.

Die beiden abgeleiteten Gesetze lassen sich für eine beliebige Zahl von Flächen, $z_1 = f_1(x_1, y_1)$, $z_2 = f_2(x_2, y_2)$ ... $z_n = f_n(x_n, y_n)$ erweitern, wenn nur die Flächen der Bedingung stetiger Krümmung genügen. Der Satz ist dann dahin auszusprechen, daſs der Weg des Lichtstrahles, der eine beliebige Anzahl von brechenden Medien durchsetzt, so beschaffen sein muſs, daſs die zum Durchlaufen derselben nötige Zeit ein Minimum werde. Wir werden diesen Satz noch später im instrumentellen Teile der Spektralanalyse zu benutzen haben.

Ein häufig wiederkehrender Spezialfall der Brechung ist der, daſs der Einfallswinkel $\alpha = 90^0$ wird, dann ist offenbar durch

$$\sin\alpha' = \frac{1}{n}$$

das Maximum des Brechungswinkels gegeben, welches er noch annehmen kann. Ist der Einfallswinkel gröſser als 90°, so findet gar keine Brechung, sondern nur Reflexion, die sogenannte totale Reflexion statt.

B. Dispersion der Strahlung.

a) Vergleicht man den in (226) gefundenen Satz, in welchen wir nun i als Einfalls-, r als Refraktionswinkel bezeichnen, unter Berücksichtigung der Bedeutung von $n = \frac{1}{c}$,

$$c = \frac{\sin r}{\sin i} \tag{227}$$

mit dem allgemein giltigen Gesetze (184), so erhalten wir die bemerkenswerte Beziehung

$$\left(\frac{\sin r}{\sin i}\right)^2 = a_0 + a_1\lambda^2 + \frac{a_2}{\lambda^2} + \frac{a_4}{\lambda^4} + \dots \tag{228}$$

welche dem in (19) und (129) gefundenen Resultate von der Unabhängigkeit der Fort-

pflanzungsgeschwindigkeit von den Elementen der Schwingung zu widersprechen scheint. Worin dieser Widerspruch liegt, werden wir sogleich finden.

Die vorstehende Gleichung sagt zunächst aus, dafs ein Komplex von gleich auffallenden Strahlen verschieden gebrochen wird, so zwar, dafs jeder Wellenlänge ein ganz bestimmter Brechungswinkel zukommt. Der Komplex wird daher in die einzelnen Strahlen zerlegt, dispergiert, und wir haben somit in der Abhängigkeit des Brechungskoeffizienten von der Wellenlänge ein Mittel gefunden, ein Spektrum räumlich getrennt darzustellen und selbst die Wellenlängen zu bestimmen, wenn es irgend gelingt, zur Kenntnis der nur von der Beschaffenheit des Mediums abhängigen Konstanten a_0, $a_1, \ldots$ zu gelangen.

Sehen wir nun vorerst, unter welchen Annahmen überhaupt die Dispersionsgleichung aus der Gleichung der schwingenden Bewegung hervorgeht. Offenbar dadurch, dafs die Vorraussetzung der Giltigkeit des einfachen Elastizitätsgesetzes bei der Unterscheidung feinerer qualitativer Verschiedenheiten der Schwingungen nicht mehr zulässig ist. Und in der That erhielten wir die Dispersionsformel aus dem Systeme (176) nur durch die Annahme, dafs wegen der symmetrischen Lagerung der beeinflufsenden Partikelchen die Glieder der ersten Potenz der Elastizitätskräfte verschwinden, daher zum mindesten die zweiten Potenzen dieser Kräfte einzuführen sind. Setzt man dementsprechend nach (20):

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c_2{}^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + c_3 \frac{\partial^3 s}{\partial x^3} + c_4 \frac{\partial^4 s}{\partial x^4} + \cdots \quad \ldots\ldots \quad (229)$$

wo die Koeffizienten c eine rasch abnehmende Reihe darstellen werden, und das Integral dieser Gleichung in der Form

$$s = A \sin(at + \alpha x + \beta) \quad \ldots\ldots \quad (230)$$

mit A und β als den willkürlichen Konstanten, so kommt als Bedingungsgleichung für $a = \frac{2\pi c}{\lambda}$ (9, 12):

$$[-a^2 + c_2{}^2\alpha^2 - c_4\alpha^4 + c_6\alpha^6 - \cdots] \sin(at + \alpha x + \beta) = [-c_3\alpha^3 + c_5\alpha^5 - \cdots] \cos(at + \alpha x + \beta)$$

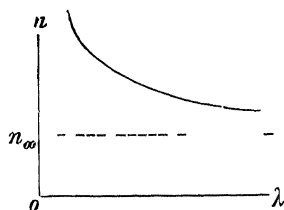
welche nur durch die Annahme $c_3 = c_5 = \cdots = 0$ befriedigt werden kann. Die vollständige Schwingungsgleichung enthält also nur gerade Potenzen der Elastizitätskräfte. Nun ist aber nach (13) $\alpha = -\frac{2\pi}{\lambda}$, und daher hat man:

$$\frac{4\pi^2 c^2}{\lambda^2} = \frac{4\pi^2 c_2{}^2}{\lambda^2} - \frac{(2\pi)^4}{\lambda^4} c_4 + \frac{(2\pi)^6}{\lambda^6} c_6 - \cdots \quad \ldots\ldots \quad (231a)$$

oder anders geschrieben:

$$c^2 = a_0 + \frac{a_2}{\lambda^2} + \frac{a_4}{\lambda^4} + \cdots \quad \ldots\ldots \quad (231b)$$

und diese Formel, die mit drei Konstanten im allgemeinen und für wenig ausgedehnte Spektralbezirke schon alle erwünschte Genauigkeit giebt, ist gewöhnlich unter dem Namen der Cauchyschen bekannt. Sie unterscheidet sich von der früheren nur durch das Fehlen des Gliedes λ^2. In ihr bedeutet das Glied $\frac{1}{\sqrt{a_0}}$ den Brechungsindex für die unendlich lange Welle, und wird gewöhlich als das von der Wellenlänge unabhängige Glied eingeführt. Da, wie man leicht sieht, bei wachsender Wellenlänge der Brechungswinkel abnimmt, so folgt, dafs Wellen kleiner Längen nach der Brechung stärker

Fig 1

von der ursprunglichen Richtung abweichen man nennt daher haufig die kurzen Wellen auch brechbare, die langen weniger brechbare Strahlen Die Gestalt der Kurve (231b), die zugleich das prismatische Spektrum charakterisiert, ist in Fig 1 gegeben

b) Die eingeschlagene Methode die Dispersion durch Berucksichtigung der hoheren Potenzen der Elastizitatskrafte zu bestimmen, fuhrt stets auf Resultate, die mehr Interpolationsformeln als genau definierbare Bestimmungsgleichungen genannt werden mussen, da sich die physikalische Bedeutung der Konstanten nicht angeben lafst Zudem gilt sie nur fur eine Klasse — allerdings die bei weitem grofsere Klasse, der Korper, welche die Strahlung nach Mafsgabe ihrer Wellenlange dispergieren, wahrend doch Christiansen und spater Kundt einige Stoffe fanden, welche diesem Gesetze nicht gehorchen Ketteler stellte sich nun die Aufgabe, diese anomale Dispersion mathematisch zu verfolgen, und da die erhaltenen Gleichungen naturlich die gewohnliche Dispersion als Spezialfall enthalten, die Konstanten derselben physikalisch definierbare Begriffe sind, und die ganze Ableitung in vielen Stucken sehr lehrreich ist, und wieder neues Licht auf die Handhabung des Kalkuls wirft, welchen der Einflufs ponderabler Korperteilchen auf die Atherschwingungen notig macht, durfen wir uns nicht versagen, auf dieselbe hier naher einzugehen Spater wird uns diese Gleichung ubrigens noch von besonderem Nutzen sein

Die Dispersion solcher Korper besteht im allgemeinen nun darin, dafs die kleineren Wellen weniger gebrochen sind als die langeren, und das Spektrum infolgedessen so aussieht, als ob dessen beide Halften gegen einander verschoben waren An der Beruhrungsstelle der beiden Spektralhalften entsteht eine farblose Zone, eine Diskontinuitat

Wir wahlen zunachst einen Korper, in dessen Dispersionskurve nur eine einzige Diskontinuitatsstelle vorkommt In einem solchen hat der freie Ather die folgende Schwingungsgleichung

$$\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \tag{232}$$

Wegen der Wechselwirkung der ponderablen Teilchen tritt nun im Innern des Korpers noch eine Kraft, und zwar eine Widerstandskraft auf, welche dem rechten Teile der Gleichung hinzugefugt werden mufs Denken wir uns dieselbe so beschaffen, als ob sie die Elastizitat des Athers veranderte, so wird die noch hinzuzufugende Kraft sein $E \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}$ Man hat also fur die wirklich stattfindende Atherbewegung die Gleichung

$$\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = (a^2 + E) \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \tag{233}$$

Eine zweite Gleichung erhalten wir aus den Schwingungen der Korperteilchen die wir als Hindernis der freien Bewegung des Athers betrachten Die auf die Korperteilchen einwirkende Kraft hangt nun ab von der Krummung der dieselben verbindenden Wellenlinie, dann aber auch von der Elongation derselben Diese Kraft setzt sich also aus einer Elastizitatskraft $L \frac{\partial^2 x}{\partial y^2}$ und der Zugkraft Kx zusammen Die Korperteilchen schwingen also nach dem Gesetze

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = E' \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + Kx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (234)$$

Die Gröfsen E, E', K enthalten die Wellenlängen, und wir machen in Bezug auf dieselben die wahrscheinliche Annahme, dafs sie einander nach demselben Faktor proportional sind, setzen also

$$E = a\varepsilon, \; E' = a\varepsilon', \; K = a\varkappa \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (235)$$

Dabei soll nun a allein von der Bewegung abhängen, dagegen die ε Konstante sein, welche nur von der Art der Molekularstruktur abhängen. Die Differentialgleichungen der Bewegung sind also:

$$\left.\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= (\alpha^2 + a\varepsilon) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \\ m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= a\varepsilon' \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + a\varkappa x \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (236)$$

Aufserdem können wir noch eine Kontinuitätsbedingung aufstellen, die aus dem Prinzipe der Erhaltung der lebendigen Kraft folgt. Sind nämlich C, C' und C_0 die Maximalgeschwindigkeiten der schwingenden Partikeln im Äther des Körpers, der Körperteilchen, und den Ätherteilchen des Weltraumes, so mufs sein:

$$\mu C^2 + mC'^2 = \mu C_0^{\,2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (237)$$

sollen anders an der Begrenzung des Körpers nicht Risse der Ätherkontinuität vorkommen. Da die Integrale der Gleichungen (236) Schwingungen darstellen sollen, so können wir schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{y}{\lambda} - \Theta \right) \\ x &= C \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{y}{\lambda} - \Theta \right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (238)$$

mit den durch Rücksetzung sich ergebenden Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mu}{T^2} &= \frac{\alpha^2 + a\varepsilon}{\lambda^2} \\ \frac{m}{T^2} &= \frac{a\varepsilon'}{\lambda} - \frac{a\varkappa}{4\pi^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (239)$$

Eliminiert man aus beiden Gleichungen a, so kommt, wenn man noch $\frac{\varkappa}{4\pi^2} = \varkappa'$ setzt:

$$\frac{\mu}{T^2} = \frac{1}{\lambda^2} \left[\alpha^2 - \frac{\frac{m}{T^2}\varepsilon}{\varkappa' - \frac{\varepsilon'}{\lambda^2}} \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (240)$$

Ist nun c' die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung im Körper, c dieselbe Gröfse im Weltraum, wo $m = 0$ zu setzen ist, so erhält man, da nach (232) ist:

$$c^2 = \frac{\alpha^2}{\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (241)$$

und der Beziehung $\lambda = c'T$ zufolge:

$$\mu = \frac{1}{c'^2} \left[\alpha^2 - \frac{m\varepsilon c'^2}{\varkappa'\lambda^2 - \varepsilon'} \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (242)$$

Wir setzen nun endlich:

$$\frac{\varepsilon'}{\varkappa'} = L^2, \; \frac{m\varepsilon}{\mu\varepsilon'} = D \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (243)$$

und fuhren den Brechungsexponenten $n = \frac{c}{c'}$ ein Dadurch erhalten wir nun aus der in

$$c\left[\mu + \frac{m\varepsilon}{\varkappa\lambda - \varepsilon'}\right] = \mu c$$

ubergefuhrten Gleichung (242) die neue, das Dispersionsgesetz charakterisierende Beziehung

$$n^2 - 1 = \frac{D}{\frac{\lambda^2}{L^2} - 1} \tag{244}$$

Fur eine unendlich lange Welle wird also $n = 1$, und fur unendlich kurze Wellen $n = 1 - D$ Ist also D positiv, so ist die Geschwindigkeit im Korper grofser als c

Statt der aufgestellten Kontinuitatsgleichung (237) kann man nach (238) auch setzen

$$\mu\frac{A}{T} + m\frac{C^2}{T} = \mu\frac{A^2}{T_0} \tag{245a}$$

wo T_0 die der Wellenlange λ entsprechende Schwingungsdauer im leeren Raume bedeutet Da man folgende Beziehungen hat

$$\lambda = c'T = cT_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{\mu}}\, T_0$$

so verwandelt sich auch die vorstehende Gleichung in

$$\mu\frac{A^2}{T} + m\frac{C^2}{T^2} = \frac{A^2}{\lambda}\,\mu c^2 \tag{245b}$$

Die Kontinuitatsgleichung soll aber nicht nur im Zeitpunkte, da die Maximalelongationen erreicht sind, gelten, sondern uberhaupt in jedem Augenblicke Deshalb durfen wir statt der Amplituden die Elongationen ξ und x einfuhren Dies ergiebt

$$\mu\frac{\xi}{T} + m\frac{x}{T} = \frac{\xi}{\lambda}\,\mu c \tag{245c}$$

oder nach Substitution von $T = \frac{\lambda}{c}$

$$\mu\frac{\xi}{\lambda} + m\frac{x}{\lambda^2} = \frac{\xi}{\lambda^2}\,\mu n \tag{245d}$$

woraus wir finden

$$n^2 - 1 = \frac{mx^2}{\mu\xi^2} \tag{246}$$

Man nennt $n - 1$ die brechende Kraft eines Stoffes, und hat daher den Satz Die brechende Kraft ist gleich dem Verhaltnisse, in welchem sich eine gegebene lebendige Kraft auf die Korper- und Atherteilchen verteilt

Die beiden Gleichungen (244) und (246) mussen naturlich identisch sein Da dies auf den ersten Blick wohl nicht in die Augen springt, da x und ξ die Wellenlangen nur implizite enthalten, wollen wir auf den Beweis naher eingehen Wir multiplizieren die Gleichungen (236) mit bezuglich ξ und x und addieren die beiden Produkte

$$\mu\xi\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} + mx\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \alpha^2\xi\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \alpha\varepsilon\xi\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \alpha\varepsilon x\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + \alpha\varkappa x^2$$

Die Differentialquotienten ersetzen wir aus (238) und erhalten so

$$\mu\frac{A^2}{T^2} + m\frac{C^2}{T^2} = \alpha^2\frac{A}{\lambda^2} + \alpha\varepsilon\frac{A^2}{\lambda} + \alpha\varepsilon\frac{C}{\lambda^2} - \frac{\alpha\varkappa C}{4\pi}$$

Multipliziert man auf beiden Seiten mit $\cos^2 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{y}{\lambda}-\Theta\right)$ und vergleicht das Resultat mit (245c), so kommt:

$$\frac{\xi^2}{\lambda^2}\mu c^2 = \mu c^2\frac{\xi^2}{\lambda^2} + a\varepsilon\frac{\xi^2}{\lambda^2} + a\varepsilon'\frac{x^2}{\lambda^2} - \frac{a\varkappa}{4\pi^2}x^2$$

worin sogleich $a^2 = \mu c^2$ gesetzt wurde. Aus dieser Gleichung folgt:

$$\frac{a}{\lambda^2}\xi^2\left[\varepsilon + \varepsilon'\frac{x^2}{\xi^2} - \frac{\varkappa}{4\pi^2}\lambda^2\frac{x^2}{\xi^2}\right] = 0.$$

Ersetzt man hier $\frac{x^2}{\xi^2}$ durch dessen Wert aus (246) und führt wieder die Definitionen L^2 und D (243) ein, so gelangt man wieder zu dem Dispersionsgesetze:

$$D + (n^2-1)\left(1-\frac{\lambda^2}{L^2}\right) = 0.$$

Auf Grund dieser Gleichung wollen wir nun die Dispersionskurve untersuchen. Statt der Wellenlänge λ im brechenden Medium setzen wir die Wellenlänge im Weltäther $l = \lambda n$, und erhalten so:

$$(n^2-1)\left(\frac{l^2}{n^2L^2}-1\right) = D \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (247)$$

oder in n die Gleichung

$$n^4L^2 - n^2(l^2 + L^2 - DL^2) + l^2 = 0$$

deren Auflösung ist:

$$n^2 = \tfrac{1}{2}\left[1 - D + \frac{l^2}{L^2}\right] \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}\left[1 - D + \frac{l^2}{L^2}\right]^2 - \frac{l^2}{L^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (248a)$$

oder unter Berücksichtigung der Formel:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{a^2-b^2}} = \sqrt{\frac{a+b}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-b}{2}}$$

auch die folgende Gestalt annimmt:

$$n = \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(1+\frac{l^2}{L^2}\right)^2 - D} \pm \sqrt{\left(1-\frac{l^2}{L^2}\right)^2 - D}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (248b)$$

Die so charakterisierte Dispersionskurve besteht aus zwei Zweigen; für $\lambda = 0$ ist der Brechungsindex $n_0 = 0$ oder $\sqrt{1-D}$. Jeder Wellenlänge entsprechen zwei Brechungsindizes, mit Ausnahme des Falles, wo sich die beiden Zweige begegnen, also für jenes l_0, für welches in n^2 der zweite Radikand verschwindet. Man hat dafür:

$$\tfrac{1}{2}\left[1 - D + \frac{l_0^2}{L^2}\right] = \frac{l_0}{L}$$

folglich:

$$\frac{l_0'}{L} = 1 - \sqrt{D}, \text{ und } \frac{l_0''}{L} = 1 + \sqrt{D}$$

Die dazu gehörigen Brechungsindizes sind:

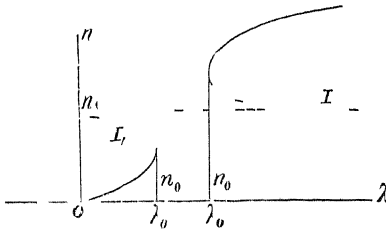
$$n_0' = \sqrt{1-\sqrt{D}}, \text{ und } n_0'' = \sqrt{1+\sqrt{D}}.$$

Für $\lambda = +\infty$ und $\lambda = -\infty$ nähern sich die beiden Äste derselben Asymptote, und endlich ist die Kurve imaginär zwischen l_0' und l_0'', also in einer Breite von $l_0'' - l_0' = 2L\sqrt{D}$. Man überzeugt sich davon leicht, wenn man setzt:

$$\left(1-\frac{l}{L}\right)^2 - D = -\varepsilon.$$

Dann wird

$$l = L(1 \pm \sqrt{D-\varepsilon}) \lessgtr \begin{matrix} l_0'' \\ l_0' \end{matrix}$$

Fig 2

und somit hat die Kurve das in der Figur 2 dargestellte Aussehen Besonders genau befolgt Schwefelkohlenstoff diese Dispersionskurve, und zwar entsprechen die Beobachtungen dem Zweige I Der Zweig I_1 und der imaginäre Teil gehören demnach dem Ultraviolett an

c) Die abgeleiteten Formeln lassen sich sofort verallgemeinern, wenn es sich darum handelt, auch den Ätherteilchen Verschiebungskräfte $\mathfrak{k}\xi$, wo $\mathfrak{k}$ ... ist, zuzuerkennen Die Differentialgleichung der Ätherbewegung wird dann

$$\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t} = (\alpha^2 + a\varepsilon) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t} + a\mathfrak{k}\xi \tag{249}$$

und die Bedingungsgleichungen lauten in diesem Falle wenn man $\mathfrak{k} = \frac{\mathfrak{f}}{4\pi^2}$ schreibt

$$\frac{\mu}{T^2} = \left[\alpha^2 + \frac{(\varepsilon - \mathfrak{k}\lambda^2)\frac{m\lambda^2}{T^2}}{\varepsilon - \varkappa'\lambda^2}\right] \frac{1}{\lambda} \tag{250}$$

woraus ähnlich wie früher, folgt

$$n^2 - 1 = \frac{m}{\mu} \frac{\varepsilon - \mathfrak{k}'\lambda^2}{\varepsilon - \varkappa\lambda^2} \tag{251}$$

die sich dann analog (244) umgestalten läfst

Formeln für mehrere Diskontinuitätsstellen Nach Kettelers Rechnungen giebt es kein Medium, welches der oben abgeleiteten Dispersionsformel in Strenge für den ganzen Umfang der Strahlung genügte Ketteler zerlegt daher die Medien mit mehreren Diskontinuitätsstellen in so viele optisch einfache Elemente, als in demselben Absorptionsstreifen vorkommen

Wäre also deren Zahl r, so erhielte man r Differentialgleichungen für die Schwingungen der r qualitativ verschiedenen Körperteilchen, von den Massen m, und daneben eine für die Schwingungen des Äthers um r Zusatzglieder vermehrte Deformationsgleichung des Weltäthers Wir setzen im folgenden diese Zusatzglieder negativ Die Gleichungen sind also

$$\left.\begin{aligned}
\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - \sum_1^r \left(a_\varrho \varepsilon_\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + a_\varrho \mathfrak{k}_\varrho \xi\right) \\
m_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} &= a_1 \varepsilon_1' \frac{\partial^2 x_1}{\partial y^2} + a_1 \varkappa_1 x_1 \\
m_2 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= a\, \varepsilon_2' \frac{\partial^2 x_2}{\partial y^2} + a_2 \varkappa\, x
\end{aligned}\right\} \tag{252}$$

Die Integration derselben giebt den obigen ganz analoge Gleichungen, zwischen ihren Konstanten bestehen die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mu}{T^2} &= \frac{\alpha^2}{\lambda^2} - \sum_1^r \left(a_\varrho \varepsilon_\varrho \frac{1}{\lambda^2} - a_\varrho \frac{\mathfrak{k}_\varrho}{4\pi^2}\right) \\ \frac{m_\varrho}{T} &= \frac{a_\varrho \varepsilon_\varrho'}{\lambda^2} - \frac{a_\varrho \varkappa_\varrho}{4\pi^2}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (253)$$

und eliminiert man aus ihnen a_ϱ, so kommt:

$$\frac{\mu}{T^2} = \frac{\alpha^2}{\lambda^2} - \sum_1^r \frac{\frac{m_\varrho}{T^2}\left[\frac{\varepsilon_\varrho}{\lambda^2} - \mathfrak{k}'\right]}{\left[\frac{\varepsilon_\varrho'}{\lambda^2} - \varkappa'\right]} \quad \ldots \ldots \ldots (254)$$

indem man wieder $4\pi^2\varkappa' = \varkappa$, $4\pi^2\mathfrak{k}' = \mathfrak{k}$ setzt. Mit Rücksicht auf $\alpha^2 = \mu c^2$, $\lambda = c'T$ wird dieses Resultat:

$$1 = \frac{c^2}{c'^2} - \sum_1^r \frac{m_\varrho}{\mu} \frac{\varepsilon_\varrho - \mathfrak{k}'\lambda^2}{\varepsilon_\varrho' - \varkappa'\lambda^2} \quad \ldots \ldots \ldots (255a)$$

Dividiert man Zähler und Nenner mit ε'_ϱ, und addiert zum Bruche $-\frac{\mathfrak{k}'}{\varkappa'} + \frac{\mathfrak{k}'}{\varkappa'}$, so kann die vorstehende Gleichung auch in der Form geschrieben werden:

$$n^2 - 1 = \sum_1^r \frac{m_\varrho \mathfrak{k}'_\varrho}{\mu \varkappa'_\varrho} + \sum_1^r \frac{m_\varrho}{\mu} \frac{\frac{\mathfrak{k}_\varrho'}{\varkappa_\varrho'} - \frac{\varepsilon_\varrho}{\varepsilon_\varrho'}}{\frac{\varkappa_\varrho'}{\varepsilon_\varrho'}\lambda^2 - 1} \quad \ldots \ldots (255b)$$

Setzt man endlich $n = n_\infty$ für $\lambda = \infty$, so wird

$$\sum_1^r \frac{m_\varrho \mathfrak{k}_\varrho'}{\mu \varkappa_\varrho'} = n_\infty^2 - 1 \quad \ldots \ldots \ldots (256)$$

und definiert man weiter

$$\frac{m_\varrho}{\mu}\left[\frac{\mathfrak{k}_\varrho'}{\varkappa_\varrho'} - \frac{\varepsilon_\varrho}{\varepsilon_\varrho'}\right] = D', \quad \frac{\varepsilon_\varrho'}{\varkappa_\varrho'} = L^2 \quad \ldots \ldots \ldots (257)$$

so verwandelt sich (255) in

$$n^2 - n_\infty^2 = \sum_1^r \frac{D'}{\frac{\lambda^2}{L^2} - 1} \quad \ldots \ldots \ldots (258)$$

das allgemeinere Dispersionsgesetz, welches bezüglich der Form mit dem Gesetze für einen Absorptionsstreifen allein vollkommen übereinstimmt.

Wir untersuchen noch die Gleichung, welche das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft ausdrückt. Nach dem schon früher befolgten Vorgange erhalten wir aus den ursprünglichen Gleichungen die folgende:

$$\mu\xi \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \sum_1^r m x \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \alpha^2 \xi \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - \sum_1^r a \left[\varepsilon \xi \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - \varepsilon' x \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + \mathfrak{k}\xi^2 - \varkappa x^2\right] \quad . \; . \; (259a)$$

welcher nach Ersetzung der Differentialquotienten aus den Lösungen (252) entspringt:

$$\frac{\mu \xi^2}{T^2} + \sum_1^r m \frac{x^2}{T^2} = \alpha^2 \frac{\xi^2}{\lambda^2} - \sum_1^r a \left[\varepsilon \frac{\xi^2}{\lambda^2} - \varepsilon' \frac{x^2}{\lambda^2} - \mathfrak{k}'\xi^2 + \varkappa' x^2\right] \quad . \; . \; . \; (259b)$$

Vergleicht man dieses Resultat mit der Gleichung der Kontinuität:

$$\mu\frac{\xi^2}{T^2}+\sum_1^r m\frac{x^2}{T^2}=\mu c^2\frac{\xi}{\lambda^2} \tag{260}$$

so folgt mit Rücksicht auf den Wert von α

$$\sum_1^r a\left[\varepsilon\frac{\xi^2}{\lambda^2}-\varepsilon\frac{x}{\lambda}-\mathfrak{k}\,\xi+\varkappa' x^2\right]=0 \tag{261}$$

Sind die einzelnen optischen Elemente des Mediums von einander ganz unabhängig, also willkürlich aus einfachen Bestandteilen zusammengefugt, dann erhält man r einfache Gleichungen von der Form

$$\varepsilon_\varrho-\mathfrak{k}_\varrho\lambda-(\varepsilon_\varrho'-\varkappa_\varrho'\lambda^2)\frac{\mu}{m_\varrho}(n-1) \tag{262}$$

welche wieder neben der Identität der beiden abgeleiteten Resultate sprechen

Die Dispersionskurve ist in diesem Falle gleich der Summe der r Partialkurven, deren eine wir schon früher untersuchten Jede einzelne dieser Kurven besitzt einen imaginären Streifen, und hat $n=n_\infty$ zur Asymptote Ihre Mittelpunkte aber werden zumeist in den unzugänglichen Teilen des Spektrums, im Ultrarot oder Ultraviolett liegen Wir wollen auch diesen Fall in Fig (5) graphisch darstellen und interpretieren Die vertikalen Linien sind die durch die Mittelpunkte der Absorptionsstreifen gezogenen Ordinaten, deren Länge, wie früher durch diejenige n gegeben ist, für welches die biquadratische Gleichung nur eine Lösung lieferte Die Horizontale bedeutet die gemeinschaftliche Asymptote für $n=n_\infty$, und die punktierten Linien jenen Zweig der Partialkurven, welcher, wie früher erwähnt, bei der Dispersion des Schwefelkohlenstoffes eine Rolle spielt Liegen die Mittelpunkte, wie in der Figur, im Ultraviolett so bewirken diese nur eine geringe Dispersion im sichtbaren Teile des Spektrums und der Haupteinflufs kommt derjenigen Partialkurve zu, welche wie in der Figur bei Violett, in der Nähe des sichtbaren Spektrums den Absorptionsstreifen erzeugt Damit reduziert sich im Wesentlichen die Dispersionskurve auf die schon vorhin behandelte Partialkurve

d) *Betrachtung des imaginären Teiles der Dispersionskurve* Wir haben gefunden, dafs der Brechungsindex innerhalb des Absorptionsstreifens imaginär wird, und es ist daher von Interesse, die physikalische Bedeutung dieser Erscheinung näher zu untersuchen Setzen wir $n=a+bi$, womit nach (246) auch

$$x=x_1+x_2 i,\quad \xi=\xi_1+\xi_2 i,\quad n=a+bi \tag{263}$$

gesetzt werden mufs, so folgt aus der Gleichung (260), die wir auch in der Form schreiben können

$$n^2-1=\frac{\sum m x^2}{\mu\xi^2}$$

für komplexe Gröfsen die nachstehende

$$(a+bi)^2-1=\frac{\sum m(x_1+x_2 i)^2}{\mu(\xi_1+\xi_2 i)^2}=\frac{M(\chi_1+\chi_2 i)^2}{\mu(\xi_1+\xi_2 i)^2}=\frac{M}{\mu}\frac{(\chi_1+\chi_2 i)^2(\xi_1-\xi_2 i)^2}{(\xi_1^2+\xi_2^2)^2} \tag{264}$$

Trennt man Reelles und Imaginäres, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}a^2-b^2-1&=\frac{M}{\mu}\frac{(\chi_1^2-\chi_2^2)(\xi_1^2-\xi_2^2)+4\chi_1\chi_2\xi_1\xi_2}{(\xi_1^2+\xi_2^2)^2}\\ 2ab&=2\frac{M}{\mu}\frac{\chi_1\chi_2(\xi_1^2-\xi_2^2)-\xi_1\xi_2(\chi_1^2-\chi_2^2)}{(\xi_1^2+\xi_2^2)^2}\end{aligned}\right\} \tag{265 a}$$

und daraus folgt nach einfacher Umformung

$$\left.\begin{aligned} a^2-b^2-1 &= \frac{M}{\mu}\,\frac{(\chi_1\xi_1+\chi_2\xi_2)^2-(\chi_2\xi_1-\chi_1\xi_2)^2}{(\xi_1^2+\xi_2^2)^2} \\ ab &= \frac{M}{\mu}\,\frac{(\chi_1\xi_1+\chi_2\xi_2)(\chi_2\xi_1-\chi_1\xi_2)}{(\xi_1^2+\xi_2^2)^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (265\text{b})$$

Um nun den Sinn des Imaginären in den Schwingungen zu ersehen, nehmen wir allgemein die Gleichung irgend einer Schwingung zu

$$(u+vi)e^{(\alpha+\beta i)i} = re^{-\beta}e^{(\alpha+x)i}$$

an, wenn nun r und x reelle Gröfsen bedeuten. Durch Einführung der trigonometrischen Funktionen erhält man, Reelles und Imaginäres trennend:

$$u\cos\alpha - v\sin\alpha = r\cos(\alpha+x)$$
$$u\sin\alpha + v\cos\alpha = r\sin(\alpha+x)$$

und daraus sodann die Gleichung:

$$(u+vi)e^{(\alpha+\beta i)i} = e^{-\beta}\sqrt{u^2+v^2}\,.\,e^{i\,\operatorname{arctg}\frac{u\sin\alpha+v\cos\alpha}{u\cos\alpha-v\sin\alpha}}$$

Das Imaginäre ist also durch Einführung der Phasenverschiebung

$$\operatorname{arctg}\frac{u\sin\alpha+v\cos\alpha}{u\cos\alpha-v\sin\alpha}-\alpha$$

verschwunden. Ebenso wollen wir auch hier verfahren; ist nämlich im Innern des imaginären Streifens die wahre Elongation ξ_0, so setzen wir

$$\xi_1 = \xi_0\cos\varDelta,\quad \xi_2 = \xi_0\sin\varDelta \quad \ldots\ldots \quad (266)$$

entsprechend dem jetzt durchgeführten Gedankengange, nach welchem ist

$$u = r\cos x,\quad v = r\sin x.$$

Ebenso wollen wir auch den Schwingungen der Körperteilchen eine gewisse Phasenverschiebung zulegen, und setzen:

$$\chi_1 = \chi_0\cos D,\quad \chi_2 = \chi_0\sin D \quad \ldots\ldots \quad (267)$$

Schreibt man nun noch

$$D-\varDelta = \Theta \quad \ldots\ldots \quad (268)$$

so verwandeln sich die Gleichungen (265b) in die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} a^2-b^2-1 &= \frac{M}{\mu}\,\frac{(\cos\varDelta\cos D+\sin\varDelta\sin D)^2-(\sin D\cos\varDelta-\cos D\sin\varDelta)^2}{\xi_0^4}\,\chi_0^2\xi_0^2 \\ ab &= \frac{M}{\mu}\,\frac{(\cos\varDelta\cos D+\sin\varDelta\sin D)(\sin D\cos\varDelta-\cos D\sin\varDelta)}{\xi_0^4}\,\chi_0^2\xi_0^2 \end{aligned}\right\} (269)$$

Führt man statt χ wieder x ein, so wird einfach

$$\left.\begin{aligned} a^2-b^2-1 &= \frac{\sum m x_0^2}{\mu\xi_0^2}\cos 2\Theta \\ ab &= \frac{\sum m x_0^2}{\mu\xi_0^2}\sin 2\Theta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (270)$$

Gleichungen, die nun den reellen und imaginären Bestandteil des Brechungsindex bestimmen.

Allgemeines Dispersionsgesetz. Wir schreiten nun zu der Aufstellung eines Dispersionsgesetzes, welches für ganz beliebige Substanzen gelten soll, und wählen ein Koordinatensystem, dessen xy-Ebene mit der Einfallsebene, und die yz-Ebene mit der Trennungsebene der beiden Medien zusammenfällt. Sind nun C und A die Amplituden, r und ϱ die Elongationen der Körper- und Ätherteilchen, so zerfällt die Gleichung (259a) in die folgenden beiden:

$$\left.\begin{array}{l}\mu A\dfrac{\partial^2\varrho}{\partial t^2}+\sum mC\dfrac{\partial^2 r}{\partial t^2}=a^2A\left(\dfrac{\partial^2\varrho}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varrho}{\partial y^2}\right)\\ \left[\varepsilon\left(\dfrac{\partial^2\varrho}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varrho}{\partial y^2}\right)+\mathfrak{k}\varrho\right]A=\left[\varepsilon\left(\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}\right)+\varkappa r\right]C\end{array}\right\}\tag{271}$$

da wir diesen Zerfall auch bei Ableitung der Gleichung (262) angenommen haben. Als Integrale dieser Gleichungen nehmen wir an

$$\varrho=Ae^{2\pi\left(\frac{x\cos\beta+y\sin\beta}{\lambda}-\frac{t}{T}-O\right)i},\quad r=Ce^{2\pi\left(\frac{x\cos\beta+y\sin\beta}{\lambda}-\frac{t}{T}-O-2\vartheta\right)i}\tag{272}$$

Hierbei bedeutet β den zum Einfallswinkel α gehörigen Brechungswinkel, ϑ den Phasenunterschied der Schwingungen von Äther und Körperteilchen, wie wir ihn kurz vorher gefunden haben. Wir haben nun

$$n=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{c}{c_1}=\frac{\lambda}{\lambda_1}\tag{273}$$

wobei aber der Allgemeinheit halber n komplex zu nehmen ist. Es ist dann auch

$$n\cos\beta=\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}=p+qi\tag{274}$$

komplex. Führen wir nun λ ein statt λ_1, und behalten nur die reellen Teile der trigonometrischen Ausdrücke bei, so können wir statt (272) schreiben

$$\left.\begin{array}{l}\varrho=A\,e^{\frac{2\pi}{\lambda}qx}\cos 2\pi\left[\dfrac{px+y\sin\alpha}{\lambda}-\dfrac{t}{T}-O\right]\\ r=C\,e^{\frac{2\pi}{\lambda}qx}\cos 2\pi\left[\dfrac{px+y\sin\alpha}{\lambda}-\dfrac{t}{T}-O-2\vartheta\right]\end{array}\right\}\tag{275}$$

Setzt man nun der Kürze halber

$$2\pi\left[\frac{px+y\sin\alpha}{\lambda}-\frac{t}{T}-O\right]=\varphi\tag{276}$$

so verwandelt sich die erste Gleichung von (271) mit Berücksichtigung von (275) und der Beziehung

$$a^2=\mu c^2=\mu\frac{\lambda^2}{T^2}$$

in die folgende

$$\mu A^2\cos\varphi+\sum mC^2\cos(\varphi-2\vartheta)=\mu A^2\left[(p^2-q^2+\sin^2\alpha)\cos\varphi+2pq\sin\varphi\right]\tag{277}$$

Diese Gleichung soll nun für alle Zeiten, und daher auch für alle φ gelten, setzt man demnach die Koeffizienten gleicher φ Funktionen einander gleich, so kommt

$$\left.\begin{array}{r}p^2-q^2+\sin^2\alpha-1=\dfrac{\sum mC^2\cos 2\vartheta}{\mu A^2}\\ 2pq=\dfrac{\sum mC^2\sin 2\vartheta}{\mu A^2}\end{array}\right\}\tag{278}$$

Aus (274) hat man aber

$$p^2-q^2+2pqi=a^2-b^2+2abi-\sin^2\alpha$$

woraus weiter auch folgt

$$a^2-b^2=p^2-q^2+\sin^2\alpha,\quad ab=pq\tag{279}$$

Bezeichnen wir das wirkliche, erst durch die Absorption veränderte Brechungsvermögen mit ν, so ist

$$p=\nu\cos\beta,\quad \sin\alpha=\nu\sin\beta,\quad \nu^2=p^2+\sin^2\alpha\tag{280}$$

und berechnet man nun auch aus (279) durch Elimination von q den Wert von p^2, so erhält man die Gleichung:

$$a^2 - b^2 = p^2 - \frac{a^2 b^2}{p^2} + \sin^2\alpha$$

aus welcher folgt:

$$\left.\begin{aligned} p^2 &= \tfrac{1}{2}\left[a^2 - b^2 - \sin^2\alpha + \sqrt{(a^2 - b^2 - \sin^2\alpha)^2 + 4a^2b^2}\,\right] \\ \nu^2 &= \tfrac{1}{2}\left[a^2 - b^2 + \sin^2\alpha + \sqrt{(a^2 - b^2 - \sin^2\alpha)^2 + 4a^2b^2}\,\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (281)$$

Setzt man $\alpha = 0$, so folgt $p = \nu = a$. Es ist also a das physikalische Brechungsverhältnis bei senkrechter Inzidenz. Da nun $pq = ab$ ist, so ist für senkrechte Inzidenz wegen $p = a$ auch $q = b$. Es ist mithin b der Absorptionskoeffizient bei dieser Inzidenz. Aus (279) ergiebt sich weiter noch:

$$q = \frac{ab}{p} = \frac{ab}{\sqrt{\nu^2 - \sin^2\alpha}} = \frac{ab}{\nu\cos\beta} \quad \ldots \ldots \quad (282)$$

Bezeichnet $\delta = \dfrac{x}{\cos\beta}$ die Dicke der durchlaufenen absorbierenden Schichte, so kann der Absorpsionsfaktor von (275) auch geschrieben werden:

$$e^{\frac{2\pi}{\lambda}\delta\frac{ab}{\nu}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (283)$$

Wir führen nun weiter die Gleichungen (275) in die zweite des Systems (271) ein, und setzen auch hier die Koeffizienten von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ einander gleich. Zunächst erhält man:

$$\begin{aligned} &A^2[\varepsilon(p^2 - q^2 + \sin^2\alpha)\cos\varphi + 2pq\varepsilon\sin\varphi - \mathfrak{f}'\lambda^2\cos\varphi] \\ &\qquad = C^2[\varepsilon'(p^2 - q^2 + \sin^2\alpha)\cos(\varphi - 2\vartheta) + 2pq\varepsilon'\sin(\varphi - 2\vartheta) - \varkappa'\lambda^2\cos(\varphi - 2\vartheta)] \end{aligned}$$

Führt man hier a und b ein, so folgt nun nach ausgeführter Vergleichung:

$$\left.\begin{aligned} A^2[\varepsilon(a^2 - b^2) - \mathfrak{f}'\lambda^2] &= C^2[\varepsilon'(a^2 - b^2) - \varkappa'\lambda^2]\cos 2\vartheta - 2C^2\varepsilon' ab\sin 2\vartheta \\ 2A^2\varepsilon ab &= C^2[\varepsilon'(a^2 - b^2) - \varkappa'\lambda^2]\sin 2\vartheta + 2C^2\varepsilon' ab\cos 2\vartheta \end{aligned}\right\} \quad . \quad (284a)$$

und hieraus leitet man $\cos 2\vartheta$, $\sin 2\vartheta$ ab. Man findet:

$$\left.\begin{aligned} \cos 2\vartheta &= \frac{A^2}{C^2}\,\frac{[\varepsilon(a^2 - b^2) - \mathfrak{f}'\lambda^2][\varepsilon'(a^2 - b^2) - \varkappa'\lambda^2] + 4\varepsilon\varepsilon' a^2b^2}{[\varepsilon'(a^2 - b^2) - \varkappa'\lambda^2]^2 + 4\varepsilon'^2 a^2b^2} \\ \sin 2\vartheta &= \frac{A^2}{C^2}\,\frac{2ab\lambda^2(\varepsilon'\mathfrak{f}' - \varepsilon\varkappa')}{[\varepsilon'(a^2 - b^2) - \varkappa'\lambda^2]^2 + 4\varepsilon'^2 a^2b^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (284b)$$

Setzt man auch hier, wie früher

$$\frac{\varepsilon'}{\varkappa'} = L^2,\ \frac{\mathfrak{f}'}{\varkappa'} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = D'\frac{\mu}{m}$$

so erhält man zunächst, indem $-\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon'} + \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon'}$ zu der ersten Gleichung addiert wird, entsprechend (270):

$$\left.\begin{aligned} a^2 - b^2 - 1 &= \frac{\sum mC^2}{\mu A^2}\cdot\cos 2\vartheta = \sum\frac{m}{\mu}\left\{\frac{-\left(a^2 - b^2 - \dfrac{\lambda^2}{L^2}\right)\left(\dfrac{\mathfrak{f}'}{\varepsilon'} - \dfrac{\varkappa'\varepsilon}{\varepsilon'\varepsilon'}\right)\lambda^2}{\left[a^2 - b^2 - \dfrac{\lambda^2}{L^2}\right]^2 + 4a^2b^2} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right\} \\ 2ab &= \frac{\sum mC^2}{\mu A^2}\cdot\sin 2\vartheta = \sum\frac{m}{\mu}\,\frac{2ab\lambda^2\left(\dfrac{\mathfrak{f}'}{\varepsilon'} - \dfrac{\varepsilon\varkappa'}{\varepsilon'\varepsilon'}\right)}{\left[a^2 - b^2 - \dfrac{\lambda^2}{L^2}\right]^2 + 4a^2b^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (285a)$$

und endlich:

$$\left.\begin{aligned} a^2 - b^2 - 1 &= \sum \left\{ \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \frac{m}{\mu} - \frac{\left(a^2 - b^2 - \frac{\lambda^2}{L^2}\right) D \frac{\lambda^2}{L^2}}{\left[a^2 - b^2 - \frac{\lambda^2}{L^2}\right] + 4a^2b^2} \right\} \\ 2ab &= \sum \frac{2abD \frac{\lambda}{L^2}}{\left[a^2 - b - \frac{\lambda^2}{L^2}\right]^2 + 4a^2b^2} \end{aligned}\right\} \quad (285b)$$

Setzen wir zur Kontrolle den Brechungskoeffizienten reell, also $b = q = \vartheta = 0$, $n = \nu = a$ $p^2 = n^2 - \sin^2\alpha$, so geben die Gleichungen (278) und (284b) die schon bekannten Relationen

$$n^2 - 1 = \frac{\sum mC}{\mu A^2} \text{ und } \frac{C^2}{A^2} = \frac{\varepsilon a - \mathfrak{k}\lambda^2}{\varepsilon a^2 - \varkappa \lambda^2}$$

e) *Anwendung auf Korper mit nur einer komplexen Zone* Bei Korpern mit nur einem Absorptionsstreifen fallt in den Formeln das Summenzeichen fort, und die a und b lassen sich explizite angeben Wir fuhren die folgenden Bezeichnungen ein für $\lambda = 0$ sei $n = n_0$ und fur $\lambda = \infty$ sei $n = n_\infty$ Dann hat man

$$n_0^2 - 1 = \frac{m}{\mu} \frac{\varepsilon}{\varepsilon}, \; n_\infty^2 - 1 = \frac{m}{\mu} \frac{\mathfrak{k}}{\varkappa} \quad (286)$$

und es sei ferner

$$D = n_\infty^2 - n_0^2 = Dn_\infty^2, \; \lambda_m = n_\infty L \quad (287)$$

dann erhalt man aus (285b) durch Elimination der Grofsen a^2 und b^2

$$\left.\begin{aligned} a^2 - b^2 - 1 &= \tfrac{1}{2}\left(n_0^2 + \frac{\lambda^2}{L^2}\right) - 1 = n_\infty^2 - 1 - \frac{n_\infty^2}{2}\left(1 + D - \frac{\lambda^2}{\lambda_m^2}\right) \\ 2ab &= \sqrt{n_\infty \frac{\lambda}{L^2} - \tfrac{1}{4}\left(n_0^2 + \frac{\lambda^2}{L^2}\right)^2} = n_\infty^2 \sqrt{D - \tfrac{1}{4}\left(1 + D - \frac{\lambda}{\lambda_m^2}\right)} \end{aligned}\right\} \quad (288)$$

und man hat daher ganz allgemein, da $n^2 - 1 = a^2 - b^2 + 2abi - 1$ ist

$$n^2 - 1 = \tfrac{1}{2}\left(n_0^2 + \frac{\lambda^2}{L^2}\right) - 1 \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}\left(n_0^2 + \frac{\lambda^2}{L^2}\right)^2 - n_\infty^2 \frac{\lambda^2}{L^2}} \quad (289)$$

Setzt man nach dem Obigen

$$n_0^2 = n_\infty^2(1 - D)$$

so kommt endlich

$$n^2 = \tfrac{1}{2} n_\infty^2 \left[1 - D + \frac{\lambda^2}{\lambda_m^2}\right] \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}\left[1 - D + \frac{\lambda^2}{\lambda_m^2}\right] - n_\infty^4 \frac{\lambda^2}{\lambda_m^2}}$$

oder einfacher

$$n = \tfrac{1}{2} n_\infty \left[\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_m}\right)^2 - D} \pm \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_m}\right) - D}\right] \quad (290)$$

und diese Formel gilt nun fur beliebige Korper, also bei anomal dispergierenden auch für den ganzen Umfang der Strahlung Der komplex gewordene Kurventeil ist bei diesen durch die Kurve ν, Gleichung (281), zu vervollstandigen, und es ist zu bemerken, dafs dieser Kurvenzweig auch vom Einfallswinkel abhangt Die vollstandige Dispersionskurve besteht daher aus zwei, vom Einfallswinkel unabhangigen, getrennten Zweigen, welche durch ein davon abhangiges, bewegliches Kurvenstuck mit einander verbunden sind Die zugehorigen Phasenverschiebungen berechnen sich leicht aus (278) Man erhalt namlich

$$\operatorname{tang} 2\vartheta = \frac{2pq}{p^2 - q^2 + \sin^2 \alpha + 1} = \frac{2ab}{a^2 - b^2 - 1}$$

oder wenn die Werte aus (288) gesetzt werden:

$$\operatorname{tang} 2\vartheta = \frac{n_\infty^2 \sqrt{4D - \left(1 + D - \frac{\lambda^2}{\lambda_m^2}\right)^2}}{2(n_\infty^2 - 1) - n_\infty^2\left(1 + D - \frac{\lambda^2}{\lambda_m^2}\right)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (291)$$

Da die Gröfsen a und b stets positiv zu nehmen sind, so ist auch $\vartheta = D - \Delta$ positiv, d. h. die Körperteilchen eilen den Ätherteilchen in ihren Schwingungen stets voraus.

Die Kurve (290) ist im Wesentlichen mit der schon untersuchten Dispersionskurve des Schwefelkohlenstoffes identisch.

f) *Dispersionskurven nach Ketteler.* Als allgemeine Formel der Dispersion stellt Ketteler die Gleichung auf:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{A}{1 - \varkappa l^2} + \frac{B}{l^2 - C} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (292)$$

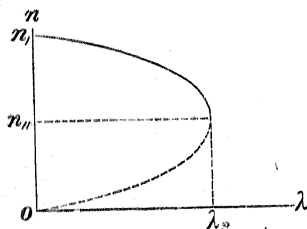
aus der sich mehrere interessante Spezialfälle ableiten lassen, die besonders durch graphische Darstellung sehr anschaulich werden.

1. Es sei $B = C = 0$. Statt der Wellenlänge im brechenden Medium l führen wir die Wellenlänge im Weltäther ein λ, der die Geschwindigkeit 1 entspricht. Dann ist: $\frac{l}{\lambda} = \frac{c}{1} = \frac{1}{n}$. Wir setzen weiter in (292):

$$A = \frac{1}{n_1^2},\ \frac{4\varkappa}{n_1^2} = \frac{1}{\lambda_2^2},\ l = \frac{\lambda}{n}$$

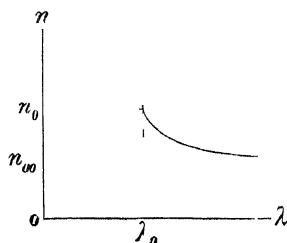
und erhalten so:

$$n^2 = n_1^2\left[1 - \tfrac{1}{4}\frac{n_1^2\lambda^2}{n^2\lambda_2^2}\right],\ n = \frac{n_1}{2}\left\{\sqrt{1 + \frac{\lambda}{\lambda_2}} \pm \sqrt{1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}}\right\} \quad \ldots \quad (293)$$

Fig. 3.

Jeder Wellenlänge entsprechen daher, Fig. 3, stets zwei Brechungsindizes mit Ausnahme von $\lambda = \lambda_2$, wo $n_2 = \frac{n_1}{\sqrt{2}}$ wird. Für gröfsere Wellenlängen als λ_2 wird das Medium für Strahlung undurchsichtig. Im Anfangspunkte der Koordinaten wird $n_0 = 0$ oder n_1. Diese Dispersionskurve befolgt noch kein bisher untersuchtes Medium; am ehesten vielleicht Glyzerin.

2. Es sei $\varkappa = 0$, $C = 0$. Dann wird, setzt man wieder $l = \frac{\lambda}{n}$, $A = \frac{2}{n_0^2}$, $B = -\frac{\lambda_0^2}{n_0^4}$:

$$n^4 - 2\frac{n_0^2\lambda^2}{\lambda_0^2}n^2 = -\frac{n_0^4\lambda^2}{\lambda_0^2},\ n = \frac{\sqrt{2}\,n_0}{\sqrt{1 + \frac{\lambda_0}{\lambda}} \pm \sqrt{1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}}} \quad \ldots \quad (294)$$

Fig 4

Für $\lambda = 0$ ist der Brechungsindex, Fig 4 imaginar, und bleibt so, bis $\lambda = \lambda_0$ wird Von da ab gehoren zu jeder Wellenlange zwei Indizes Für $\lambda = \infty$ wird der eine ebenfalls unendlich grofs, wahrend der zweite sich dem Werte $n_\infty = \frac{n_0}{\sqrt{2}}$ assymptotisch nähert Wie schon Christoffel nachwies, der diese Formel zuerst aufstellte, stellt der zweite Zweig der Kurve die Dispersion des Lichtes ziemlich genau dar

3 Wir setzen $\varkappa = 0$, fur $l = \infty$ sei $n = n_\infty$, somit $A = \frac{1}{n_\infty^2}$ Es sei weiter $B = -\frac{D}{n} L^2$, $C = L^2(1-D)$, so erhalt man

$$n^2 - n_\infty = \frac{n_\infty^2 D L^2}{l^2 - L^2(1-D)} \tag{295}$$

was uns auf die schon in Fig 2 diskutierte Kurve fuhren wurde Hier kann D nur kleiner als 1 sein, denn ware es gleich 1, so kamen wir auf den unter 2 behandelten Fall, $\varkappa = 0$, $C = 0$ zuruck

Fig 5

4 Es sei nun $C = 0$ Man erhalt dann, wenn wieder $l = \frac{\lambda}{n}$ gesetzt wird

$$\frac{1}{n^4} - \frac{A}{n^2 - \varkappa^2 \lambda^2} = \frac{B}{\lambda^2} \tag{296}$$

welcher Gleichung die in Fig 5 dargestellte Kurve entspricht Die Grenzwerte, fur welche n imaginar wird, liegen im Ultrarot und Ultraviolett

5 Behalt man endlich die vollständige Formel bei, in welcher wir nun $A = \frac{1}{n_1^2}$ setzen, so kommt unter Beibehaltung der ubrigen, in 3 eingefuhrten Bezeichnungen

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_1^2} \frac{1}{1 - \varkappa^2 l^2} - \frac{1}{n^2} \frac{DL}{l^2 - L^2(1-D)} \tag{297}$$

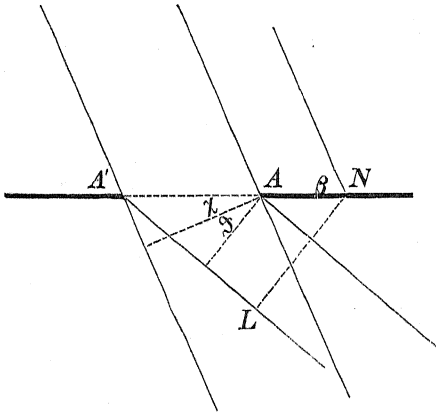
eine Kurve, die sich von der in 3 behandelten nur durch das Hinzutreten eines neuen Gliedes unterscheidet Dieses neue Glied setzt den einen Kurvenast fur grofse Wellenlangen fort, und fugt ihm einen neuen Grenzwert fur imaginare Brechungsindizes im Ultrarot zu Medien, welche dieser Kurve sich anschmiegen, liefern also imaginare Indizes fur Wellenlangen zwischen λ_0' und λ_0', und sind uberhaupt undurchsichtig fur alle ultraroten Strahlen aufserhalb λ_2 Bei λ_1 besitzt die Kurve, wie die vorher untersuchte, einen Inflexionspunkt Die hier dargestellte Dispersion befolgen alle bisher untersuchten Stoffe

Verallgemeinerungen der hingeschriebenen Formeln erhalt man — wie wir es schon vorstehend gesehen, durch Vorsetzen eines Summationszeichens

C Diffraktion der Strahlung

Die Beobachtung, dafs ein sehr schmales Bundel weifsen Lichtes an der Kante irgend eines dunklen Korpers vorubergefuhrt, nicht nur abgelenkt, sondern auch in

Farben zerlegt werde, ist eine alte. Ebenso ergab sich bald, daſs zwei solche Lichtbündel unter sehr kleinem Winkel auf einander projiziert, Zerstreuung des weiſsen Lichtes in die Farben des Spektrums bewirken. Die Erscheinung, mit dem Namen der Diffraktion oder Beugung des Lichtes belegt, ist für die Spektralanalyse und die Theorie des Lichtes insbesondere von ausgezeichneter Wichtigkeit geworden, und wir werden uns eingehender hiermit zu befassen haben.

Fig. 6.

Es sei zu dem Ende eine schmale Spalte von der Breite γ und der Höhe h gegeben, auf welche unter dem Winkel $90^0 - \chi$ parallele Strahlen auffallen mögen. Dann ist χ der Winkel, den die auf die Strahlen gezogene Normalebene mit der Spaltebene bildet. Ähnlich sei ϑ der Winkel, den eine zu den gebeugten Strahlen Normale mit der Spaltebene einschlieſst; derselbe ist dann zugleich der Beugungswinkel. Endlich bezeichne x die Entfernung der Lichtquelle von einem Punkte N der Ebene des Spaltes, und β die Distanz desselben von der Spaltkante A. Teilt man den Spalt in $m+1$ Horizontalstreifen von der Höhe dh, wobei $(m+1)dh = h$, und in $n+1$ Vertikalstreifen, so daſs analog $(n+1)d\gamma = \gamma$ werde, so drücken sich die Entfernungen der einzelnen Streifenzentra von der Lichtquelle wie folgt aus:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Spaltrand } A: D_A = x - \beta \sin\chi, \text{ Spaltrand } A': D_{A'} = x - (\beta+\gamma)\sin\chi \\ \text{Streifenzentra: } D_r = x - \beta\sin\chi - (r-1)d\gamma\sin\chi - \tfrac{1}{2}d\gamma\sin\chi, \\ \qquad\qquad r = 1, 2, \ldots (n+1) \text{ von } A \text{ weg gezählt}\end{array}\right\} \quad (298)$$

Die Vibrationsgeschwindigkeit der in diesen Punkten befindlichen Ätherteilchen ist dann gegeben durch:

$$U_r = V \sin 2\pi \left[\frac{t}{\tau} - \frac{x - (\beta + \frac{1}{2}d\gamma + (r-1)d\gamma)\sin\chi}{\lambda}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (299)$$

und jeder dieser Punkte ist nach dem Huyghensschen Prinzipe, das wir hier nur in seiner einfachsten Fassung benutzen, als neues Wellenzentrum zu betrachten, dessen Entfernung von der Normalebene NL der gebeugten Strahlen auszudrücken ist durch

$$D_r' = \beta\sin\psi + \tfrac{1}{2}d\gamma\sin\psi + (r-1)d\gamma\sin\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (300)$$

wobei, da $\chi + 90^0 + \vartheta + 90^0 - \psi = 180^0$ ist, die Beziehung

$$\psi = \chi + \vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (301)$$

stattfindet. Demnach ist die Oszillationsgeschwindigkeit eines gebeugten Strahles in der Ebene NL gegeben durch

$$\left.\begin{array}{l}U_r = V\sin 2\pi\left[\frac{t}{\tau} - \frac{x - (\beta + \frac{1}{2}d\gamma + (r-1)d\gamma)\sin\chi}{\lambda} - \frac{(\beta + \frac{1}{2}d\gamma + (r-1)d\gamma)\sin\psi}{\lambda}\right] \\ \quad = V\sin 2\pi\left[\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} - \frac{(\beta + \frac{1}{2}d\gamma)(\sin\psi - \sin\chi)}{\lambda} - \frac{(r-1)d\gamma(\sin\psi - \sin\chi)}{\lambda}\right]\end{array}\right\} \quad (302)$$

Für ein homogenes Strahlenbündel haben alle Strahlen dasselbe V, während die Phasen eine arithmetische Progression bilden, deren Differenz durch

$$-y = -2\pi \frac{d\gamma(\sin\psi - \sin\gamma)}{\lambda}$$

gegeben ist Soll nun das Verhalten der Schwingung fur die ganze Breite des Spaltes in der Ebene LN untersucht werden, so kommt es auf die Summierung der Reihe von der Form

$$\sin x + \sin(x-y) + \sin(x-2y) + \quad = \frac{\sin\frac{n}{2}y}{\sin\frac{y}{2}} \sin\left(x - \frac{n-1}{2}y\right)$$

an, die wir schon in (63) erledigten Hier ist x ausgedruckt durch

$$x = 2\pi\left[\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} - \frac{(\beta + \frac{1}{2}d\gamma)(\sin\psi - \sin\chi)}{\lambda}\right]$$

Als Resultierende der Schwingungen erhalt man daher

$$\sum U_i = V \frac{\sin\left[(n+1)\pi\, d\gamma \frac{\sin\psi - \sin\chi}{\lambda}\right]}{\sin\left[\pi\, d\gamma \frac{\sin\psi - \sin\chi}{\lambda}\right]} \sin 2\pi\left\{\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} - \frac{[\beta + \frac{1}{2}(n+1)d\gamma](\sin\psi - \sin\chi)}{\lambda}\right\} \tag{303}$$

Setzt man wegen der Kleinheit von $d\gamma$ im Nenner des ersten Faktors statt des Sinus den Bogen, und weiter $\gamma = (n+1)d\gamma$, summiert endlich auch uber die $m+1$ Horizontalstreifen, so kommt

$$\sum\sum U_i = (m+1)(n+1)\, V \frac{\sin\left[\pi\gamma \frac{\sin\psi - \sin\chi}{\lambda}\right]}{\pi\gamma \frac{\sin\psi - \sin\chi}{\lambda}} \sin 2\pi\left\{\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} - \frac{(\beta + \frac{1}{2}\gamma)(\sin\psi - \sin\gamma)}{\lambda}\right\} \tag{304}$$

Die Intensitat des Strahlenbundels wird sonach an der Stelle der Normalebene der gebeugten Strahlen ausgedruckt, durch

$$I = (m+1)^2(n+1)^2 V^2 \frac{\sin^2\left[\pi\gamma \frac{\sin\psi - \sin\chi}{\lambda}\right]}{\left[\pi\gamma \frac{\sin\psi - \sin\chi}{\lambda}\right]^2} \tag{305}$$

Nennt man die Intensitat des Strahlenbundels, welches bei senkrechter Inzidenz den Spalt durchdringt, 1, so ist offenbar $\cos\chi$ die Intensitat des unter dem Winkel χ einfallenden ungebeugten Strahles Man kann also

$$(m+1)^2(n+1)\ V^2 = \cos\chi \tag{306}$$

setzen, wobei hochstens von absoluten konstanten Faktoren abgesehen wurde

Unter den naher zu erorternden Spezialfällen besitzen besonders jene grofse Wichtigkeit, in welchen entweder die auffallenden oder die gebeugten Strahlen senkrecht zur Spaltebene stehen

1 Die auffallenden Strahlen stehen senkrecht zur Spaltebene Es ist dann

$$\chi = 0, \ \psi = \vartheta, \ \cos\chi = 1 \tag{307}$$

mithin die Intensitat der gebeugten Strahlen

$$I = \frac{\sin^2\left[\pi\gamma\frac{\sin\psi}{\lambda}\right]}{\left[\pi\gamma\frac{\sin\psi}{\lambda}\right]^2} \quad \text{. . . . .} \quad (308)$$

Dieser Ausdruck hat die bemerkenswerte Eigenschaft, bei endlich bleibendem Nenner so oft Null zu werden, als das Argument der Sinusfunktion die Bedingung erfüllt:

$$\pi\gamma\frac{\sin\psi}{\lambda} = \pm m\pi,\ m = 1, 2, \cdots \quad \text{. . . . .} \quad (309)$$

Da $\gamma \sin\psi = A'g$ ist, d. h. den Wegunterschied bezeichnet, welcher zwischen den beiden gebeugten Randstrahlen besteht, so kann man sagen: Die Intensität der gebeugten Strahlen eines homogenen Bündels ist in einer zu den Strahlen normal gelegten Ebene Null, wenn der Gangunterschied der Randstrahlen einer ganzen Anzahl von Wellenlängen gleich ist. Unverändert kann I nur dann bleiben, wenn ψ derart klein ist, daſs Bogen und Sinus vertauscht werden dürfen. Dies geschieht aber nur für den nicht gebeugten Strahl. Dagegen erreicht I allemal ein Maximum, wenn der Zähler (308) der Einheit gleich wird, d. h. wenn

$$\gamma \sin\psi = \pm(n + \tfrac{1}{2})\lambda,\ n = 1, 2 \cdots \quad \text{. . . . .} \quad (310)$$

Dabei werden aber auch die aufeinanderfolgenden Nenner immer gröſser, so daſs also vom ersten Maximum ab die Maxima immer kleiner, und zwar im Verhältnis der Quadrate der ungeraden Zahlen, kleiner werden.

Ersetzt man also die Normalebene der gebeugten Strahlen durch einen Schirm, so stellt sich auf demselben die folgende Erscheinung dar: Entsprechend den ungebeugten Strahlen entsteht auf dem Schirme seitlich (wenn man von den auch nach der andern Seite hin gebeugten Strahlen ganz absieht, die bei der angenommenen Stellung des Schirmes nicht zugleich erscheinen können) ein Bild des Spaltes von der Intensität des auffallenden Lichtes. Daneben steht für $m = 1$ die erste dunkle Stelle, und bei $n = 1$ etwas weiter das erste, hellste Maximum. Darauf folgt wieder ein dunkler Zwischenraum und ein etwas schwächeres Maximum usf.

Die Gleichung (309) giebt uns ein einfaches Mittel an die Hand, aus der bekannten Spaltbreite, dem Beugungswinkel und der Ordnungszahl der dunklen Linien, die Wellenlängen des auffallenden Lichtes zu messen.

2. Ist aber der gebeugte Strahl senkrecht zur Spaltebene, also

$$\psi = 0,\ \vartheta = -\chi \text{ und } \sin\vartheta = -\sin\chi \quad \text{. . . . .} \quad (311)$$

so wird die Intensität der gebeugten Strahlen:

$$I = \cos\vartheta \cdot \frac{\sin^2\left[\pi\gamma\frac{\sin\vartheta}{\lambda}\right]}{\left[\pi\gamma\frac{\sin\vartheta}{\lambda}\right]^2} \quad \text{. . . . .} \quad (312)$$

ganz analog dem gerade behandelten Falle, nur wird die Intensität im allgemeinen geringer ausfallen.

Wir behandeln endlich noch den viel allgemeineren, und auch experimentell ausschlieſslich angewandten Fall, wo man eine Reihe von kongruenten und gleichweit abstehenden Spalten hat. Unter wiederholter Voraussetzung der Parallelinzidenz der Strahlen kann in den Resultaten der einzelnen Spalten eine Verschiedenheit des Ergebnisses nur durch Gangunterschiede der Strahlen verschiedener Spalten eintreten.

Setzt man Kürze halber die in den früheren Formeln eingetretene Größe

$$\frac{\pi}{\lambda}(\sin\psi - \sin\varphi) = v \tag{313}$$

so kommt als Interferenzschwingung für eine Spalte

$$s_1 = V(m+1)(n+1)\frac{\sin\gamma v}{\gamma v}\sin 2\pi\left[\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} - (\beta+\tfrac{1}{2}\gamma)\frac{v}{\pi}\right] \tag{314}$$

Ist e die Entfernung der einander zugekehrten Spaltränder, die Breite der Spalten wieder γ, so hat man analog für die zweite Spalte

$$s_2 = V(m+1)(n+1)\frac{\sin\gamma v}{\gamma v}\sin 2\pi\left[\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} - \beta\frac{v}{\pi} - \gamma\frac{v}{\pi} - e\frac{v}{\pi} - \tfrac{1}{2}\gamma\frac{v}{\pi}\right]$$

oder

$$s_2 = V(m+1)(n+1)\frac{\sin\gamma v}{\gamma v}\sin 2\pi\left[\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} - \frac{v}{\pi}(\beta+\tfrac{1}{2}\gamma) - \frac{v}{\pi}(\gamma+e)\right] \tag{315}$$

Setzt man nun

$$2\pi\left[\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} - \frac{v}{\pi}(\beta+\tfrac{1}{2}\gamma)\right] = x, \quad 2\pi\frac{v}{\pi}(\gamma+e) = y$$

so erhält man als Summe der Schwingungen — von konstanten Faktoren abgesehen — wieder den Ausdruck

$$\sin(x-y)+\sin(x-2y)+\ldots+\sin(x-(n-1)y) = \frac{\sin\frac{n}{2}y}{\sin\frac{1}{2}y}\sin\left(x-\frac{n-1}{2}y\right)$$

Substituiert man die für x und y angenommenen Werte, und nennt die Anzahl der Spalten r, so kommt

$$S = (m+1)(n+1)V\frac{\sin\gamma v}{\gamma v}\,\frac{\sin rv(\gamma+e)}{\sin v(\gamma+e)}\sin 2\pi\left[\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} - \frac{v}{\pi}\left(\gamma+\frac{r}{2}\gamma+\frac{r-1}{2}e\right)\right] \tag{316}$$

Da bei Erfüllung der Gleichung

$$\gamma v = 0, \text{ oder } \frac{\gamma\pi}{\lambda}(\sin\psi - \sin\varphi) = 0 \tag{317}$$

jedenfalls die Intensität der ganzen Interferenzschwingung zu Null wird, so ersieht man, daß alle, schon bei einer einzigen Spalte entstandenen Minima hier sich wieder ungeändert vorfinden. Dies gilt aber nicht mehr von den Maximis, da einem solchen des Faktors $\sin\gamma v$, gerade ein Minimum des Faktors $\sin rv(\gamma+e)$ entsprechen konnte. Die dem ersteren Faktor entsprechenden Grenzwerte der Intensität des gebeugten Lichtes heißen Minima oder Maxima der ersten Klasse, die des zweiten, Minima oder Maxima der zweiten Klasse. Besonders die Maxima der letzteren Klasse sind von großer Wichtigkeit, da die Intensität hier eine sehr große wird. Wird nämlich Zähler und Nenner des Faktors $\frac{\sin rv(\gamma+e)}{\sin v(\gamma+e)}$ gleichzeitig Null, so hat die entsprechende Interferenzschwingung r-fache Amplitude und r^2 fache Intensität, die eines einzelnen Spaltes als Einheit genommen.

Die Maxima der zweiten Klasse erhält man, indem man setzt

$$\frac{\gamma+e}{\lambda}(\sin\psi - \sin\varphi) = 0, 1, 2 \ldots \tag{318}$$

Die Erscheinung stellt sich also analog derjenigen eines einzigen Spaltes dar, nur ist die Mannigfaltigkeit der hellen und dunklen Stellen eine bedeutend größere.

Läſst man nun Licht verschiedener Wellenlänge — etwa weiſses Licht — auf das Spaltsystem fallen, so werden die Strahlen, da für jeden der Sinus des Beugungswinkels der Wellenlänge proportional ist, getrennt, in ein Spektrum entwickelt. Fehlt oder überwiegt in der Strahlung ursprünglich eine Schwingungsgattung, so fehlt oder überwiegt sie natürlich auch in dem Beugungsspektrum. Bei der Mehrheit der Lösungen der Gleichung (318) erkennt man leicht, daſs eine ganze Reihe aufeinanderfolgender, — und immer mehr und mehr auseinander gezogener Spektra entsteht, die je nach dem Werte von m — Spektra erster, zweiter.. Ordnung genannt werden, wobei das ungebeugte und daher auch nicht getrennte Spaltbild als Spektrum nullter Ordnung aufgefaſst wird. Diese Spektra werden sich natürlich bald überlagern.

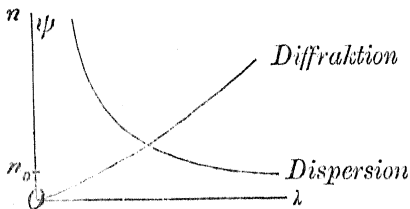
Vergleicht man nun die Spektra, wie sie durch Beugung und Dispersion entstehen, so wird man bald erhebliche Unterschiede finden. Hier ist (wenigstens bei normaler Dispersion) die langwellige Partie des Spektrums sehr gedrängt, die violette sehr in die Länge gezogen, dort haben wir (bei kleinen Beugungswinkeln wenigstens) eine der Wellenlänge fast genau proportionale Ablenkung. Brechung lenkt Rot am wenigsten, Diffraktion Violett am wenigsten ab. Und was das Wichtigste ist: während die Dispersion nur durch hypothetische Annahmen analytisch darstellbar ist, und von der Beschaffenheit des Stoffes abhängige Konstanten — die sich nur durch Beobachtungen rechnend ermitteln lassen — berücksichtigen muſs, sind wir hier ganz frei von der Natur der Materie, und brauchen bloſs die Zahl der Spalten auf der Längeneinheit zu kennen. Gehen nämlich n Spalten auf die Längeneinheit, so ist $\gamma + e = \frac{1}{n}$, eine Gröſse, die sich völlig scharf ermitteln läſst. Auſserdem braucht man nur den Beugungswinkel ϑ des Strahles im Spektrum von der Ordnung m zu kennen, um bei senkrecht auffallendem Lichte sofort die Wellenlänge aus der einfachen Gleichung bestimmen zu können:

$$\lambda = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin \psi}{m} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (319)$$

Fig. 7.

D. Polarisation der Strahlung.

Wir haben schon zum öfteren gefunden, daſs die Strahlung eines beliebigen Körpers im allgemeinen nach der Durchschnittskurve eines mit der Zeit veränderlichen elliptischen Cylinders und einer ebenso veränderlichen Ebene polarisiert sei. Dieses Element der Schwingung erleidet aber eine bislang noch nicht erwähnte Veränderung, wenn sie von der Grenzfläche irgend eines andern Mediums reflektiert oder an demselben gebrochen wird. Die diesbezüglichen, und für die Theorie des Lichtes von enormer Wichtigkeit bleibenden Untersuchungen rühren von Fresnel her, nach dessen Vorgang wir sie ebenfalls behandeln wollen.

Unsere bisherigen Schwingungsgleichungen ergaben in ihren Integralen die Komponenten der Verschiebungen nach drei aufeinander senkrechten Axen, und es war daraus zu schlieſsen, daſs die Strahlung aus longitudinalen und transversalen Schwingungen bestehe. Die Interferenz- und Beugungserscheinungen sind für beide Arten der Ätherbewegung giltig und erbringen somit keine Entscheidung darüber, ob beide Arten der

Schwingung als Licht empfunden werden können. Unterwirft man aber eine Strahlung Reflexionen oder Brechungen, so treten Fälle ein, daſs das reflektierte oder gebrochene Licht nicht mehr fähig ist, Interferenzerscheinungen hervorzubringen, was nur so möglich ist, wenn die Schwingungsebenen der interferierenden Strahlen aufeinander senkrecht stehen. Eine Longitudinalschwingung kommt also im Äther entweder gar nicht vor oder aber sie wird nicht als Licht empfunden. Wir sehen hier von Lichtabsorptionen im Innern des Körpers ab, und nehmen hiermit die Summe der Intensitäten des reflektierten und gebrochenen Strahles gleich der Summe des einfallenden an, und beschränken uns auch nur auf plane Wellen. Offenbar ist keine der beiden Einschränkungen wesentlicher Art.

Fig. 8

a) Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene. Es sei (Fig. 8) MM' ein Querschnitt der zu betrachtenden Planwelle, $p = MM'$ deren in der Ebene der Zeichnung liegende Breite, q die darauf senkrechte Tiefe des Strahlenprismas. Der Querschnitt des ganzen Prismas ist sonach pq. Bedeutet x die Entfernung der Wellenebene MM' von der Lichtquelle, so ist in diesem Querschnitte

$$\sigma = a \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x}{v}\right) \tag{320}$$

wenn v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Strahlung bezeichnet. Die Intensität des Lichtes definieren wir wie bisher als die lebendige Kraft der Schwingungen, welche in einer gewissen Äthermasse enthalten ist.

In der unendlich dünnen Schichte $MM'NN'$, deren Höhe dx ist, darf die Geschwindigkeit aller Teilchen als gleich betrachtet werden, und man hat somit, mit ϱ die Ätherdichte bezeichnend

$$dL = \tfrac{1}{2} pq\varrho\, dx \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 \tag{321a}$$

Daher die in einer ganzen Welle enthaltene lebendige Kraft

$$\left.\begin{aligned} L &= 2pq\varrho \frac{\pi^2 a^2}{\tau^2} \int_0^\lambda \cos^2 2\pi \frac{1}{\tau}\left(t - \frac{x}{v}\right) dx \\ &= pq\varrho \frac{\pi^2 a^2}{\tau^2} \lambda \end{aligned}\right\} \tag{321b}$$

Bei der reflektierten Welle sind die p und q unverändert geblieben, doch hat sich die Amplitude in b verwandelt, man hat sonach für die lebendige Kraft der reflektierten Welle

$$L' = pq\varrho \frac{\pi^2 b^2}{\tau^2} \lambda \tag{322}$$

Durch Brechung wird auch der Querschnitt des Strahlenprismas, und zwar die in der Ebene der Zeichnung liegende Breite desselben verändert. Ist α der Einfalls-, β der Brechungswinkel, so ergiebt sich

$$p = AB \cos\alpha \quad p' = AB \cos\beta \tag{323a}$$

woraus folgt

$$\frac{p'}{p} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \tag{323b}$$

während q unverändert bleibt, da der einfallende Strahl mit dem gebrochenen in einer Ebene liegt. Für den gebrochenen Strahl hat man also als Ausdruck der lebendigen Kraft:

$$L'' = p'' q \varrho'' \frac{\pi^2 c^2}{\tau^2} \lambda'' \quad \ldots \ldots \ldots \quad (324)$$

wo c die durch Brechung veränderte Amplitude, λ'' die Wellenlänge des gebrochenen Strahles bezeichnet.

Nach dem Äquivalenzgesetze mufs nun die Summe der lebendigen Kraft des reflektierten und gebrochenen Strahles gleich sein der des ursprünglichen; dies gibt also

$$L = L' + L'' \quad \ldots \ldots \ldots \quad (325a)$$

$$p \varrho \lambda a^2 = p \varrho \lambda b^2 + p'' \varrho'' \lambda'' c^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (325b)$$

Da diese Gleichung zur Bestimmung der Gröfsen b und c nicht ausreicht, so mufs man sich noch nach anderen Bestimmungsgleichungen umsehen. Ein Analogon zu der hier betrachteten Erscheinung ergiebt sich aber in der That in der Behandlung von Schwingungen einer aus mehreren Stücken zusammengesetzten Saite. An der Berührungsstelle der verschiedenen Saitensubstanzen mufs nämlich die Kontinuitätsbedingung gleicher Elongation stattfinden, sowie die Bedingung kontinuierlichen Überganges der die einzelnen Saitenelemente sollizitierenden Kräfte erfüllt sein. Wären nämlich zwischen an benachbarten Elementen angreifenden Kräften endliche Unterschiede vorhanden, so würde ein unendlich kleines Massenelement durch eine endliche Kraft bewegt, mithin mit unendlich grofser Geschwindigkeit begabt erscheinen.

Von dieser Analogie ausgehend, gelangt man zu den Grenzbedingungen:

$$\sigma + \sigma' = \sigma'' \quad \ldots \ldots \ldots \quad (326a)$$

welche, da sie für alle Zeiten gelten müssen, die σ aber die Form haben;

$$\sigma = a \sin 2\pi \frac{t}{\tau}, \quad \sigma' = b \sin 2\pi \frac{t}{\tau}, \quad \sigma'' = c \sin 2\pi \frac{t}{\tau}$$

in die folgende übergeht:

$$a + b = c \quad \ldots \ldots \ldots \quad (326b)$$

Wäre also auch von vornherein keine Annahme über die Konstanz von τ, der Schwingungsperiode, in den verschiedenen Medien gemacht worden, die hingeschriebene Kontinuitätsbedingung hätte sie nach sich gezogen.

Über das Verhältnis der Dichtigkeit des Äthers in den beiden Medien $\frac{\varrho''}{\varrho}$, das wir noch benötigen, giebt es keine direkten Erfahrungen; Fresnel nimmt daher an, dafs wie bei den Schwingungen gespannter Saiten, auch hier das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich sei dem Quotienten aus Spannung und Dichte. Besteht aber die unter der Spannung P stehende Saite aus zwei Stücken, so ist in diesen die Geschwindigkeit:

$$v^2 = \frac{P}{\varrho}, \quad v''^2 = \frac{P}{\varrho''} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (327a)$$

Nimmt man also auch die Spannung des Äthers konstant an, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{\varrho''}{\varrho} = \frac{v^2}{v''^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (327b)$$

Nun ist aber

$$\frac{v''}{v} = \frac{\lambda''}{\lambda} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (328)$$

und so erhält man aus (325) unter Berücksichtigung von (323) die Gleichung der Intensitätsäquivalenz

$$a^2 - b^2 = c^2 \frac{\sin\beta\cos\beta\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta} \tag{329}$$

Man hat also zur Bestimmung der beiden Amplituden b und c die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} (a^2-b^2)\cos\alpha\sin\beta &= c^2\sin\alpha\cos\beta \\ a+b &= c \\ (a-b)\cos\alpha\sin\beta &= c\sin\alpha\cos\beta \end{aligned}\right\} \tag{330}$$

worin die letzte durch die Division der beiden ersten entsteht.

Multipliziert man die mittlere mit $\sin\alpha\cos\beta$ und subtrahiert von ihr die letzte, so kommt

$$(a+b)\sin\alpha\cos\beta - (a-b)\cos\alpha\sin\beta = 0$$
$$a\sin(\alpha-\beta) + b\sin(\alpha+\beta) = 0$$

und mithin

$$\frac{b}{a} = -\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} \tag{331}$$

Schreibt man in der letzten Gleichung (330) an Stelle von b $c-a$, so kommt, wenn man sogleich ordnet

$$2a\cos\alpha\sin\beta = c\sin(\alpha+\beta)$$

oder

$$\frac{c}{a} = 2\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \tag{332}$$

Man sieht hieraus, daſs die Richtungen der einfallenden und gebrochenen Amplituden stets dieselben sind, daſs aber bei der Reflexion eine Phasenverschiebung von einer halben Wellenlänge eintreten muſs, wenn $\alpha > \beta$ ist, das ist, wenn das reflektierende Medium das optisch dichtere ist.

Für sehr geringe Einfallswinkel, wo bereits Sinus und Bogen vertauscht werden darf, erhält man unter Berücksichtung der Formel

$$\alpha = n\beta \tag{333}$$

die einfachen Gleichungen

$$\frac{b}{a} = -\frac{n-1}{n+1},\quad \frac{c}{a} = \frac{2}{n+1} \tag{334}$$

b) *Schwingungen in der Einfallsebene.* Das soeben behandelte Problem, bei welchem die Schwingungen des eintretenden Strahles senkrecht auf die Einfallsebene stattfinden, ist ein spezieller Fall eines allgemeineren Problems, bei welchem die Winkel der Schwingungsrichtungen mit der die verschiedenen Medien trennenden Ebene die Werte α' für den einfallenden und reflektierten, den Wert β' für den gebrochenen Strahl besitzen. Wir behandeln sogleich diesen ganz allgemeinen Fall, als dessen Anwendung sich dann auch die Formeln für Schwingungen in der Einfallsebene ergeben werden.

Die Komponenten der einzelnen Schwingungen haben also in dieser Trennungsebene die Amplituden $a\cos\alpha'$, $b\cos\alpha'$, $c\cos\beta'$, und daher verwandelt sich das System (330) in das folgende

$$\left.\begin{aligned} (a^2-b^2)\cos\alpha\sin\beta &= c^2\sin\alpha\cos\beta \\ (a+b)\cos\alpha' &= c\cos\beta \\ (a-b)\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha} &= c\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\beta} \end{aligned}\right\} \tag{335}$$

Die beiden letzteren Gleichungen ergeben durch einfache Substitution:

$$(a-b)\cos\alpha\sin\beta\cos^2\beta' = (a+b)\sin\alpha\cos\beta\cos^2\alpha'$$

woraus dann folgt:

$$\frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha\sin\beta\cos^2\beta' - \sin\alpha\cos\beta\cos^2\alpha'}{\sin\alpha\cos\beta\cos^2\alpha' + \cos\alpha\sin\beta\cos^2\beta'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (336)$$

und ähnlich

$$\frac{c}{a} = \frac{2\cos\alpha\sin\beta\cos\alpha'\cos\beta'}{\sin\alpha\cos\beta\cos^2\alpha' + \cos\alpha\sin\beta\cos^2\beta'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (337)$$

Aus diesen allgemeinen Formeln ergeben sich leicht die Spezialfälle; hat man wie vorhin Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene, so wird $\alpha' = \beta' = 0$, woraus die Formeln (331, 332) entspringen.

Finden dagegen die Schwingungen in der Einfallsebene statt, so wird

$$\alpha' = \alpha,\ \beta' = \beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (338)$$

und man erhält in diesem Falle:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin\beta\cos\beta - \sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{2\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta}$$

welche Formeln auch so geschrieben werden können:

$$\frac{b}{a} = -\frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (339)$$

$$\frac{c}{a} = \frac{4\cos\alpha\sin\beta}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (340)$$

Es findet also auch in diesem Falle eine Phasenverschiebung von einer halben Wellenlänge statt, wenn die Reflexion von einem optisch dichteren Medium bewirkt wird.

c) *Schwingungen zur Einfallsebene beliebig geneigt.* Bildet endlich, um einen etwas allgemeineren Fall zu haben, die Schwingungsebene der einfallenden Strahlen den Winkel δ mit der Einfallsebene, so kann man die Amplituden in zwei Komponenten $a\cos\delta$ und $a\sin\delta$ zerlegen, deren erstere in die Einfallsebene, die zweite senkrecht auf diese Ebene fällt. Man hat dadurch:

$$\left.\begin{aligned} \frac{b}{a} &= -\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\sin\delta - \frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}\cos\delta = b' + b'' \\ \frac{c}{a} &= \frac{2\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}\sin\delta + \frac{2\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = c'' + c' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (341)$$

wo b', c' (b'', c'') die Schwingungskomponenten senkrecht (parallel) zur Einfallsebene bedeuten.

d) Ist der Strahl überhaupt nicht polarisiert, so nimmt der Faktor $\sin\delta$, $\cos\delta$ alle möglichen Werte von 0 bis 1 gleich wahrscheinlich und gleich häufig an, und man hat für diesen Fall:

$$\left.\begin{aligned} \frac{b}{a} &= -\tfrac{1}{2}\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} - \tfrac{1}{2}\frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} = b_1' + b_1'' \\ \frac{c}{a} &= \tfrac{1}{2}\frac{2\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)} + \tfrac{1}{2}\frac{2\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = c_1'' + c_1' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (342)$$

wo die Abkürzungen den früheren entsprechend gewählt sind.

Will man die Intensitäten des Lichtes kennen, so braucht man nur die lebendige Kraft der Schwingungen zu bilden, also für gleiche Wellenlängen die Ausdrücke ma^2, mb^2, $m_1 c^2$ oder auch a^2, b^2, $\frac{m_1}{m} c^2$. Nun ist aber nach dem früheren

$$\frac{m_1}{m} = \frac{p_1 q_1 \varrho_1}{pq\varrho} = \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}$$

und daher werden die Intensitäten des einfallenden, reflektierten und gebrochenen Strahles in den vier hier untersuchten Fällen

Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene

$$a^2, \quad a^2\frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}, \quad a^2\frac{\sin 2\alpha\sin 2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}$$

Schwingungen in der Einfallsebene

$$a^2, \quad a^2\frac{\operatorname{tg}^2(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)}, \quad a^2\frac{\sin 2\alpha\sin 2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)\cos^2(\alpha-\beta)}$$

Schwingungen zur Einfallsebene um δ geneigt

$$a^2, \quad b'^2 + b''^2, \quad (c'^2 + c''^2)\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}$$

Unpolarisierte Schwingungen

$$a^2, \quad b_1'^2 + b_1''^2, \quad (c_1'^2 + c_1''^2)\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta} \qquad (343)$$

wo die angedeuteten Intensitäten nach den Formeln (341, 342) schon in dem mitgeteilten Schema mitenthalten sind.

Setzt man $\alpha+\beta = 90^0$, oder unter Zuhilfenahme des Brechungsgesetzes

$$\tan \alpha = n \qquad (344)$$

wo nun dieses α der Polarisationswinkel genannt wird, so erhalten wir einige Spezialfälle von höchstem Interesse. Wir sehen zunächst, daß bei diesem Einfallswinkel senkrecht zur Einfallsebene schwingendes Licht bezüglich seiner Polarisation nicht geändert wird, daß dagegen Licht, welches in der Einfallsebene schwingt, vollkommen ausgelöscht wird. Unpolarisiertes Licht wird teilweise polarisiert, so daß die Schwingungen nach der Reflexion senkrecht zur Einfallsebene stattfinden. Dies läßt sich so beweisen. Der Unterschied $b_1'^2 - b_1''^2$ ist offenbar der Überschuß des Lichtes, welches senkrecht, über das, welches parallel der Einfallsebene schwingt, also die Menge des im reflektierten Lichte vorhandenen senkrecht zur Einfallsebene schwingenden Lichtes. Es ist nun

$$b_1'^2 - b_1''^2 = \frac{1}{2}\frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)} - \frac{1}{2}\frac{\operatorname{tg}^2(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)} = \frac{1}{2}\frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}\left[1 - \frac{\cos^2(\alpha+\beta)}{\cos^2(\alpha-\beta)}\right]$$

Es ist nun immer

$$\cos(\alpha+\beta) < \cos(\alpha-\beta)$$

mithin auch

$$1 - \frac{\cos^2(\alpha+\beta)}{\cos^2(\alpha-\beta)} > 0$$

und demzufolge auch

$$b_1'^2 - b_1''^2 > 0 \text{ oder } b_1' > b_1''$$

womit das Gesagte erwiesen ist.

e) Ganz analog zeigt man, daſs gewöhnliches Licht auch durch Brechung teilweise polarisiert wird. Es ist dabei

$$(c_1''^2 - c_1'^2)\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}$$

die Menge des im durchgehenden Lichte parallel der Einfallsebene schwingenden Lichtes. Durch Substitution der für c_1'' und c_1' gefundenen Werte kommt:

$$(c_1''^2 - c_1'^2)\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}\left[\frac{\cos^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)\cos^2(\alpha-\beta)} - \frac{\cos^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}\right]$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)\cos^2(\alpha-\beta)}[1-\cos^2(\alpha-\beta)]$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}\left[1-\frac{\cos^2(\alpha+\beta)}{\cos^2(\alpha-\beta)}\right].$$

Daraus folgt aber ebenso wie früher

$$c_1''^2 > c_1'^2$$

d. h. die Komponente der Intensität des Lichtes, welches parallel zur Einfallsebene schwingt, ist gröſser, als die der Intensität des senkrecht zur Einfallsebene schwingenden Lichtes.

Nicht unwichtig ist endlich auch die Bemerkung, daſs durch Brechung sowohl als durch Reflexion eine Drehung der Polarisationsebene stattfindet. Polarisationsebene nennen wir kurzhin die zur Schwingungsebene Normale. Bezeichnet ϱ den Winkel, den die Schwingungsebene des reflektierten Strahles mit der Einfallsebene bildet, so ist

$$\cot\varrho = \frac{b''}{b'} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}\cot\delta = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}\cot\delta \quad . \; . \; . \quad (345)$$

Für den gebrochenen Strahl hat man, wenn wieder ϱ_1 der Winkel zwischen der Einfallsebene und der Schwingungsrichtung des gebrochenen Strahles bedeutet:

$$\cot\varrho_1 = \frac{c_1''}{c_1'} = \frac{1}{\cos(\alpha-\beta)}\operatorname{tang}\delta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (346a)$$

Läſst man nacheinander mehrere Brechungen, etwa n eintreten, so findet man:

$$\cot\varrho_n = \frac{1}{\cos^n(\alpha-\beta)}\operatorname{tang}\delta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (346b)$$

Ist α von Null verschieden, so nähert sich bei unendlich wachsendem n, $\cot\varrho_n$ der Grenze ∞, ϱ_n also selbst wird Null, d. h. durch oft wiederholte Brechungen wird das Licht immer vollständiger polarisiert, trotzdem es, wie man sieht, für Brechung keinen Polarisationswinkel giebt. Bei Reflexion dagegen giebt $\alpha+\beta = 90^0$ schon $\varrho = \frac{\pi}{2}$; also einmalige Polarisation unter dem Polarisationswinkel $\alpha = \operatorname{arctang} n$ bewirkt schon vollständig geradlinige Schwingung des Lichtes.

E. Doppelbrechung der Strahlung.

Bisher haben wir die Lichtschwingungen nur in solchen Medien untersucht, welche nach allen Seiten hin gleiche Elastizität besaſsen. Lassen wir diese Voraussetzung fallen, so werden Schwingungen entstehen, welche nach den verschiedenen Richtungen der geänderten Elastizität im allgemeinen verschiedene Fortpflanzungs-

geschwindigkeiten besitzen müssen, die sich also nach Maſsgabe der Richtung und Zahl der verschiedenen Elastizitätskräfte teilen müssen.

Da uns eine vollständige Theorie der doppelten Brechung, welche wir nur in der Theorie der spektralanalytischen Instrumente benutzen werden, zu weit führen würde, müssen wir uns hier darauf beschränken, die Verschiedenheit der Elastizität in gewissen Medien darzuthun, was wir, Stefans[1] Gedankengang folgend, hier unternehmen wollen.

a) Denkt man sich einen Punkt eines optischen Mediums nach allen möglichen Richtungen soweit verschoben, daſs der Arbeitsaufwand während der Verschiebung konstant bleibt, so erfüllen die neuen Punkte des Mediums eine krumme Fläche, welche man die Fläche gleicher Arbeit nennen kann.

Diese ist offenbar eine Kugeloberfläche, wenn die Kraft, welche zur Verschiebung verbraucht wird, von der Richtung der Verschiebung unabhängig ist, sie ist eine Fläche zweiten Grades, wenn diese vereinfachende Voraussetzung nicht stattfindet.

Setzt man, wie in der Theorie der Schwingungen immer, die Kraft der Verschiebung ξ, η, ζ proportional, so werden die nach den drei Axen der Koordinaten geschätzten Kräftekomponenten

$$\left.\begin{aligned} X &= a\xi + a'\eta + a''\zeta \\ Y &= b\xi + b'\eta + b''\zeta \\ Z &= c\xi + c'\eta + c''\zeta \end{aligned}\right\} \qquad (347)$$

Ist nun die Verschiebung eine geradlinige, so wird die zu leistende Arbeit nur zur Überwindung derjenigen durch die Verschiebung entstehenden Kraftkomponente aufgewendet, welche in die Richtung der Verschiebung σ fällt. Da diese mit den Koordinatenaxen Winkel bildet, deren Kosinusse $\frac{\xi}{\sigma}$, $\frac{\eta}{\sigma}$, $\frac{\zeta}{\sigma}$ sind, so ist jene Komponente

$$X\frac{\xi}{\sigma} + Y\frac{\eta}{\sigma} + Z\frac{\zeta}{\sigma}.$$

Die während der ganzen Verschiebung von $\sigma = 0$ bis $\sigma = \sigma$ aufgewandte Kraft ist daher durch den Flächeninhalt des Dreiecks gegeben, dessen Basis die Verschiebung σ, dessen Höhe die gegebene Kraftkomponente ist. Man hat also

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= -\left(X\frac{\xi}{\sigma} + Y\frac{\eta}{\sigma} + Z\frac{\xi}{\sigma}\right) \\ &= -\left(\tfrac{1}{2}a\xi^2 + \tfrac{1}{2}b'\eta^2 + \tfrac{1}{2}c''\zeta^2 + \frac{b''+c'}{2}\eta\zeta + \frac{a''+c}{2}\xi\zeta + \frac{a'+b}{2}\xi\eta\right) \end{aligned} \qquad (348)$$

wenn $\mathfrak{A}$ die bei der Verschiebung σ von den Kräften des Systems gethane Arbeit darstellt, welche der zur Bewerkstelligung dieser Verschiebung notwendigen der absoluten Gröſse nach gleich, dem Zeichen nach aber entgegengesetzt ist. Da wir das optische Medium als solches voraussetzten, dessen Kräfte nur von den gegenseitigen Entfernungen abhängen, so ist darauf das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft anwendbar, was zur Folge hat, daſs die Arbeit dieselbe bleibt, welchen Weg auch der verschiebbare Punkt zwischen den festgegebenen Endpunkten durchläuft. Die Formel (348) gilt also für beliebig gestaltete aber unendlich kleine Verschiebungen.

---

[1] Theorie der doppelten Brechung. Sitzber. d. k. Akad. d. Wiss. Wien. Bd. L. 1864.

Erteilt man dem Punkte eine andere Verschiebung σ', die sich von σ nur dadurch unterscheidet, dafs ihre Projektion auf die Abszissenaxe die Projektion von σ auf dieselbe Axe um die kleine Gröfse $\varDelta\xi$ überragt, so hat man in (348) an Stelle von ξ zu setzen $\xi+\varDelta\xi$, während η und ζ dieselben bleiben. Vernachlässigt man sodann das Quadrat von $\varDelta\xi$, so wird:

$$\mathfrak{A}' = -\Big(\tfrac{1}{2}a\xi^2 + a\xi\varDelta\xi + \tfrac{1}{2}b'\eta^2 + \tfrac{1}{2}c''\zeta^2 + \frac{b''+c'}{2}\eta\zeta + \frac{a''+c}{2}\xi\zeta + \frac{a''+c}{2}\zeta\varDelta\xi$$
$$+ \frac{a'+b}{2}\xi\eta + \frac{a'+b}{2}\eta\varDelta\xi\Big) = \mathfrak{A} - \Big(a\xi + \frac{a'+b}{2}\eta + \frac{a''+c}{2}\zeta\Big)\cdot\varDelta\xi \quad . \; . \; . \quad (349)$$

Da es aber derselben Arbeit bedürfte, um den Punkt aus der Gleichgewichtslage zuerst nach σ, sodann um das der x-Axe parallele Stück $\varDelta\xi$ zu verschieben, wodurch man ebenfalls in den Endpunkt von σ' gelangte, so ist letztere kleine Verschiebung, welche mit der Arbeitsleistung $-X\varDelta\xi$ nur in der Richtung der x-Axe verbunden ist, zugleich die einzige Arbeitsleistung:

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} - X\varDelta\xi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (350)$$

welche naturgemäfs mit $\mathfrak{A}'$ gleich sein mufs. Man erhält durch Vergleichung von (349) und (350):

$$X = a\xi + \frac{a'+b}{2}\eta + \frac{a''+c}{2}\zeta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (351)$$

oder mit Rücksicht auf (347):

$$a' = b,\; a'' = c \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (352a)$$

Zu diesen zwei Gleichungen findet man noch eine dritte

$$b'' = c' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (352b)$$

wenn man dem Punkte eine Verschiebung σ'' oder σ''' erteilt, welche sich von σ dadurch unterscheiden, dafs die Projektion derselben auf die drei Koordinatenaxen bezüglich

$$\xi,\; \eta+\varDelta\eta,\; \zeta \text{ und } \xi,\; \eta,\; \zeta+\varDelta\zeta$$

sind, und dann auf ähnliche Weise die zu diesen Verschiebungen nötigen Arbeiten bestimmt wie in dem früheren Falle.

Nach den Bestimmungen der drei Konstanten a', a'' und b'' geht die Gleichung (348) über in die folgende:

$$\mathfrak{A} = -(\tfrac{1}{2}a\xi^2 + \tfrac{1}{2}b'\eta^2 + \tfrac{1}{2}c''\zeta^2 + c'\eta\zeta + c\xi\zeta + b\xi\eta) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (353)$$

welche als die Bedingung aufgefafst werden kann, welcher die Projektionen der Verschiebung σ genügen müssen, wenn diese stets mit derselben Arbeit erfolgen soll. Diese Bedingung stellt geometrisch eine Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung dar, mit dem Mittelpunkte in der Gleichgewichtslage. Sie kann weiter nur eine geschlossene Fläche sein, da es keine Richtungen geben soll, in welchen eine Verschiebung bis ins Unendliche mit einem Aufwande einer beliebig kleinen Arbeit erfolgen könnte. Diese Fläche stellt also ein Ellipsoid dar, welches das Ellipsoid der gleichen Arbeit heifsen soll.

Wir haben somit folgenden Satz:

I. Um jeden Punkt eines optischen Mediums läfst sich ein Ellipsoid konstruieren von der Beschaffenheit, dafs eine Verschiebung dieses Punktes bis zu irgend einer Stelle der Oberfläche des Ellipsoides immer mit demselben Aufwande von Arbeit gemacht werden kann. Dieses Ellipsoid heifst das Ellipsoid der gleichen Arbeit.

Aus der Bedeutung dieses Ellipsoides als einer Fläche gleicher Arbeit folgt unmittelbar, dafs jede Verschiebung in der Oberfläche des Ellipsoides ohne Aufwand, natürlich auch ohne Gewinn von Arbeit bewerkstelligt werden kann. Daraus folgt, dafs

auf den in die Oberfläche geschobenen Punkt keine tangentiale Kraft wirkt. Somit haben wir die zwei Sätze:

II. Durch eine Verschiebung in der Richtung des Radiusvektors des Ellipsoides wird eine Kraft geweckt, die mit der Normale des Ellipsoides gleiche Richtung hat.

III. Es giebt drei aufeinander senkrechte Richtungen, nämlich die drei Axen des Ellipsoides, für welche die Richtungen der Verschiebung und der durch diese geweckten Kraft zusammenfallen; sie heifsen Elastizitätsaxen, die nach ihnen wirksamen Elastizitäten die Hauptelastizitäten.

Die Lage des Ellipsoides gleicher Arbeit, sowie die Grofse seiner Axen für eine und dieselbe Arbeit wird im allgemeinen sich ändern von Punkt zu Punkt des Systems. Ist aber dieses ein homogenes, was wir weiterhin voraussetzen, befinden sich also alle Punkte unter gleichen Verhältnissen, so bleibt auch das Ellipsoid für alle Punkte gleich der Grofse und Orientierung nach. Die Axen derselben heifsen dann Elastizitätsaxen des optischen Mediums.

Beziehen wir nun das Ellipsoid auf Koordinaten, die seinen Axen parallel laufen, so werden in der Gleichung (353) die ξ, η, ζ in Produkten zu je zweien enthaltenden Glieder wegfallen, also die von der Lage der Koordinatenaxen abhängigen Grofsen b, c, c Null werden. Ersetzen wir die für das neue Axensystem geltenden Grofsen a, b, c durch $-a^2$, $-b^2$, $-c^2$, so geht die angeführte Gleichung über in

$$2\mathfrak{A} = a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2 \tag{354}$$

und die Gleichung (347) in

$$X = -a^2\xi,\ Y = -b^2\eta,\ Z = -c^2\zeta. \tag{355}$$

Den absoluten Wert der auf die Einheit der Verschiebung reduzierten Kraft nennen wir Elastizität. Die Komponenten dieser sind daher

$$a^2\frac{\xi}{\sigma},\ b^2\frac{\eta}{\sigma},\ c^2\frac{\zeta}{\sigma}.$$

Bildet σ mit den Koordinatenaxen Winkel, deren Kosinusse f, g, h sind, so ist

$$f = \frac{\xi}{\sigma},\ g = \frac{\eta}{\sigma},\ h = \frac{\zeta}{\sigma} \tag{356}$$

und dann werden die drei Komponenten der durch die Verschiebung σ geweckten Elastizität

$$a^2 f,\ b^2 g,\ c^2 h \tag{357}$$

und diese Elastizität selber, welche wir die totale nennen und mit T bezeichnen wollen, wird bestimmt sein durch die Gleichung

$$T^2 = a^4 f^2 + b^4 g^2 + c^4 h^2. \tag{358}$$

Geschieht die Verschiebung parallel zu einer der Axen x, y, z, so wird die Totalelastizität bezüglich a^2, b^2, c^2. Diese Grofsen bezeichnen also die Hauptelastizitäten eines Mediums, und bestimmen die durch jede beliebige Verschiebung geweckte Elastizität.

Von besonderer Wichtigkeit ist die Komponente der Totalelastizität, welche in die Richtung der Verschiebung fällt. Sie soll parallele Elastizität heifsen und mit P bezeichnet werden. Man findet sie, wenn man T mit dem Kosinus des Winkels multipliziert, den T mit σ einschliefst, oder wenn man jede der Komponenten (357) auf die Richtung von σ projiziert, und die drei Projektionen addiert. Es ist somit

$$P = a^2f^2 + b^2g^2 + h^2c^2$$

oder wegen der Gleichung (356) und (354):

$$P = \frac{2\mathfrak{A}}{\sigma^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (359)$$

Da σ ein Radiusvektor des Ellipsoides gleicher Arbeit ist, so werden totale und parallele Elastizität identisch, wenn die Verschiebung in eine der Halbaxen des Ellipsoides fällt. Man hat demnach die Sätze:

IV. Jede der drei Hauptelastizitäten ist gleich der doppelten Arbeit, für welche das Ellipsoid konstruiert ist, dividiert durch das Quadrat der zugehörigen Halbaxe des Ellipsoides.

V. Durch die Richtungen und Gröfsen der Hauptelastizitäten ist die durch jede beliebige Verschiebung geweckte Elastizität vollkommen bestimmt.

VI. Die durch eine Verschiebung geweckte parallele Elastizität ist gleich der doppelten Arbeit, für welche das Ellipsoid konstruiert ist, dividiert durch das Quadrat des mit der gemachten Verschiebung zusammenfallenden Radiusvektors des Ellipsoides.

Durch diese sechs Sätze ist die erste Aufgabe der Theorie, die Gesetze der Verteilung der Elastizität um einen Punkt herum, festgestellt. Die weitere Aufgabe besteht nun darin, aus der gegebenen Elastizitätsverteilung die Gesetze der Polarisation und der Fortpflanzung des Lichtes abzuleiten.

b) Nimmt man Planwellen an, setzt also voraus, dafs in jedem Punkte einer unendlichen durch das Medium gelegten Ebene zur selben Zeit eine und dieselbe Verschiebung existiere, so kann die Fortpflanzung dieser Verschiebung nur in einer zur Wellenebene senkrechten Richtung stattfinden, und die Geschwindigkeit derselben kann nur abhängen von der Richtung der Fortpflanzung und der Richtung der Verschiebung. Um das Gesetz dieser Abhängigkeit zu finden, denken wir uns um die Gleichgewichtslage eines Punktes in der Wellenebene das Ellipsoid der gleichen Arbeit konstruiert, welches von der Ebene selbst in einer Ellipse geschnitten wird. Die vorhandene Verschiebung bildet einen Radiusvektor des Ellipsoides und der Schnittellipse. Die totale durch die Verschiebung geweckte Elastizität steht normal zum Ellipsoide in jenem Punkte, in welchem dieses vom Radiusvektor getroffen wird. Diese totale Elastizität zerlegen wir in zwei Komponenten, eine, welche in die Wellenebene fällt und eine darauf senkrechte. Diese letztere soll die normale Elastizität heifsen. Sie sucht Bewegungen in der zur Wellenebene senkrechten Richtung, also longitudinale Schwingungen hervorzubringen, und da wir mit Fresnel annehmen, dafs der Äther longitudinaler Schwingungen nicht fähig ist, oder wenn sie vorhanden wären, sie nicht als Licht empfindbar sind, dieses daher auch nicht modifizieren, so lassen wir die Wirkung der Normalelastizität aufser acht.

Die in die Wellenebene fallende Komponente der Elastizität hat die Richtung der Normalen in jenem Punkte der Schnittellipse, in welchem diese von der Verschiebung getroffen wird; sie fällt also nur für zwei Richtungen der Verschiebung mit dieser zusammen. Diese Richtungen sind die der Axen der Schnittellipse. Hat die Verschiebung eine dieser beiden Richtungen, so wird sie auch während ihrer Fortpflanzung ihre Richtung beibehalten, da keine Kraft vorhanden ist, welche dieselbe zu ändern streben würde. Diese beiden Schwingungen sollen deshalb der Erhaltung fähige, stabile heifsen.

Gilt nun die übliche Gleichung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Strahles, in welcher die Elastizität hier durch die Parallelelastizität ersetzt werden mufs, so gilt für die Schwingungen der beiden stabilen Richtungen nach (359) die Gleichung:

$$c_1 = \frac{1}{\sigma_1}\sqrt{\frac{2\mathfrak{A}}{d}}, \quad c_2 = \frac{1}{\sigma_2}\sqrt{\frac{2\mathfrak{A}}{d}} \tag{360}$$

wo σ_1 und σ_2 die beiden Halbaxen der Ellipse, d die Dichtigkeit des optischen Mediums bedeuten Die beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sind also verschieden, und erhalten ihren kleinsten und grofsten Wert, je nachdem sie in die Richtung der grofsen oder kleinen Axe der Ellipse fallen

Hat aber die Verschiebung in der Wellenebene eine andere Richtung als welcher die Eigenschaft der Stabilitat zukommt, so teilt sie sich in zwei der Erhaltung fahige Komponenten, und da diese mit ungleichen Geschwindigkeiten fortgepflanzt werden, so teilt sich die Welle entzwei, die gegeneinander senkrecht gerichtete Schwingungen enthalten, deren zugeordnete Strahlen also senkrecht gegeneinander polarisiert sind

Es giebt nun zwei Lagen der Wellenebene, fur welche jede in ihr enthaltene Schwingung eine stabile ist, es sind dies jene Lagen, in welchen die Wellenebene das Ellipsoid der gleichen Arbeit in Kreisen schneidet Im Kreise ist der Radiusvektor immer auch Normale, in diesem Falle ist in der Wellenebene keine andere Komponente der Elastizitat vorhanden, als die der Verschiebung parallele und diese hat fur alle Verschiebungsrichtungen in dieser Ebene einen und denselben Wert Eine so gelegene Planwelle pflanzt sich daher in dem Medium ohne Teilung fort, die Richtungen dieser einfachen Fortpflanzung heifsen optische Axen des Systems

Die Ebenen welche das Ellipsoid in Kreisen schneiden, gehen durch die mittlere Axe des Ellipsoides, die optischen Axen liegen daher in der Ebene der grofsten und kleinsten Axe des Ellipsoides, also in der Ebene der kleinsten und grofsten Hauptelastizitat des Mediums Ihre Lage gegen die Axen der beiden letzteren Elastizitaten ist leicht zu bestimmen Der diese beiden Axen enthaltende Schnitt ist eine Ellipse Jene zwei Durchmesser dieser Ellipse, welche gleich der mittleren Axe des Ellipsoides sind, geben die Tracen der Ebenen, welche das Ellipsoid in Kreisen schneiden Die zu diesen Durchmessern senkrechten geben die Richtungen der optischen Axen Der eine Winkel zwischen diesen wird von der Axe der kleinsten, der andere Winkel von der Axe der grofsten Elastizitat halbiert

Diese Ergebnisse lassen sich in folgende Satze zusammenfassen

VII Fur jede Wellenebene giebt es zwei aufeinander senkrecht stehende Richtungen, fur welche keine seitliche in die Wellenebene fallende Komponente der Elastizitat vorhanden ist Es sind dies die Richtungen der Axen jener Ellipse, in welcher die Wellenebene das Ellipsoid gleicher Arbeit schneidet Schwingungen von diesen beiden Richtungen erhalten sich wahrend der Fortpflanzung, sie heifsen deshalb stabile

VIII Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Planwelle mit Schwingungen von stabiler Richtung ist der Quadratwurzel aus der zu den Schwingungen parallelen Elastizitat direkt, somit der zugehorigen Axe der Ellipse, in der sie das Ellipsoid gleicher Arbeit schneidet, verkehrt proportional

IX Jede Planwelle, welche Schwingungen von einer nicht stabilen Richtung enthalt, teilt sich in zwei, von denen eine die zur ersten, die andere die zur zweiten stabilen Richtung parallelen Komponenten der Schwingungen aufnimmt Beide Wellen pflanzen sich fort mit Geschwindigkeiten, die zu diesen Schwingungsrichtungen gehoren

X Es giebt zwei Lagen fur eine Planwelle, in welcher jede in ihr enthaltene Schwingungsrichtung eine stabile ist Es sind dies jene Lagen, in welchen die Wellen-

ebene das Ellipsoid gleicher Arbeit in Kreisen schneidet. Es giebt also zwei Richtungen, nach denen eine Planwelle mit beliebigen Schwingungen sich ohne Teilung fortpflanzt; sie heifsen optische Axen und liegen in der Ebene der gröfsten und kleinsten Axe des Ellipsoides; ihre Winkel werden von diesen zwei Axen halbiert.

An diese für den allgemeinen Fall, dafs die drei Axen des Ellipsoides gleicher Arbeit sämtlich verschieden sind, geführten Betrachtungen läfst sich nun noch die Behandlung der zwei speziellen Fälle anknüpfen, in welchen entweder zwei, oder alle drei Axen gleich werden. Sind zwei der Axen gleich, was durch einen symmetrischen Bau des Mediums um die dritte Axe bedingt wird, so schneidet nur mehr eine zu dieser Axe senkrechte Ebene das Ellipsoid in einem Kreise; diese ist daher auch die einzige optische Axe des Mediums. Dem Radius dieses Kreisschnittes ist aber eine Axe jeder vorkommenden Schnittellipse gleich, nämlich die zur optischen Axe senkrechte. Die solche Schwingungen enthaltende Welle pflanzt sich daher nach allen Richtungen mit der gleichen Geschwindigkeit fort; es giebt in einem einaxigen Medium eine ordentliche Welle, während es eine solche in einem zweiaxigen Medium nicht giebt.

Ist endlich das Medium symmetrisch nach allen Richtungen, so geht das Ellipsoid in eine Kugelfläche gleicher Arbeit über. Jede beliebige Richtung ist eine optische Axe, das Medium ist ein einfach brechendes.

Da diese Lage der optischen Axen gegen die Axen der Elastizität schon durch das oben Gesagte bestimmt ist, gehen wir gleich zur Ableitung jener wichtigen Gleichung über, welche die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Welle in ihrer Abhängigkeit von der Fortpflanzungsrichtung giebt. Die Auffindung dieser ist eigentlich nur die Lösung einer geometrischen Aufgabe, die Axen der Ellipse, in welcher eine Ebene ein Ellipsoid central schneidet, darzustellen durch die Axen des Ellipsoides und die Richtungskosinusse der Normale zur schneidenden Ebene.

Die Richtung der Schwingungen in einer Planwelle sei gegeben durch die Kosinusse f, g, h, wie oben, die Richtung der Normale zu dieser Planwelle durch die Kosinusse l, m, n. Die durch σ geweckte Elastizität zerlegen wir in die normale, die parallele und in eine zu letzterer senkrechte, in die Wellenebene fallende laterale Komponente. Die Normale heifse N, mit den den Axen parallelen Komponenten Nl, Nm, Nn. Die parallele Komponente ist P, und kann nach dem obigen, wenn sie einer stabilen Richtung angehört, ersetzt werden durch das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit v multipliziert mit der Dichte. Nehmen wir die letztere als Einheit, so sind die zu den Koordinatenaxen parallelen Komponenten von P: $v^2 f$, $v^2 g$, $v^2 h$. Hat aber σ eine stabile Richtung, so giebt es keine laterale Komponente, und folglich sind die Komponenten der Totalelastizität parallel den Axen $a^2 f$, $b^2 g$, $c^2 h$ gegeben durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a^2 f &= v^2 f + Nl \\ b^2 g &= v^2 g + Nm \\ c^2 h &= v^2 h + Nn \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (361)$$

Berechnet man daraus f, g, h, multipliziert sie mit l, m, n und addiert, so folgt mit Rücksicht auf den transversalen Charakter der Schwingung:

$$\frac{l^2}{a^2 - v^2} + \frac{m^2}{b^2 - v^2} + \frac{n^2}{c^2 - v^2} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (362)$$

und dies ist die gesuchte Relation.

Pflanzt sich das Licht in einem Medium von einem Punkte aus nach allen möglichen Richtungen fort, so heifst der geometrische Ort aller jener Punkte, bis zu

welchen ein bestimmter Bewegungszustand in einer gegebenen Zeit übertragen worden ist, die Wellenfläche, wohl auch die Elementarwellenfläche des Mediums. Die Radienvektoren derselben sind die Strahlen.

Man gewinnt die Gleichung dieser Fläche, indem man sie als Umhüllungsfläche aller möglichen vom Ursprunge der Bewegung ausgegangenen Planwellen betrachtet. Nimmt man die Zeit, durch welche die Bewegung sich fortgepflanzt hat, zur Einheit, so ist die Gleichung einer solchen Planwelle, unter x, y, z die laufenden Koordinaten verstanden

$$lx + my + nz = v \tag{363}$$

wobei l, m, n die Richtungskosinusse der Normale zur Planwelle bedeuten, v aber durch (362) gegeben ist. Die Gleichungen zweier benachbarter Planwellen sind dann, wenn l und m die independenten Variabelen bedeuten

$$x + z\frac{dn}{dl} = \frac{dv}{dl} + \frac{dv}{dn}\frac{dn}{dl}$$

$$y + z\frac{dn}{dm} = \frac{dv}{dm} + \frac{dv}{dn}\frac{dn}{dm}$$

Aus der Gleichung

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

folgen

$$\frac{dn}{dl} = -\frac{l}{n}, \quad \frac{dn}{dm} = -\frac{m}{n}$$

so dafs man folgende drei Gleichungen hat

$$\left.\begin{aligned} x - \frac{dv}{dl} &= \frac{l}{n}\left(z - \frac{dv}{dn}\right) \\ y - \frac{dv}{dm} &= \frac{m}{n}\left(z - \frac{dv}{dn}\right) \\ z - \frac{dv}{dn} &= \frac{n}{n}\left(z - \frac{dv}{dn}\right) \end{aligned}\right\} \tag{364}$$

Aus der Gleichung (362) erhält man weiter

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv}{dl} &= -\frac{N}{v}\,\frac{l}{a^2 - v^2} \\ \frac{dv}{dm} &= -\frac{N}{v}\,\frac{m}{b^2 - v^2} \\ \frac{dv}{dn} &= -\frac{N^2}{v}\,\frac{n}{c^2 - v^2} \end{aligned}\right\} \tag{365}$$

worin N wie früher die Normalelastizität bedeutet, und $\frac{1}{N}$ für

$$\frac{l^2}{(a^2 - v^2)^2} + \frac{m^2}{(b^2 - v^2)^2} + \frac{n^2}{(c^2 - v^2)^2}$$

gesetzt ist, welcher Wert für das reziproke Quadrat der Normalelastizität durch Quadrierung und Summung der Gleichungen (361) gewonnen wird.

Multipliziert man die Gleichungen (365) nach der Reihe mit l, m, n und addiert sie, so hat man wegen (362)

$$l\frac{dv}{dl} + m\frac{dv}{dm} + n\frac{dv}{dn} = 0$$

und mit Hilfe dieser Gleichung geben die Werte von x, y, z in (364), wenn sie mit l, m, n multipliziert und dann addiert werden:

$$lx + my + nz = v = \frac{1}{n}\left(z - \frac{dv}{dn}\right)$$

somit kann man statt der Gleichungen (364) die folgenden schreiben:

$$\left.\begin{aligned} x = lv + \frac{dv}{dl} = lv - \frac{N^2 l}{v(a^2 - v^2)} = lv - \frac{Nf}{v} \\ y = mv - \frac{Ng}{v} \\ z = nv - \frac{Nh}{v} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (366)$$

worin die in der letzten Reihe stehenden Werte mit Hilfe der Gleichungen (361) gewonnen sind.

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit a^2f, b^2g, c^2h und addiert darauf, so kommt

$$a^2fx + b^2gy + c^2hz = Nv - \frac{N}{v}v^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (367)$$

weil

$$N = a^2fl + b^2gm + c^2hn$$
$$v^2 = a^2f^2 + b^2g^2 + c^2h^2$$

ist. a^2f, b^2g, c^2h sind proportional den Richtungskosinussen der Totalelastizität, x, y, z proportional den des Radiusvektors, und somit besagt die hingeschriebene Gleichung: Der Radiusvektor der Wellenfläche steht senkrecht auf der Richtung der Totalelastizität, welche durch die Schwingungen geweckt wird, die sich längs des Radiusvektors fortpflanzen.

Ferner folgt noch aus den Gleichungen (366), daſs der Radiusvektor mit der Totalelastizität und der Schwingung in einer Ebene liegt. Denn sind f_1, g_1, h_1 die Richtungen dieser, f_2, g_2, h_2 die der zweiten stabilen und zur ersten senkrechten Schwingung, x_1, y_1, z_1, v_1, N_1 die der ersten $x_2 \ldots N_2$ die der zweiten Richtung entsprechenden Werte von $x \ldots N$, so wird aus (366), falls man sie auf die erste Schwingung anwendet und mit f_2, g_2, h_2 multipliziert:

$$x_1f_2 + y_1g_2 + z_1h_2 = v_1(lf_2 + mg_2 + nh_2) - \frac{N_1}{v_1}(f_1f_2 + g_1g_2 + h_1h_2) = 0$$

womit der ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Eben diese Gleichungen (366) liefern auch noch den Wert des Radiusvektors r, indem sie geben:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = v^2 + \frac{N^2}{v^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (368)$$

woraus man

$$\frac{N^2}{v} = (r^2 - v^2)v$$

erhält. Substituiert man dies in die Gleichungen (366), so wird deren erste

$$x = lv - \frac{lv(r^2 - v^2)}{a^2 - v^2} = lv\frac{a^2 - r^2}{a^2 - v^2} = \frac{fv}{N}(a^2 - r^2) \quad \ldots\ldots \quad (369)$$

und analog auch die übrigen. Statt der Gleichungen (366) kann man also die folgenden setzen:

$$\frac{x}{a^2-r^2}=\frac{v}{N}f,\ \frac{y}{b^2-r^2}=\frac{v}{N}g,\ \frac{z}{c^2-r^2}=\frac{v}{N}h.$$

Multipliziert man dieselben resp. mit a^2x, b^2y, c^2z und summiert sie, so erhält man wegen (367)

$$\frac{a^2x^2}{a^2-r^2}+\frac{b^2y^2}{b^2-r^2}+\frac{c^2z^2}{c^2-r^2}=0 \tag{370}$$

die Gleichung der Wellenfläche.

Man kann ihr noch eine andere Gestalt erteilen, wenn man aus (369)

$$\frac{x(a^2-v^2)}{a^2-r^2}=lv,\ \frac{y(b^2-v^2)}{b^2-r^2}=mv,\ \frac{z(c^2-v^2)}{c^2-r^2}=nv$$

nimmt, sie der Reihe nach mit x, y, z multipliziert und dann summiert. Mit Hilfe der Gleichung (363) und der vorangehenden Wellenflächengleichung erhält man so

$$\frac{x^2}{a^2-r^2}+\frac{y^2}{b^2-r^2}+\frac{z^2}{c^2-r^2}+1=0 \tag{371}$$

als zweite Gleichungsform der Wellenfläche.

Bemerkenswert ist das in den vorhergehenden Entwickelungen zum Vorschein gekommene Resultat, dafs die Normalelastizität, welche bei der Fortpflanzung von Planwellen gar keine Rolle spielt, bei der Fortpflanzung von Elementarwellen eine Bedeutung gewinnt, indem die Fortpflanzungsrichtung der Schwingungen von bestimmter Lage durch die Richtung der Totalelastizität, die sie wecken, bestimmt ist. Die Geschwindigkeit, mit der die Schwingung in dieser Richtung fortgepflanzt wird, ist r. Nun ist in (368) v^2 die der Schwingungsrichtung parallele Komponente der Elastizität, bezeichnet man mit φ den spitzen Winkel, den sie mit der Richtung der Totalelastizität T bildet, so ist

$$v^2=T\cos\varphi,\ N=T\sin\varphi \tag{372}$$

und somit

$$r^2=\frac{T}{\cos\varphi}. \tag{373}$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit längs des Radiusvektors ist somit gleich der Quadratwurzel aus dem Quotienten der Totalelastizität und dem Kosinus des Winkels, den die Schwingungsrichtung mit der Richtung der Totalelastizität bildet. Dieses Resultat ist auffallend, insofern die die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bestimmende Elastizität grofser ist, als die überhaupt entwickelte, wenn nämlich an dem Satze, dafs die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Quadratwurzel aus einer Elastizität gleich sei, festgehalten wird auch für den Fall einer freien Fortpflanzung nach allen Seiten.

Das hier zu Grunde gelegte Ellipsoid, aus dem sich die Grundgesetze der Doppelbrechung mit solcher Leichtigkeit ergaben, ist schon von Cauchy unter dem Namen des Polarisationsellipsoides in die Lichttheorie eingeführt, und liefse sich auch aus unseren allgemeinen Schwingungsgleichungen leicht entwickeln. Doch ist die Benutzung des Polarisationsellipsoides wesentlich anderer Art, als die des Ellipsoides gleicher Arbeit. Ersteres diente nur als geometrisches Hilfsmittel, durch welches die Gesetze der Doppelbrechung dargestellt werden konnen. Das Ellipsoid der gleichen Arbeit dient aber zur Erklärung dieser Gesetze, zu ihrer Begründung durch mechanische Prinzipien.

Das Verhalten von optisch ein- und zweiaxigen Medien im polarisierten und gewöhnlichen Lichte darf wohl insoweit, als wir dies bei der Besprechung der Instrumente

nötig haben werden, als bekannt vorausgesetzt werden. Wo es auf mathematische Entwickelungen ankommt, sollen diese stets an der betreffenden Stelle abgeleitet werden. Ein näheres und allgemeineres Eingehen auf den Gegenstand würde uns jedoch hier zu weit von unserem Ziele ablenken.

5. Das Dopplersche Prinzip.

Bisher haben wir stets vorausgesetzt, dafs die Schwingungsquelle und der Beobachter gegeneinander in relativer Ruhe seien. Wir wollen nun diese Voraussetzung, die in der Anwendung der Spektralanalyse auf Astrophysik nur in den seltensten Fällen eingehalten ist, fallen lassen, und nun die Veränderungen der Schwingungen untersuchen, welche durch Bewegung des Beobachters und der Schwingungsquelle hervorgebracht werden. Wir setzen dabei voraus, dafs das Medium homogen und amorph sei, und wenn auch nicht absolut ruhig, doch nur als Ganzes in Bewegung begriffen sei, so dafs also die einzelnen Punkte desselben keine Verschiebungen erleiden. Bei der Ableitung dieser Erscheinungen halten wir uns ganz an die Entwickelungen von Br. Roland Eötvös[1].

1. Bestimmung der Wellenlänge.

Eine Schwingungsquelle Q in diesem Medium möge isochrone Oszillationen ausführen nach dem Gesetze

$$U = Af(t) \qquad (374)$$

wo U die Oszillationsgeschwindigkeit zur Zeit t ist, A die Maximalgeschwindigkeit, also die Geschwindigkeitsamplitude, und $f(t)$ eine in der Periode T periodische Funktion der Zeit bedeutet.

Der Punkt Q möge nun in gleichförmiger, geradliniger Bewegung begriffen sein, deren Geschwindigkeit gegen die ruhend gedachten Punkte des Mediums g sei. Zerlegen wir nun die Schwingung des Punktes in kontinuierlich folgende unendlich kleine Perioden, also in einzelne Stöfse, so werden diese einzeln im Medium sich nach Kugeloberflächen ausdehnen. Indem wir nun den Einflufs der fortschreitenden Bewegung selbst auf die Schwingungen als unendlich klein vernachlässigen, ersehen wir, dafs der Einflufs der Bewegung nur darin besteht, dafs die einzelnen Stöfse stets von andern Punkten des Raumes ausgehen. Ein jeder Stofs wird also zum Punkte P des Mediums, wenn dieser im Augenblicke des Stofses um δ von Q entfernt war, nach der Zeitdauer $\frac{\delta}{v}$ gelangen, wenn v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der schwingenden Bewegung bedeutet. Umgekehrt ging der Stofs, welcher P zur Zeit t trifft, bereits um $t - \frac{\delta}{v}$ von Q aus, und daher ist die Oszillationsgeschwindigkeit in P:

$$u = \alpha f\left(t - \frac{\delta}{v}\right) \qquad (375)$$

wo α die noch unbestimmte Geschwindigkeitsamplitude bezeichnet. Wir haben nun vor allem zu untersuchen, wie δ von der Zeit abhängt.

---

[1] Vorgelegt der Ungar. Akad. d. Wissensch. 1874, Juni 15.

Spricht man von der Fortpflanzung der Schwingungen bei bewegter Lichtquelle, so hat man die Entfernung des Punktes von der Lichtquelle entschieden in zwei verschiedenen Momenten zu kennen, zuerst im Momente t, zu welchem wir die Geschwindigkeit u suchen, dann in dem Momente, als die zur Zeit t nach P gelangende Welle von der Lichtquelle an das Medium abgegeben wurde Um Mifsverständnissen vorzubeugen, nennen wir die erste Entfernung die momentane und bezeichnen sie mit D die zweite, die aktive Entfernung und bezeichnen sie, wie bereits geschehen, mit δ

Ist nun c die Geschwindigkeitskomponente von g in der Richtung QP, so hat man

$$\delta - \frac{\delta}{v} c = D \tag{376}$$

Ebenso leicht ersieht man, dafs

$$D = D_0 - ct$$

wenn D_0 die momentane Entfernung zur Zeit 0 bedeutet Aus beiden Gleichungen findet man

$$\delta = \frac{v}{v - c}(D_0 - ct) \tag{377}$$

und nach der Einführung dieses Wertes in (375)

$$u = af\left(\frac{v}{v-c} t - \frac{D_0}{v-c}\right) \tag{378}$$

Da aber die Funktion $f(t)$ in der Periode T periodisch sein sollte, so mufs sie gleiche Werte besitzen, wenn zwischen zwei Zeitpunkten die Dauer

$$T' = \frac{v-c}{v} T \tag{379}$$

liegt Es ist also T' die Schwingungsdauer des Punktes P Die Formel (378) zeigt weiter auch, dafs die Funktion f in zwei Punkten der Geraden QP gleiche Werte besitzt, wenn dieselben um

$$\lambda' = (v - c)T' \tag{380}$$

von einander abliegen Es ist mithin λ' die Wellenlänge längs der Geraden QP

Man sieht leicht, dafs unsere Folgerungen auch dann noch gelten, wenn Q nicht in der Richtung QP fortschreitet, sondern auf einer Geraden, welche mit QP den Winkel ψ bildet Nur haben wir dann den Anfangspunkt der Zeitrechnung so zu wählen, dafs gt unendlich klein werde gegen D Der Wert der Geschwindigkeitskomponente ist also immer gegeben durch

$$c = g \cos \psi$$

Es ist klar, dafs die Fortpflanzung der Schwingungen unabhängig von der Art der Beobachtung ist Ist also der Beobachter in Ruhe, so steht er immer mit demselben Punkte P des Raumes in Verbindung, und erhält die Schwingungen der Lichtquelle stets aus der durch (377) gegebenen aktiven Entfernung Bewegt sich aber der Beobachter in den Geraden PQ mit der gleichförmigen Geschwindigkeit g', so erhält er stets von neuen Punkten (P) die Mitteilung ihres Bewegungszustandes Für die aktive Entfernung eines jeden dieser Punktes besteht die Gleichung (376) Ist nun c' die Geschwindigkeit des Beobachters gegen die Schwingungsquelle, d h die Geschwindigkeitskomponente von g nach PQ, so ist die momentane Entfernung des Beobachters von der Schwingungsquelle

$$D = D_0 - ct - c't$$

Anders ausgedrückt ist dieses D jene Entfernung, in welcher die den Beobachter berührenden Punkte des Mediums von der Lichtquelle liegen. Substituiert man also dieses D in (376), so erhält man die aktive Entfernung derjenigen Punkte von dem Schwingungsursprung, welche mit dem Beobachter stets in Berührung bleiben. Der Ausdruck derselben wird:

$$\delta = \frac{v}{v-c}(D_0 - ct - c't) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (381)$$

Die Oszillationsgeschwindigkeiten dieser Punkte erhält man durch Einführung dieses Wertes in (375); sie ergeben sich zu:

$$u = \alpha f\left(\frac{v+c'}{v-c}t - \frac{D_0}{v-c}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (382)$$

Die Periode des Ausdrucks wird jetzt:

$$T'' = \frac{v-c}{v+c'}T \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (383)$$

und diese ist gerade die beobachtete Sshwingungsdauer. Diese Gleichung ist der Ausdruck des Dopplerschen Prinzips. Wie früher ist auch jetzt

$$c' = g' \cos \psi$$

und wir wiederholen, dafs die Geschwindigkeiten so gezählt sind, dafs sich Beobachter und Schwingungsquelle gegeneinander bewegen; die Vorzeichen sind also stets so zu wählen, als ob die Geschwindigkeiten gegen einen auf der Linie PQ zwischen P und Q gelegenen Ursprung gerichtet seien.

Die Gleichung für die Oszillationsgeschwindigkeit (378) enthält noch die unbestimmte Amplitude α. Da nun die einzelnen Stöfse sich nach Kugeloberflächen verbreiten, so wird auch im Falle der Bewegung α indirekt proportional sein der Entfernung des Punktes P von dem Ausgangspunkte des Stofses. Man hat also

$$\alpha = \frac{A_1}{\delta}$$

wobei A_1 die Geschwindigkeitsamplitude auf der Oberfläche der Einheitskugel bedeutet.

In Bezug auf α hat Ketteler angenommen, es enthalte nicht nur in δ implizite die Geschwindigkeit c, sondern auch explizite, und gelangt dann zu der Folgerung, dafs die Intensität der Lichtquelle in einer bestimmten Entfernung von derselben dieselbe sei, als ob die Lichtquelle in dieser Entfernung ruhte.[1] Es ist daher nötig, näher zu untersuchen, ob diese Voraussetzung zutrifft, da sie a priori nicht einleuchtend ist. Zu dem Ende wählen wir den Fall, wo α von der Entfernung δ unabhängig wird, also von c nur explizite abhängen könnte. Diesen Fall realisieren wir in der Fortpflanzung von Wellen in einem cylindrischen Raum, in dessen Axe die Schwingungsquelle mit gleichförmiger Geschwindigkeit g fortschreite.

Da nach unserer Voraussetzung die fortschreitende Bewegung der Quelle auf deren Schwingungsbewegung keinen Einflufs haben soll, so können wir den Satz aussprechen: Die Schwingungsquelle giebt in Form von fortschreitenden Wellen an das

---

[1] Dr. E. Ketteler, Astronomische Undulationstheorie, pag. 143. Bonn, 1873.

Medium in derselben Zeit stets dieselbe Menge an lebendiger Kraft ab gleichgiltig ob sie in Ruhe ist oder bewegt gedacht wird

Die von der Schwingungsquelle abgegebene lebendige Kraft pflanzt sich stets nach zwei Richtungen fort Wäre sie in Ruhe, also $g = 0$, so wäre die während einer Schwingungsdauer abgegebene lebendige Kraft in zwei rechts und links von der Quelle befindlichen Scheiben von der Dicke

$$\lambda = v T$$

enthalten Die eine dieser Scheiben teilen wir in unendlich kleine Blättchen von der Dicke dD, so daſs die Grenzflächen derselben werden $D = D_1$, $D = D_1 + dD$, dabei lassen wir D_1 die Entfernung der Quelle von jenen Punkten des Mediums bedeuten, welche ihr unter allen von der einen Schwingung bewegten Punkten zunächst liegen In der unendlich dünnen Schichte dD dürfen alle Punkte des Mediums als mit derselben Geschwindigkeit behaftet gedacht werden Die Geschwindigkeit der ganzen Masse des Blättchens in der Entfernung D ist also

$$u = \alpha f\left(t - \frac{D}{v}\right)$$

Die Masse selbst ist aber

$$\mu = \sigma q \, dD$$

wo σ die Dichte des Mediums, q den Querschnitt des Cylinders bedeutet Die lebendige Kraft der Scheibe ist also

$$\tfrac{1}{2}\sigma q \alpha^2 f^2\left(t - \frac{D}{v}\right) dD$$

Auf der einen Seite der Schwingungsquelle beträgt also die während einer Schwingung abgegebene lebendige Kraft

$$L_1 = \tfrac{1}{2}\sigma q \alpha^2 \int\limits_{D_1}^{D_1+\lambda} f^2\left(t - \frac{D}{v}\right) dD$$

Wir setzen nun $t - \frac{D}{v} = x$, $t - \frac{D_1}{v} = \Delta$, so wird

$$L_1 = -\tfrac{1}{2}\sigma q \alpha^2 v \int\limits_{\Delta}^{\Delta - T} f^2(x)\, dx$$

Da nun T die Periode von $f(x)$ ist, so hat Δ auf den Wert des Integrals keinen Einfluſs, und da auch nach der anderen Seite ebensoviel lebendige Kraft abgegeben wird, so ist die ganze, dem Medium während der Zeit T abgegebene lebendige Kraft

$$L = \sigma q v \alpha^2 \int\limits_{0}^{T} f^2(x)\, dx$$

Ebenso bestimmen wir auch die lebendige Kraft, wenn sich die Schwingungsquelle mit der endlichen Geschwindigkeit g bewegt Wir haben aber dann auf die verschiedenen Werte von L_1 und L_2 zu achten

Die lebendige Kraft einer Schwingung liegt natürlich wieder in einer Scheibe

von der Dicke der an dem betreffenden Punkte herrschenden Wellenlänge. Diese beträgt in der Richtung der Annäherung:

$$\lambda' = (v - g)T$$

im Sinne der Entfernung aber

$$\lambda' = (v + g)T$$

Die Grenzflächen der ersteren Scheiben stehen in den Entfernungen $D = D_1$ und $D = D_1 + (v - g)T$; wir zerlegen die Scheiben wieder in Platten von der Dicke $dD = dD_0$ und berechnen die lebendige Kraft ihrer Masse, wobei die Geschwindigkeiten nach (378) anzunehmen sind. Um aber der Voraussetzung Raum zu geben, α könnte noch c explizite enthalten, schreiben wir hier α_1 und erhalten:

$$L_1 = \tfrac{1}{2}\sigma q \alpha_1^2 \int_{D_1}^{D_1+(v-g)T} f'^2\left(\frac{v}{v-g}t - \frac{D_0}{v-g}\right) dD$$

Setzen wir nun

$$\frac{v}{v-g}t - \frac{D_0}{v-g} = x$$

so folgt mit Rücksicht auf die Periodizität von $f(x)$ innerhalb der Periode T:

$$L_1 = \tfrac{1}{2}\sigma q (v-g)\, \alpha_1^2 \int_0^T f'^2(x)\,.\,dx \qquad \text{(385)}$$

Für die nach der anderen Richtung abgegebene lebendige Kraft finden wir sogleich:

$$L_2 = \tfrac{1}{2}\sigma q (v+g)\, \alpha_2^2 \int_0^T f'^2(x)\,.\,dx \qquad \text{(386)}$$

Nach unserem früheren Satze soll nun die lebendige Kraft unverändert bleiben, ob die Quelle ruhig oder bewegt ist. Man hat also:

$$L_1 + L_2 = L$$

oder

$$\alpha_1^2(v-g) + \alpha_2^2(v+g) = 2\alpha^2 v \qquad \text{(387)}$$

und nach dieser Gleichung können wir bereits entscheiden, ob α die Geschwindigkeit der Schwingungsquelle explizite enthalte.

Wir folgen zu dem Zwecke Kettelers Entwickelung, welcher die Elongationen eines in der aktiven Entfernung δ von der Schwingungsquelle befindlichen Punktes durch die Gleichung ausdrückt:

$$\varrho = af\left(t - \frac{\delta}{v}\right)$$

wobei also a die eigentliche Oszillationsamplitude bedeutet. Dieses a ist nach Ketteler von der Geschwindigkeit c der Lichtquelle nur insofern abhängig, als es den Wert der Entfernung verändert; dieses besagt wenigstens die Gleichung

$$a = \frac{A_1}{\delta}$$

in welcher A_1, die Amplitude auf der Einheitskugel, von c unabhängig betrachtet wird.

Nehmen wir nun wieder den vorhin untersuchten Fall. Nach Ketteler ist die Bewegung in der einen und anderen Richtung von der Schwingungsquelle gegeben durch:

$$\varrho_1 = af\left(\frac{v}{v-g}t - \frac{D_0}{v-g}\right)$$

$$\varrho\ = af\left(\frac{v}{v+g}t - \frac{D_0}{v+g}\right)$$

Bedeutet nun φ den Maximalwert der derivierten f', so stellen sich die Geschwindigkeitsamplituden dar

$$\alpha_1 = a\frac{v}{v-g}\varphi$$

$$\alpha\ = a\frac{v}{v+g}\varphi$$

$$\alpha = a\varphi, \text{ für } g = 0$$

und daher wird unsere Gleichung (387)

$$a\frac{v}{v-g} + a^2\frac{v}{v+g} = 2a$$

welche nicht bestehen kann, so lange a die Oszillationsamplitude von der Geschwindigkeit g unabhängig gedacht wird Daher lassen wir die Voraussetzung Kettelers von jetzt ab aufser acht und nehmen an, dafs die Geschwindigkeitsamplitude von der Geschwindigkeit der Schwingungsquelle explizite nicht abhängt Denn die Gleichung (387) ist identisch befriedigt, wenn man setzt

$$\alpha_1 = \alpha = \alpha$$

Daher mufs in der Gleichung

$$\alpha = \frac{A_1}{\delta}$$

A_1 von der Geschwindigkeit c unabhängig sein

Führt man diesen Wert in (378) ein, und ersetzt δ aus (376), so erhält man die schwingende Bewegung eines Punktes des Mediums

$$u = \frac{A_1}{D}\frac{v-c}{v}f\left(\frac{v}{v-c}t - \frac{D_0}{v-c}\right) \tag{388}$$

$$D = D_0 - ct$$

Ruht der Beobachter, so sind dies jene Schwingungen, welche ihn in jedem Augenblicke treffen

Ist er aber in Bewegung begriffen, so haben wir nach (382)

$$u = \frac{A_1}{D}\frac{v-c}{v}f\left(\frac{v+c}{v-c}t - \frac{D_0}{v-c}\right) \tag{389}$$

$$D = D_0 - ct - c\,t$$

Infolge der Ableitung ist es natürlich klar, dafs diese Schwingungen nicht einem Punkte angehören, sondern die Bewegung stets jener Punkte charakterisieren, welche gerade auf den Beobachter einwirken

Die Wellenlänge wird, wenn auch der Beobachter bewegt gedacht wird

$$\lambda'' = \frac{v-c}{v+c}Tv$$

wie man aus (383) leicht ersieht

2. Bestimmung der Intensität.

Unter der Intensität der Schwingung verstehen wir bei bewegtem Beobachter und bewegter Lichtquelle die Gröfse der lebendigen Kraft, welche während der Zeiteinheit auf eine der Wellenfläche parallele Flächeneinheit fiele, wenn die Schwingungen alle identisch wären mit jener, welche seit dem Augenblick, in welchem wir die Intensität bestimmen wollen, an die Flächeneinheit abgegeben wird.

Ist daher i die lebendige Kraft jener ersten Schwingung, und n die Zahl der Schwingungen in der Zeiteinheit, so hat man

$$I = ni \quad \dots \dots \dots \dots \quad (390)$$

Nun wollen wir die Flächeneinheit so klein wählen, dafs ihre Ausdehnung gegen D verschwindend klein sei; dann dürfen die Wellen als eben betrachtet werden. Weiter nehmen wir noch an, dafs auch die Wellenlänge gegen D verschwindend klein sei Dann liegt die Intensität der ersten Schwingung offenbar innerhalb einer eben und parallel begrenzten Schichte, deren von der Lichtquelle entferntere Begrenzungsebene gerade die zur Intensitätsmessung benutzte Flächeneinheit ist und deren Dicke die Wellenlänge der Schwingung in dieser Entfernung beträgt.

Die Wellenlänge betrug unabhängig von der Bewegung des Beobachters:

$$\lambda' = (v - c)T.$$

Ganz wie früher erhalten wir auch jetzt die lebendige Kraft innerhalb dieser Schichte durch die Gleichung:

$$i = \sigma \frac{A_1^2}{D^2} \frac{(v-c)^2}{v^2} (v-c) \int_0^T f^2(x) \, . \, dx \quad \dots \dots \quad (391)$$

Dabei haben wir aber D des Nenners der früheren Annahme nach als konstant betrachtet. Denn die Entfernung D verändert sich innerhalb der Schichtendicke nur um e i n e Wellenlänge.

Diese Intensität trifft den ruhenden Beobachter während der Zeit $T' = \frac{v-c}{v} T$. Bewegt sich aber der Beobachter, so trifft er schon nach der Zeit

$$T'' = \frac{v-c}{v+c'} T$$

Punkte von gleicher Phase, und daher ist n:

$$n = \frac{1}{T''} = \frac{v+c'}{v-c} \frac{1}{T} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (392)$$

Mit diesen Werten wird dann (390):

$$I = \frac{(v-c)^2}{v^2} (v+c') \, \sigma \frac{A_1^2}{D^2} \frac{1}{T} \int_0^T f^2(x) \, . \, dx$$

Ist nun $c = c' = 0$, so erhält man die Intensität I_0 der Lichtquelle, wenn diese und der Beobachter in der Entfernung D ruhen. Es ist also:

$$I_0 = v\sigma \frac{A_1^2}{D^2} \frac{1}{T} \int_0^T f^2(x) \, . \, dx \quad \dots \dots \dots \quad (393)$$

und man hat daher:

$$I = I_0 \frac{(v-c)^2}{v^2} \cdot \frac{v+c'}{v} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (394)$$

Wir wiederholen, dafs diese Gleichung nur fur solche Entfernungen gilt, welche gegen die Wellenlange unendlich grofs sind Die Werte der Geschwindigkeit g und q sind an keine Beschrankung gebunden, wenn Lichtquelle und Beobachter sich in derselben Geraden bewegen Sie mussen aber gegen v sehr klein sein, wenn die Richtungen der Bewegung nicht zusammenfallen

Statt des Satzes Kettelers fur den ruhenden Beobachter erhalten wir aus (394)

$$I = I_0 \frac{(v - c)}{v^2},$$

oder, da nach (376) ist

$$\delta = \frac{Dv}{v - c}$$

so kommt

$$I = I_0 \left(\frac{D}{\delta}\right)$$

Statt Kettelers Satz mussen wir also sagen Die Intensitat der Schwingungsquelle ist bei beliebiger Bewegung derselben an einem in bestimmter Entfernung von ihr gelegenen Punkte des Raumes ebenso grofs, als ob die Quelle in der, der momentanen Entfernung entsprechenden aktiven Entfernung ruhte

Hat man endlich nur sehr kleine Geschwindigkeiten, so erhalt man bis Glieder zweiter Ordnung genau

$$I = I_0 \left(1 - \frac{2c}{v} + \frac{c}{v}\right) \tag{395}$$

und fur die Wellenlange

$$\lambda = \lambda_0 \left(1 - \frac{c}{v} - \frac{c}{v}\right) \tag{396}$$

III.

Mathematische Spektralanalyse.

Nach den vorangegangenen Vorbereitungen, die nicht etwa blofs willkürlich zugezogen sind, sondern grofsenteils und gerade in den schwierigeren Punkten, wie z. B. dem der anomalen Dispersion in organischem Zusammenhange mit der abzuleitenden Spektralgleichung stehen, gehen wir auf den eigentlichen theoretischen Teil der Spektralanalyse über.

Unter mathematischer Spektralanalyse verstehen wir die rechnende Verfolgung aller durch den Zustand der Materie erklärlichen Ausstrahlungserscheinungen. Also nicht eigentlich Eigenschaften des Lichtes in sich, wie wir sie bisher behandelten, sondern Eigenschaften desselben als Wirkungen verschiedener Zustände. Angesichts dieser Erklärung ist von neuem hervorzuheben, dafs das Spektrum nicht etwa als eine Erscheinung blofs hoher Temperaturgrade angesehen sein will, sondern dafs es ganz allgemein alle Fernewirkungen der inneren Energie in sich begreift.

Die Gesetze der Spektralanalyse können in der Reihenfolge ihrer Entdeckung am zweckmäfsigsten vorgetragen werden. An der Spitze steht das, man könnte füglich sagen — organisatorische Gesetz Kirchhoffs, welches uns jedoch noch stetig auf Experimente verweist. Dann folgt bald darauf der grofse Schritt Clausius', der mit seinem Gesetze Spektralanalyse und engere theoretische Optik verkettet, und darauf die Bemühungen der neuesten Zeit, das explizite Gesetz der Emission darzustellen. Vorgänger auf diesem Pfade waren Zöllner und Becquerel, wie wir später sehen werden, beide mit wenig Erfolg. Ganz unabhängig von ihnen verfolgen denselben Zweck das vorliegende Buch und in den jüngsten Tagen mit vielem Geschicke der russische Physiker W. Michelson.

1. Das Kirchhoffsche Grundgesetz.

Das Kirchhoffsche Grundgesetz stellt den Zusammenhang zwischen der Emissions- und Absorptionsfähigkeit der Körper fest. Wir leiten es nach seinem Entdecker ab, indem wir zunächst beschränkend alle jene Körper ausnehmen, welche sich unter dem Einflusse des Lichtes oder der Wärme chemisch verändern, sodann aber

die Existenz absolut schwarzer Körper voraussetzen, d. h. solcher Körper, die schon in sehr geringen Dicken alles auf sie fallende Licht ohne Reflexion absorbieren. Einen solchen Körper C denken wir uns in einer absolut schwarzen Hülle (Fig. 9), die von einem mit der Öffnung 1 unterbrochenen Schirme geteilt werde. Von der Öffnung setzen wir voraus, daſs sie einen Mittelpunkt besitze. Dem erwähnten Schirme sei ein zweiter parallel angebracht, der der Öffnung 1 gegenüber eine zweite 2 besitze, die im allgemeinen durch einen absoluten schwarzen Körper geschlossen werde. Beide Öffnungen mögen klein sein, doch gegen die Wellenlänge der emittierten Strahlung immerhin so groſs, daſs Beugungserscheinungen vernachlässigt werden können. Das System, in welchem der schwarze Körper eingeschlossen ist, soll immer und überall denselben Zustand bewahren, und durch eine vollkommen adiathermane Hülle vor Strahlungsverlust geschützt sein.

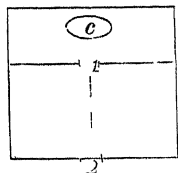



Fig. 9.

Von dem Körper C tritt durch die Öffnung 1 ein Strahlenbündel, dessen zwischen den Wellenlängen λ und $\lambda + d\lambda$ liegenden Teil wir betrachten wollen. Durch das Bündel legen wir die zwei aufeinander senkrechten Ebenen a und b, in welchen die nun polarisiert gedachten Strahlen schwingen mögen. Ist $E d\lambda$ die auf a entfallende Intensität, so wird die Gesamtintensität der Strahlung $\int_0^\infty E d\lambda$, im Falle eines schwarzen Körpers möge die Emission beständig mit e bezeichnet werden. Das Absorptionsvermögen werde A genannt. Die Gröſsen E und A hängen von der Natur des Körpers C, von seiner Temperatur, der Lage und Gestalt der Öffnungen 1 und 2 ab, weiter von der Wellenlänge λ und der Lage der Ebene a.

A. Emissionsvermögen schwarzer Körper.

Das Emissionsvermögen schwarzer Körper ist unabhängig von der Natur des Körpers, und nur eine Funktion der Wellenlänge, der Temperatur, der Gestalt und relativen Lage der Öffnungen 1 und 2. Um diesen Satz zu beweisen, unterscheiden wir die Fälle, daſs die Strahlung nach der Ebene a polarisiert ist, oder daſs sie beliebig gerichtet ist. Da der Zustand unseres Systems fortdauernd derselbe bleiben soll, muſs die Summe der Strahlungsintensität, die den schwarzen Körper C treffen, gleich sein der Intensität, die er aussendet. Es möge nun die Fläche 2 entfernt, und durch einen vollkommenen Hohlspiegel ersetzt werden, der seinen Mittelpunkt im Mittelpunkte der Öffnung 1 hat. Da noch immer Gleichgewicht bestehen soll, so müssen auch jetzt noch die vom Körper C ausgehenden Strahlen dieselben sein, welche er empfängt. Die Emission des Körpers C blieb aber jetzt gerade dieselbe wie früher, also müssen ihn auch dieselben Strahlen wieder treffen. Dies sind aber jene Strahlen, welche der Körper durch 1 nach 2 sendet. Es müssen demnach die von C durch 1 gegen 2 gesendeten Strahlen dieselben sein, als diejenigen, welche die Fläche 2 bei derselben Temperatur durch die Öffnung 1 sendet. Es ist demnach die Intensität der von C entsendeten Strahlen unabhängig von der Gestalt und weiteren Beschaffenheit des Körpers, wenn man nur eben die Wellenlänge dieselbe sein läſst, und eine bestimmte Schwingungsrichtung berücksichtigt.

Um nun die Schwingungsrichtung zu berücksichtigen, setzen wir zwischen die Öffnungen 1 und 2 (Fig. 10) eine so dünne Platte P, welche die Farben dünner Plättchen zeigt. Die Ausstrahlung und Absorption der Platte sei ihrer geringen Dicke

und ihrer stofflichen Beschaffenheiten nach vernachlässigbar. Die Richtung der Platte zum auffallenden, durch 1 kommenden Strahlenbündel sei durch den Polarisationswinkel gegeben, und die Einfallsebene sei entweder a oder b. Die Wand, welche die Schirme 1 und 2 verbindet, enthalte an der durchbohrten Stelle 3 das Spiegelbild der Öffnung 1. Es seien nun zuerst die Öffnungen 2 und 3 durch schwarze Flächen geschlossen, dann möge aber an Stelle von 3 ein vollkommener Hohlspiegel treten, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte des von der Platte P von 1 entworfenen Spiegelbildes zusammenfällt. Da das Temperaturgleichgewicht nicht gestört werden soll, so mufs der Körper C, der gegen die Strahlung von 3 her von dem kleinen Schirme bei der Öffnung 1 geschützt ist, in jedem Falle gerade soviel Strahlungsenergie empfangen, als er abgiebt. Die Totalstrahlung ist gegeben durch $\int\limits_0^\infty e\,d\lambda$, und mufs dieselbe bleiben, ob 3 durch eine schwarze Fläche oder durch den Hohlspiegel geschlossen ist. Die Intensität, welche dem Körper durch Entfernung der schwarzen Fläche 3 entzogen wird, ist also dieselbe, welche er durch die Substitution des Hohlspiegels wieder erhält. Es sei nun Q die Wärme, welche von 3 ausgegangen, an P polarisiert und reflektiert wurde, so hat man

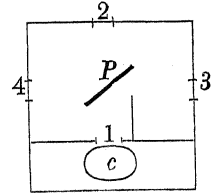



Fig. 10.

$$Q = \int\limits_0^\infty e\,r\,d\lambda \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

wo r einen von der Beschaffenheit der Platte und der Wellenlänge abhängigen Schwächungskoeffizienten bedeutet. Bei Anbringung des Hohlspiegels werden dem Körper C von zwei Stellen Intensitäten zugeführt. Von der der Öffnung 3 gegenüber liegenden Fläche kommt die Strahlungsenergie R, welche P durchdringt, am Spiegel 3 reflektiert wird, an der Platte P nochmals eine Reflexion erleidet, und so durch 1 nach C geführt wird. Der zweite Teil rührt von C selbst her; es sind Strahlen, die durch 1 gegangen an der Platte nach dem Spiegel 3 reflektiert wurden, und von dort wieder denselben Weg nach C zurücklegen. Wegen der zweimaligen Reflexion an P ist diese Strahlungsmenge $\int\limits_0^\infty e\,r^2\,d\lambda$. Es mufs also sein:

$$\int\limits_0^\infty e\,r^2\,d\lambda + R = Q \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Wendet man statt C den mit ihm gleichtemperierten schwarzen Körper C' an, dessen Emissionsvermögen e' ist, so gilt, da Q und R nur von der Hülle abhängen, auch für diesen:

$$\int\limits_0^\infty e'\,r^2\,d\lambda + R = Q \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

und aus beiden Gleichungen folgt:

$$\int\limits_0^\infty (e - e')\,r^2\,d\lambda = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Um diese Bedingungsgleichung aufzulösen, setzen wir statt des Zeichens r für den Schwächungskoeffizienten dessen Wert, der nach der Theorie der dünnen Plättchen gefunden wird an:

$$r = \varrho \sin^2 2\pi \frac{\Delta \cos i}{\lambda} \tag{5}$$

wenn Δ die Dicke des Plättchens, i den Brechungswinkel und ϱ einen echten Bruch bedeutet. Die Bedingung lautet jetzt

$$\int_0^\infty (e-\varepsilon)\varrho^2 \sin^4 2\pi \frac{\Delta \cos i}{\lambda}\, d\lambda = 0 \tag{6}$$

Wir benutzen die Identität

$$\sin^4 2\pi \frac{\Delta \cos i}{\lambda} = \frac{1}{8}\left(\cos 8\pi \frac{\Delta \cos i}{\lambda} - 4\cos 4\pi \frac{\Delta \cos i}{\lambda} + 3\right)$$

und differenzieren nach deren Substitution in das Integral zweimal nach dem Parameter $2\pi\Delta\cos i$. Dies giebt die Gleichung

$$\int_0^\infty (e-\varepsilon)\frac{\varrho^2}{\lambda^2}\left(\cos 8\pi \frac{\Delta \cos i}{\lambda} - \cos 4\pi \frac{\Delta \cos i}{\lambda}\right) d\lambda = 0 \tag{7}$$

Wir setzen nun Kürze halber

$$\left.\begin{array}{c} 2\pi\Delta\cos i = p \text{ und } \frac{2}{\lambda} = \alpha,\; -\frac{2}{\lambda^2}\, d\lambda = d\alpha \\ (e-\varepsilon)\varrho^2 = f(\alpha) \end{array}\right\} \tag{8}$$

und erhalten statt unserer Bedingung die folgende

$$\int_0^\infty f(\alpha)\,(\cos 2p\alpha - \cos p\alpha)\, d\alpha = 0 \tag{9}$$

Nun ist aber

$$\int_0^\infty f(\alpha)\cos 2p\alpha\, d\alpha = \frac{1}{2}\int_0^\infty f\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos p\alpha\, d\alpha$$

wie man es erhält, wenn man statt α die Variable $\frac{\alpha}{2}$ einführt. Unsere Bedingung wird somit

$$\int_0^\infty \left(f\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 2f(\alpha)\right)\cos p\alpha\, d\alpha = 0 \tag{10}$$

Auf dieses Integral wenden wir den Fourierschen Satz an, multiplizieren mit $\cos xp\, dp$, wobei x ganz willkürlich ist, und integrieren von 0 bis ∞. Man erhält so

$$\left.\begin{array}{c} \int_0^\infty \cos px\, dp \int_0^\infty f\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos p\alpha\, d\alpha = \frac{\pi}{2} f\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ 2\int_0^\infty \cos px\, dx \int_0^\infty f(\alpha)\cos p\alpha\, d\alpha = \pi f(\alpha) \end{array}\right\} \tag{11}$$

und unsere Bedingung ist somit identisch mit der folgenden

$$f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2f(\alpha) \tag{12}$$

und diese ist befriedigt, wenn

$$\lim f(\alpha) = \infty \text{ für } \lim \alpha = 0$$

denn man hat

$$f\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = 2^n f(\alpha)$$

Nähert sich aber α der Null, so wird $\lambda = \frac{2}{\alpha}$ unendlich grofs; ϱ ist ein echter Bruch, beide e sind endlich, also kann $f(\alpha) = (e - e')\varrho^2$ überhaupt nicht unendlich werden. Es bleibt also nur noch die Bedingung, dafs $f(\alpha)$ selbst für alle Werte von α verschwinde. Dies ergiebt

$$e' = e \qquad (13)$$

d. h. das Emissionsvermögen aller schwarzer Körper ist für gleiche Temperaturen und gleiche Wellenlängen dasselbe. Es kann somit nur noch von der Temperatur, der Gröfse und gegenseitigen Lage der Öffnungen 1 und 2 abhängen.

Würde man statt des zweiten Körpers den ersten belassen, ihn aber drehen, so müfste noch immer $e = e'$ sein. Die Strahlung eines absolut schwarzen Körpers ist also nicht polarisiert, denn sonst müfste bei der Drehung ein Intensitätsunterschied merklich sein.

Die Abhängigkeit der Emission von der Gestalt und Lage der Öffnungen 1 und 2 ist einfach aufzuschreiben. Sind w_1 und w_2 deren Projektionen auf eine zur Axe des Strahlenbündels senkrechten Ebene, s aber die Entfernungen der Öffnungen, so ist

$$e = I \cdot \frac{w_1 w_2}{s^2} \qquad (14)$$

wo nun I nur eine Funktion der Temperatur und der Wellenlänge bedeutet.

B. Emissionsvermögen beliebiger Körper.

Ist der Körper C nun nicht ein schwarzer, und soll auch weiter Temperaturgleichgewicht herrschen, so mufs die durch Entfernung der schwarzen Fläche 3 (Fig. 10) dem Körper entzogene Energie gleich sein jener, welche nach Anbringung des Hohlspiegels dem Körper zugeführt wird. Die durch Entfernung von 3 dem Körper C entzogene Energie beträgt

$$\int_0^\infty e\, r\, A\, d\lambda \qquad (15)$$

Die vom Hohlspiegel zugeführte lebendige Kraft setzt sich dagegen aus mehreren Teilen zusammen.

1. Strahlen, welche der Körper selbst aussendet, und welche nach einer zweimaligen Reflexion an P wieder zurückkommen; deren Energie ist

$$\int_0^\infty E\, r^2 A\, d\lambda \qquad (16)$$

2. Strahlen, welche von der dem Spiegel gegenüberliegenden Wand ausgehen, die Platte P passieren und von dort wieder nach C reflektiert werden; die Energie derselben ist

$$\int_0^\infty e\, r(1-r) A\,.\, d\lambda \qquad (17)$$

3. Strahlen, die von verschiedenen Punkten der schwarzen Hülle ausgehend den Körper C treffen, durch ihn gebrochen und reflektiert werden, so dafs sie die Öffnungen 1 und 2 passieren, und an P zweimal reflektiert werden. Ihre Energie ist:

$$\int_0^\infty M\, r^2 A\, d\lambda \qquad (18a)$$

Wie wir gleich erweisen werden, ergiebt sich, dafs diese Intensitat M gleich ist derjenigen M, welche von 2 ausgehend durch 1 den Korper C trifft, durch ihn hindurchgeht, und in der schwarzen Umhullung absorbiert wird Es ist also

$$M = e(1 - A) \tag{18b}$$

und mithin ist die letztere Energie

$$\int_0^\infty e(1-A)r^2 A\, d\lambda \tag{18c}$$

Da Gleichgewichtszustand herrschen soll, so mufs sein

$$\int_0^\infty e r A\, d\lambda = \int_0^\infty E r^2 A\, d\lambda + \int_0^\infty e r(1-r) A\, d\lambda + \int_0^\infty (1-A) e r^2 A\, d\lambda \tag{19}$$

oder

$$\int_0^\infty \left\{ E A r^2 + e r A - e r^2 A + e r^2 A - e r^2 A^2 - e r A \right\} d\lambda = 0$$

das ist aber

$$\int_0^\infty (E - eA) r^2 A\, d\lambda = 0 \tag{20a}$$

und wir folgern hier, wie fruher, dafs ist

$$\frac{E}{A} = e = I \frac{w_1 w_2}{\varsigma^2} \tag{20b}$$

wo nun I nur von der Wellenlange und Temperatur abhangig ist In Worten ausgedruckt heifst dieser Satz Das Verhaltnis der Emission zur Absorption ist fur alle Korper bei derselben Temperatur und derselben Wellenlange konstant

C Strahlungsintensitat zwischen zwei Flachen

Da bewiesen wurde, dafs die Emission von der Gestalt des Korpers C unabhangig ist, so kann statt dessen eine Flache 1 gesetzt werden, die die Offnung 1 gerade ausfullt Ist das Strahlenbuschel, welches von C ausgeht, gerade so grofs, dafs es die Offnung 2 erfullt, so konnen die Schirme S_1 und S_2 ganz weggelassen werden, und der gefundene Satz, dafs die Flachen 1 und 2 vertauscht werden konnen, kann noch bedeutend verallgemeinert werden

Man denke sich zwischen den Flachen 1 und 2 beliebige Korper, welche die Strahlen, die jene einander zusenden, auf beliebige Weise brechen, reflektieren und absorbieren Von dem Strahlenbundel, welches von 1 nach 2 gelangt, betrachte man den zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ gelegenen Teil, zerlege diesen in zwei Komponenten, die in zwei beliebigen auf einander senkrechten Ebenen a_1 und b_1 schwingen Was von der ersten Komponente in 2 ankommt, zerlege man wieder in zwei Komponenten, die in irgend zwei anderen auf einander senkrechten Ebenen a und b oszillieren Die Intensitat der nach a_2 schwingenden Komponente sei $K\, d\lambda$ Von dem Strahlenbundel, welches von 2 nach 1 geht, betrachten wir umgekehrt den Teil zwischen λ und $\lambda + d\lambda$, der nach den Ebenen a und b_2 zerlegt werde Was von der ersten Komponente in 1 ankommt, zerlege man wieder nach a_1 und b_1 Die Intensitat der nach a_1 polarisierten Komponente sei $k\, d\lambda$ Man hat dann die Bezeichung

$$K' = K \tag{21}$$

A. Wir nehmen zunächst an, daſs der zwischenliegende Körper C die Strahlen nicht schwächt, daſs also die Brechung und Reflexion ohne Energieverlust geschähe, und überhaupt keine Absorption vorkomme.

Durch den Mittelpunkt von 1 legen wir senkrecht zur Axe des austretenden oder ankommenden Strahles eine Ebene, legen in diese ein rechtwinkliges Koordinatensystem, in welchem ein Punkt durch x_1, y_1 ausgedrückt sei. In der Entfernung 1 legen wir eine der ersten Ebene parallele, und nehmen in dieser ein dem ersten paralleles Koordinatensystem an, in welchem ein Punkt durch x_3, y_3 bezeichnet wurde. Endlich legen wir auch durch den Mittelpunkt der Fläche 2 eine zur Axe der austretenden oder auffallenden Strahlen senkrechte Ebene, nehmen in dieser ein rechtwinkliches Koordinatensystem an, dessen Anfangspunkt mit dem Mittelpunkte der Fläche zusammenfällt, und nennen einen Punkt desselben x_2, y_2. In der Entfernung 1 von dieser Fläche denken wir uns schlieſslich eine vierte Ebene, mit einem dem System 2 parallelen Koordinatennetze, dessen Anfangspunkt in der Axe des Strahlenbündels liegt. Ein Punkt dieser Ebene sei durch x_4, y_4 ausgedrückt. Schlieſslich nehmen wir an, daſs alle Koordinaten gegen die Einheit unendlich klein seien.

Geht nun von x_1, y_1 ein Strahl nach x_2, y_2, so braucht er dazu die Zeit $T = f(x_1, y_1, x_2, y_2)$. Geht nun der betreffende Strahl durch die Punkte x_3, y_3 und x_4, y_4, so wird die Zeit, unter welcher der Strahl von x_3, y_3 nach x_4, y_4 gelangt, sein:

$$T - \sqrt{1 + (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} - \sqrt{1 + (x_2 - x_4)^2 + (y_2 - y_4)^2} \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im leeren Raume $= 1$ gesetzt wird. Gesetzt, es wäre der Punkt x_3, y_3 und x_4, y_4 gegeben, so wären die Punkte (x_1, y_1) und (y_2, y_2) zu suchen. Dies geschieht mit Hilfe des Prinzips, daſs die zum Durchlaufen des gesuchten Wegs verbrauchte Zeit ein Minimum sein muſs. Mit Rücksicht auf die unendliche Kleinheit unserer Koordinaten giebt dies:

$$\left.\begin{array}{ll} 0 = \dfrac{\partial T}{\partial x_1} - (x_1 - x_3) & 0 = \dfrac{\partial T}{\partial y_1} - (y_1 - y_3) \\ 0 = \dfrac{\partial T}{\partial x_2} - (x_2 - x_4) & 0 = \dfrac{\partial T}{\partial y_2} - (y_2 - y_4) \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Die Flächenelemente $dx_1\, dy_1$, $dx_2\, dy_2 \ldots dx_4$, dy_4 sind unendlich klein gegen die selbst sehr kleinen Elemente 1 und 2. Die Intensität der Strahlen von der bezeichneten Wellenlänge und der gewählten Polarisationsrichtung, die von $dx_1\, dy_1$ kommend durch $dx_3\, dy_3$ gehen, ist

$$d\lambda\, I\, dx_1\, dy_1\, dx_3\, dy_3$$

da die Entfernung der Elemente gleich Eins angenommen wurde. Der Voraussetzung nach gelangt die Strahlenmenge ungeschwächt nach 2, und bildet ein Element von $K\,d\lambda$. Mithin ist K das Integral:

$$I \iiiint dx_1\, dy_1\, dx_3\, dy_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

wobei die Grenzen für x_3 und y_3 aus den für diese Variabelen aufgestellten Gleichungen folgen, wenn x_1 und y_1 konstant sind und x_2, y_2 alle Werte annehmen, die den Punkten der Projektion der Fläche 2 auf die Ebene der x_2, y_2 entsprechen. Wie man sieht, kommt es bei der Substitution nur darauf an das Produkt $dx_3\, dy_3$ durch die neuen Variabelen $x_2\, y_2$ auszudrücken. Zuerst ist x_3 als konstant zu betrachten; das giebt:

$$0 = \frac{\partial x_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial x_3}{\partial y_2} dy_2$$

$$dy_3 = \frac{\partial y_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial y_3}{\partial y_2} dy_2$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen dx_2, so kommt

$$dy_3 \frac{\partial x_3}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2} \frac{\partial y_3}{\partial y_2} - \frac{\partial x_3}{\partial y_2} \frac{\partial y_3}{\partial x_2}\right) dy_2$$

Bei der zweiten Integration ist y_2 konstant zu setzen, daher ist

$$dx_3 = \frac{\partial x_3}{\partial x_2} dx_2$$

und man hat

$$dx_3\, dy_3 = \left[\frac{\partial x_3}{\partial x_2} \frac{\partial y_3}{\partial y_2} - \frac{\partial x_3}{\partial y_2} \frac{\partial y_3}{\partial x_2}\right] dx_2\, dy_2$$

in das Integral einzuführen

Die Integration ist dann nach x_1 y_1 über die Projektion der Fläche 1 auszuführen Da also x_3 und y_3 Funktionen von x_2, y_2 sind, so hat man

$$\iint dx_3\, dy_3 = \iint \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2} \frac{\partial y_3}{\partial y_2} - \frac{\partial x_3}{\partial y_2} \frac{\partial y_3}{\partial x_2}\right) dx_2\, dy_2 \tag{25a}$$

oder nach den Gleichungen für x_3, y_3

$$\iint dx_3\, dy_3 = \iint \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1\, \partial x_2} \frac{\partial^2 T}{\partial y_1\, \partial y_2} - \frac{\partial^2 T}{\partial x_1\, \partial y_2} \frac{\partial^2 T}{\partial x_2\, \partial y_1}\right) dx_2\, dy_2 \tag{25b}$$

wobei die Integration über die Flächenprojektion 2 auszudehnen ist Hiernach ist endlich

$$K = I \iiiint \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1\, \partial x_2} \frac{\partial^2 T}{\partial y_1\, \partial y_2} - \frac{\partial^2 T}{\partial x_1\, \partial y_2} \frac{\partial^2 T}{\partial x_2\, \partial y_1}\right) dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2 \tag{26}$$

die Integration über die Projektion der Flächen 1 und 2 genommen Behandelt man auf ähnliche Weise auch die Gröfse K, und überlegt dafs ein Strahl stets dieselbe Zeit gebraucht, in welcher Richtung er auch denselben Weg von 2 zu 1 durchläuft, so findet man für K' denselben Ausdruck Die Vergleichung beider ergiebt dann

$$K' = K \tag{27}$$

B Es möge auf dem Wege des Lichtstrahles Schwächung stattfinden Die Grundlage des Beweises ist hier ein von Helmholtz[1] gegebener Satz welcher nach der geringen von Kirchhoff vorgenommenen Bezeichnungsänderung so lautet „Ein Lichtstrahl gelange nach beliebig vielen Brechungen Reflektionen von dem Punkte 1 nach dem Punkte 2 In 1 lege man durch seine Richtung zwei beliebige auf einander senkrechte Ebenen a_1 und b_1, nach denen seine Schwingungen zerlegt gedacht werden Zwei eben solche Ebenen a_2 und b_2 werden durch den Strahl in 2 gelegt Alsdann läfst sich folgendes beweisen Wenn die Quantität i nach der Ebene a_1 polarisierten Lichts von 1 in der Richtung des besprochenen Strahls ausgeht und davon die Quantität k nach der Ebene a_2 polarisierten Lichts in 2 ankommt, so wird rückwärts, wenn die Quantität i nach a_2 polarisierten Lichts von 2 ausgeht, dieselbe Quantität k nach a_1 polarisierten Lichts, in 1 ankommen" Dieser Satz folgt mit Notwendigkeit aus der Thatsache, dafs ein Strahl der zwischen zwei Punkten dieselbe Bahn beschreibt,

[1] Physiol Opt S 169 Leipzig 1867

unabhängig von der Richtung dieselben Veränderungen erleidet. Es wird daher unter das obige Integral für den Hin- und Hergang nur der konstante Faktor $\gamma = \frac{k}{i}$ hinzukommen.

Eine Ausnahme kann der abgeleitete allgemein giltige Satz nur dann erfahren, wenn durch äuſsere, z. B. durch magnetische Ursachen eine Drehung der Polarisationsebene eintritt. Fluoreszenz kommt hier nicht in Betracht, da wir nur von Strahlen derselben Brechbarkeit gesprochen.

Der Satz läſst sich noch weiter verallgemeinern: Von dem Strahlenbündel, welches von 1 nach 2 geht, betrachten wir bei 2 den Teil, dessen Wellenlänge zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ liegt, zerlegen ihn in zwei nach a_2 und b_2 polarisierte Komponenten, und nennen die Intensität der ersten Komponente $Hd\lambda$. Umgekehrt betrachten wir bei dem Strahlenbündel, welches von 2 nach 1 geht, bei 2 den Teil derselben Wellenlänge, zerlegen ihn in die zwei Komponenten, die nach a_2 und b_2 schwingen, und nennen $H'd\lambda$ die Intensität der ersten Komponente, die in 1 angekommen. Dann ist $H = H'$.

Der Beweis ergiebt sich aus dem vorhergehenden Satze, indem man das $Hd\lambda$ in zwei Teile zerlegt, deren einer K dieselbe Bedeutung hat wie oben, der andere aber L hervorgeht aus dem nach b_1 polarisierten Teile, so daſs ist $H = K + L$, wobei wegen der aufeinander senkrechten Stellung der Schwingungen Interferenzerscheinungen nicht vorkommen können. Ähnlich zerlegt man $H'd\lambda = K'd\lambda + L'd\lambda$. Nach dem früheren Satze ist aber $K = K'$ und $L = L'$, mithin auch

$$H = H' \quad \ldots \ldots \quad (28)$$

Aus diesem Satze ergiebt sich, wenn wir den schwarzen Körper C durch einen beliebigen Körper ersetzen, der absorbiert und durch Brechungen und Reflexionen die Strahlen nach verschiedenen Richtungen zerstreut, die Gleichheit der folgenden Intensitäten, welche wir wieder für Strahlen von der Wellenlänge λ und $\lambda + d\lambda$ annehmen. Von dem Strahlenbündel von 2 nach 1 betrachte man den Teil der beiden zu einander senkrechten Komponenten nach der Ebene a und nenne $M'd\lambda$ die Strahlenmenge, welche der Absorption durch C entgeht, also die schwarze Hülle trifft. Von den Strahlen, welche die Teile dieser Hülle dem Körper C zusenden, fallen einige durch die Öffnung 1 auf die Fläche 2; durch die Vermittelung des Körpers wird so ein Strahlenbündel erzeugt, welches durch die Öffnung 1 nach 2 geht. Die Komponente desselben nach a habe die Intensität $Md\lambda$; dann ist, wie oben benutzt wurde,

$$M = M' \quad \ldots \ldots \quad (29)$$

2. Grenzen des Kirchhoffschen Gesetzes.

Um nun die Bedeutung des Kirchhoffschen Absorptionsvermögens näher zu untersuchen, das nicht so einheitlich verstanden zu sein scheint, lassen wir die Voraussetzung einer unendlich geringen Reflexionskraft fallen. Zugleich nehmen wir aber an, daſs die Hilfsplatte P, obwohl noch immer unendlich dünn, das Emissionsvermögen E', das Absorptionsvermögen A' besitze, und R' Bruchteile des auffallenden Lichtes reflektiere. Bei der früheren Bedeutung der Buchstaben sei endlich R das Reflexionsvermögen des Körpers C. In diesem Falle ist stets $(1 - R)A$ das wirklich absorbierte, $(1 - R)(1 - A)$ das durchgelassene Licht, so daſs stets ist:

$$1 = R + (1 - R)A + (1 - R)(1 - A) \quad \ldots \ldots \quad (30)$$

Bei der Annahme eines endlichen Reflexionsvermogens haben wir nun stets eine unendliche Anzahl von Reflexionen zwischen C und der Platte P zu betrachten Fällt also auf irgend einem Wege auf C die Warmemenge w, so wird absorbiert $w(1-R)A$ und reflektiert wR Trifft diese Warmemenge die Platte und den Spiegel 3, so kommt sie in der Grofse $wR\,R'^2$ zuruck, wovon wieder $WR\,R'^2(1-R)A$ absorbiert und $WR^2R'^2$ reflektiert wird, usw Die im Ganzen absorbierte Warmemenge ist also

$$wA(1-R)+wA(1-R)RR'^2+wA(1-R)R^2R'^4+ \ldots \text{ in inf}$$

oder da ja A, R und R' der Natur der Sache nach echte Bruche vorstellen

$$wA(1-R)\frac{1}{1-RR'^2}=w\mathfrak{A}$$

wo $\mathfrak{A}$ Abkurzung halber eingefuhrt wurde Untersuchen wir nun die einzelnen Posten, welche Warmebeitrage in dem unveranderlichen System liefern

Ist erstlich die Offnung 3 durch ein Stuck eines absolut schwarzen Korpers geschlossen, so ruhrt davon die (zwischen den Wellen λ und $\lambda+d\lambda$ liegende homogene) Warmemenge $eR'\mathfrak{A}$ her Nach Entfernung dieser Flache und ihrer Substitution durch den schon vorher benutzten vollkommenen Hohlspiegel gelangt auf dem Wege von C nach P, 3, P, C die Warme ER'^2, die nach unendlich vielen Reflexionen in dem Werte $ER'^2\mathfrak{A}$ von C absorbiert wird Von 4 kommt auf der Strecke 4, P, 3, P, C der Beitrag $e(1-R')(1-A')R'\mathfrak{A}$, von der Hulle B, welche den Korper C unmittelbar umgiebt, rechnet sich einesteils durch Reflexion an C auf der Linie C, P, 3, P, C die Menge $eRR'^2\mathfrak{A}$, durch Hindurchgehen durch C und Ruckkehr auf demselben Wege $e(1-R)(1-A)R'^2\mathfrak{A}$ Endlich ist auch noch die Warmemenge von 2 durch P nach C zu betrachten, um welche C nach Anbringung des Hohlspiegels mehr erhalt, wenn an seiner Oberflache unendlich viele Reflexionen stattfinden Dieser Posten betragt $e(1-A')(1-R')R'^2R\mathfrak{A}$ Endlich liefert die Platte P selbst die Warme $E'RR'\mathfrak{A}$ mehr an C, wenn 3 durch den Hohlspiegel ersetzt ist, als wenn dort ein Stuck eines absolut schwarzen Korpers sich befindet, und auf dem Wege P, 3, P, C die Menge $E'R'\mathfrak{A}$ Soll das Gleichgewicht des Systems ungestort fortbestehen, so mufs die zuerst erwahnte Warmemenge der Summe aller ubrigen gleich sein, d h es ist

$$\int_0^\infty d\lambda\;\mathfrak{A}\Big\{-eR'+ER'^2+eR'-eR'^2-eR'A'+eR'^2A'+eRR'^2+eR'^2-eR'^2R-eR'^2A \\ +eR'^2AR+E'R'+E'RR'\Big\}=0$$

was sich auch so schreiben lafst

$$\int_0^\infty d\lambda\;\mathfrak{A}\Big\{[E-eA(1-R)]R'+[E'-eA'(1-R')](1+RR')+eR'R(1-R')\Big\}=0 \qquad (31)$$

Ware das letzte Glied $eR'R(1-R')$ nicht vorhanden, so liefsen sich durch den fruher benutzten ganz analoge Schlusse nachweisen, dafs das Kirchhoffsche Gesetz

$$E=eA(1-R) \qquad (32)$$

sowohl fur den Korper C, wie fur die Platte P gilt, wenn man unter dem Kirchhoffschen Absorptionsvermogen die von der Reflexion befreite Absorption versteht Das Hinzutreten des letzten Gliedes, welches nur von der Reflexion des Korpers und der Platte abhangt, macht aber diese Schlufsweise unmoglich, und fordert ganz entschieden die Abwesenheit einer merklichen Reflexionsfahigkeit des Korpers C, was, wie mir dunkt Kirchhoff nicht genugend hervorhob

Da sich das Zusatzglied zwischen den Grenzen e und $\frac{eR}{4}$ bewegt, aufserdem aber der konstante Faktor (früher mit ϱ bezeichnet) der Plattenreflexion recht klein gewählt werden kann, so wird praktisch der Wert des Zusatzgliedes wohl verschwindend klein sein müssen. Als theoretische Beschränkungen der Giltigkeit des Kirchhoffschen Gesetzes müssen wir also hervorheben:

Der Licht emittierende Körper mufs gegen Strahlung chemisch indifferent sein;
darf kein hohes Reflexionsvermögen besitzen;
darf nicht durch äufsere Kräfte in seiner Polarisationsrichtung geändert werden.

Wir werden bald Gelegenheit finden, den jetzt gefundenen Satz an spektroskopischen Versuchen zu besprechen.

3. Das Clausiussche Gesetz.[1]

Das von Kirchhoff entdeckte Grundgesetz der Emission gilt für den Fall, dafs die Strahlungen durchaus im absolut leeren Raum vor sich gehen. Ist dieses nicht der Fall, oder treten aufserdem Strahlenkonzentrationen ein, so mufs eine gesonderte Untersuchung angestellt werden, die wir hier ganz nach Clausius wiedergeben. Sie war gegen eine Abhandlung von Rankine zur Verteidigung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie abgefafst, und braucht sich unbeschadet der Allgemeinheit der Resultate blofs auf homogene unpolarisierte Strahlen eines absolut schwarzen Körpers zu beziehen.

A. Die Kirchhoffschen Formeln.

Es seien zwei Flächen s_1 und s_2 als Oberflächen absolut schwarzer Körper von gleicher Temperatur gegeben, und auf ihnen die Elemente ds_1 und ds_2 zur Betrachtung ausgewählt. Ist nun das Medium zwischen beiden Elementen gleichförmig oder veränderlich, immer läfst sich vollkommene Reziprozität der gegenseitigen Zustrahlung nachweisen, wenn nur die vorkommende Fortpflanzung, die Reflexionen und Brechungen ohne Absorption vor sich gehen. Dies Resultat ist schon von Kirchhoff gefunden, und soll hier kurz nur mit geringen Änderungen der Bezeichnung und der Wahl des Koordinatensystems angeführt werden.

Sind zwei Punkte gegeben, so kann von den unendlich vielen Strahlen, welche der eine Punkt aussendet, selbst dann nur eine endliche Zahl derselben zum anderen Punkte gelangen, wenn Reflexionen und Brechungen vorkommen; der Weg eines jeden solchen Strahls, den man gesondert betrachten kann, ist dadurch bestimmt, dafs die Zeit, welche der Strahl auf diesem Wege gebraucht, verglichen mit allen andern benachbarten Wegen zwischen denselben Punkten, ein Minimum sein mufs. Dieses Minimum ist durch die Lage der beiden Punkte bestimmt, und soll nach Kirchhoff mit T bezeichnet werden.

Wir legen nun durch die Elemente ds_1 und ds_2 je eine Tangentialebene, und betrachten die Elemente ds_1 und ds_2 als Elemente dieser Ebenen. In jeder Ebene führen wir ein beliebiges rechtwinkliges Koordinatensystem ein, das in der einen Ebene

---

[1] Pogg. Ann. CXXI. p. 1.

mit x_1, y_1, in der anderen mit x_2, y_2 bezeichnet werden moge Die Zeit T ist als eine Funktion der vier Koordinaten zu betrachten Unter diesen Voraussetzungen ist die Warmemenge, welche das Element ds_1 dem Elemente ds_2 wahrend der Zeiteinheit zustrahlt, das durch (26) gegebene und nun mit gerade d bezeichnete Differential

$$\frac{e_1}{\pi}\left(\frac{d^2T}{dx_1dx_2}\,\frac{d^2T}{dy_1dy_2}-\frac{d^2T}{dx_1dy_2}\,\frac{d^2T}{dy_1dx_2}\right)ds_1ds_2 \qquad (33)$$

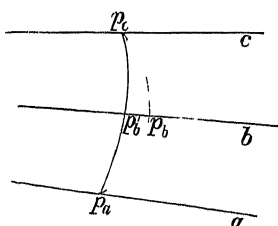
Hierin bedeutet π die Ludolfische Zahl, e_1 die Starke der Emission der Flache s_1 im Elemente ds_1, e_1ds_1 ist also die ganze vom Flachenelemente ds_1 wahrend der Zeiteinheit ausgestrahlte Warmemenge

Soll nun die Strahlung von ds_2 nach ds_1 bestimmt werden, so hat man nur e_2 an Stelle von e_1 zu setzen, alles ubrige bleibt als symmetrische Funktion der beiden Elemente ungeandert, da ja auch die Zeit dieselbe ist, in welcher Richtung auch der Strahl den Weg zwischen den beiden Punkten zurucklegt Strahlen also die Flachen bei gleicher Temperatur gleich viel Warme aus, ist demnach $e_1 = e_2$, so ist auch die gegenseitige Zustrahlung zwischen den beiden Elementen ds_1 und ds_2 vollkommen gleich

Dieser Fall gilt wie hervorgehoben, fur das Zusammentreffen einer endlichen Anzahl von Strahlen Werden alle Strahlen des einen Punktes in einen andern Punkt vereint, wo sie also allgemein einen Kegelwinkel einnehmen, so ist die Reziprozitat der Zustrahlung a priori nicht klar Zwei solche Punkte, deren jeder das (optische) Bild des anderen ist, nennt man konjugierte Brennpunkte Gilt dies von allen Punkten zweier Flachen, so nennt man die eine das Bild der anderen Fur diesen Fall der Strahlenkonzentration ist der Kirchhoffsche Ausdruck nicht unmittelbar anwendbar Denn ist s_2 das Bild von s_1, so vereinigen sich alle Strahlen, welche ein in der Flache s_1 gelegener Punkt p_1 innerhalb eines gewissen Zeitraumes aussendet in einem einzigen Punkte p_2 der Flache s_2 Sind also die Koordinaten x_1, y_1 des Punktes p_1 gegeben so sind x_2, y_2 nicht mehr willkurlich, sondern schon mitbestimmt, und ebenso umgekehrt Ein Differentialquotient von der Form $\frac{d^2T}{dx_1dx_2}$, worin bei der Differentiation nach x_1 die Variabelen y_1, x_2, y_2 als konstant vorausgesetzt werden, bei der Differentiation nach x_2 aber y_2, x_1, y_1 als konstant betrachtet werden, kann demnach keine reelle Grofse von endlichem Werte sein

Wir mussen uns daher nach einem anderen Ausdrucke umsehen, und stellen zu dem Ende einige Betrachtungen an, ahnlich jenen, welche Kirchhoff zu seinem Ausdrucke gefuhrt haben

B Bestimmung zusammengehöriger Punkte und zusammengehöriger Flächenelemente in drei von den Strahlen durchschnittenen Ebenen

Fig 11

Gleichungen zwischen den Koordinaten der Schnittpunkte

Es seien (Fig 11) drei Ebenen a, b, c gegeben, von denen b zwischen a und c liege In jeder liege ein rechtwinkliges Koordinatensystem, x, y, die durch die Indizes a, b, c unterschieden werden mogen Geht nun von einem Punkte p_a ein Strahl zu dem gegebenen Punkte p_b, so hat man zur Bestimmung des Strahlenweges die Bedingung, dafs die Zeit, welche der Strahl auf diesem Wege braucht, unter

den Zeiten, welche er auf allen andern nahe liegenden Wegen gebrauchen würde, ein Minimum ist. Dieses Minimum, welches mit T_{ab} bezeichnet sei, ist demnach eine Funktion der Koordinaten der beiden Punkte p_a und p_b. Ebenso definieren wir die Minima T_{ac} und T_{bc}.

Da nun ein Strahl, welcher durch zwei Ebenen geht, im allgemeinen auch die dritte Ebene schneidet, so haben wir für jeden Strahl drei Durchschnittspunkte, die in solcher Beziehung zu einander stehen, daſs durch zwei derselben der dritte schon mitbestimmt ist. Die darauf Bezug habenden Gleichungen lassen sich leicht ableiten.

Wir nehmen zu dem Ende zunächst an, die Punkte p_a, p_c seien im Vorhinein gegeben, während der Punkt, wo der Strahl die Zwischenebene schneidet, gesucht werden soll. Es sei dieser Punkt zum Unterschiede von andern in der Ebene b liegenden Punkten mit p'_b bezeichnet. Wir wählen zunächst einen beliebigen Strahl $p_c p_b$ und $p_a p_b$, der geradlinig oder gekrümmt sein kann, je nachdem das Medium homogen ist, oder aber sich optisch veränderlich dicht erweist. Die Zeiten der beiden Hilfsstrahlen sind T_{ab} und T_{bc} und die Summe derselben hängt nur von der Lage des Punktes p_b ab, wenn p_a, p_c schon im Vorhinein gegeben sind. Unter allen Werten, welche diese Summe annehmen kann, je nachdem man p_b verrückt, giebt es nur ein Minimum, welches eintritt, wenn der Punkt p_b mit p'_b zusammenfällt. Man hat also zur Bestimmung der Koordinaten x_b, y_b die Bedingungsgleichungen:

$$\frac{d(T_{ab} + T_{bc})}{dx_b} = 0, \quad \frac{d(T_{ab} + T_{ac})}{dy_b} = 0 \quad \text{. . . . .} \quad (34)$$

Ohne Rücksicht auf die Art, wie diese Gleichungen gewonnen werden, kann man nun sagen, daſs sie zwei Relationen zwischen den sechs Koordinaten der drei betrachteten Punkte darstellen.

Nun nehmen wir an, die Punkte p_a und p_b (Fig. 12) seien im Vorhinein gegeben, dagegen p'_c, wo der Strahl die Ebene c trifft, noch unbekannt. Wir unterscheiden ihn auch diesmal von andern in der Ebene c gelegenen Punkten p_c. Wir ziehen wieder die Hilfsstrahlen $p_a p_c$, $p_b p_c$, bilden die Zeit derselben $T_{ac} - T_{bc}$, und finden, daſs dieselbe nur von der Lage des in der Ebene c gewählten Punktes p_c abhängt. Für den direkten Strahl $p_a p'_c$ gilt die leicht zu übersehende Bedingung:

Fig. 12.

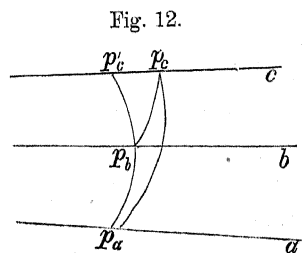
$$T_{ac} < T_{ab} + T_{bc}$$

und demnach ist auch

$$T_{ac} - T_{bc} < T_{ab}$$

Die Differenz der Zeiten der Hilfsstrahlen ist also im allgemeinen kleiner als deren Wert für den direkten Strahl. Fällt also p_c mit p'_c zusammen, so muſs die Zeitdifferenz ein Maximum werden Dies giebt ähnlich wie früher zur Bestimmung von x_b, y_c die Gleichungen:

$$\frac{d(T_{ac} - T_{bc})}{dx_c} = 0, \quad \frac{d(T_{ac} - T_{bc})}{dy_c} = 0 \quad \text{. . . . .} \quad (35)$$

Nimmt man endlich noch an, die Punkte p_b und p_c seien im Voraus gegeben, dagegen p_a noch unbekannt, so erhält man einfach durch Vertauschung der Buchstaben:

$$\frac{d(T_{ac}-T_{al})}{dx_a}=0,\quad \frac{d(T_{ac}-T_{al})}{dy_a}=0 \tag{36}$$

Zwischen den drei Punkten haben wir somit drei Paar Gleichungen erhalten, und man kann einen berechnen, wenn die beiden andern gegeben sind, oder allgemeiner von den sechs Koordinaten lassen sich zwei bestimmen, wenn vier derselben bekannt sind.

C. Verhältnis zusammengehöriger Flächenelemente.

Werden aus einem Punkte p_a (Fig. 13) der Ebene a Strahlen nach den verschiedenen Punkten eines Flächenelementes ds_b der Ebene b gezogen, so schneiden diese nach c verlangert in dieser Ebene wieder ein unendlich kleines Flächenelement heraus, welches ds_c heifsen möge. Es soll nun das Verhältnis der beiden Flächenelemente bestimmt werden.

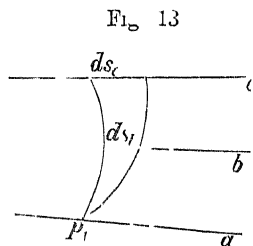



Fig. 13.

Bekannt sind die Koordinaten x_a, y_a des Punktes p_a, und willkürlich können angenommen werden die Koordinaten x_b, y_b des Elementes ds_b. Damit ist dann zugleich nach dem früheren die Lage des Elementes ds_c mitbestimmt, und x_c und y_c können als Funktionen von x_b, y_b aufgefafst werden, wenn p_a festgehalten wird. Wir wählen als Form des Elementes ds_b ein Rechteck $dx_b\,dy_b$ und erhalten dann für ds_c im allgemeinen ein Parallelogramm. Wir bestimmen nun die Gröfse desselben. Die Länge der Seite, welche der Seite dx_b des Rechteckes der Ebene b entspricht, heifse λ, und die Winkel, welche diese Seite mit den Koordinatenaxen der x_c und y_c bilden, (λx_c) (λy_c). Dann ist

$$\lambda\cos(\lambda x_c)=\frac{dx_c}{dx_b}\,dx_b,\quad \lambda\cos(\lambda y_c)=\frac{dy_c}{dx_b}\,dx_b \tag{37}$$

Ist die andere Seite des Parallelogramms μ, ihre Winkel mit den Koordinatenaxen (μx_c) und (μy_c), so hat man gleicherweise

$$\mu\cos(\mu x_c)=\frac{dx_c}{dy_b}\,dy_b,\quad \mu\cos(\mu y_c)=\frac{dy_c}{dy_b}\,dy_b \tag{38}$$

Bilden weiter die Seiten λ und μ den Winkel $(\lambda\mu)$, so kann man schreiben

$$\left.\begin{aligned}\cos(\lambda\mu)&=\cos(\lambda x_c)\cos(\mu x_c)+\cos(\lambda y_c)\cos(\mu y_c)\\&=\left\{\frac{dx_c}{dx_b}\,\frac{dx_c}{dy_b}+\frac{dy_c}{dx_b}\,\frac{dy_c}{dy_b}\right\}\frac{dx_b\,dy_b}{\lambda\mu}\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Der Flächeninhalt des Parallelogramms ds_c ist nun

$$ds_c=\lambda\mu\sin(\lambda\mu)=\sqrt{\lambda^2\mu^2-\lambda^2\mu^2\cos^2(\lambda\mu)} \tag{40}$$

Aus den früheren Gleichungen folgt mit Rücksicht auf

$$\left.\begin{aligned}\cos^2(\lambda x_c)+\cos^2(\lambda y_c)&=1\\ \lambda^2&=\left\{\left(\frac{dx_c}{dx_b}\right)^2+\left(\frac{dy_c}{dx_b}\right)^2\right\}dx_b^2\\ \mu^2&=\left\{\left(\frac{dx_c}{dy_b}\right)^2+\left(\frac{dy_c}{dy_b}\right)^2\right\}dy_b^2\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Damit wird

$$\lambda^2\mu^2 - \lambda^2\mu^2 \cos^2(\lambda\mu) = \left[\left(\frac{dx_c}{dx_b}\right)^2\left(\frac{dx_c}{dy_b}\right)^2 + \left(\frac{dy_c}{dx_b}\right)^2\left(\frac{dx_c}{dy_b}\right)^2 + \left(\frac{dy_c}{dy_b}\right)^2\left(\frac{dx_c}{dx_b}\right)^2 + \left(\frac{dy_c}{dy_b}\right)^2\left(\frac{dy_c}{dx_b}\right)^2\right] dx_b^2\, dy_b^2 - \left[\left(\frac{dx_c}{dx_b}\right)^2\left(\frac{dx_c}{dy_b}\right)^2 + 2\frac{dx_c}{dx_b}\frac{dx_c}{dy_b}\frac{dy_c}{dx_b}\frac{dy_c}{dy_b} + \left(\frac{dy_c}{dx_b}\right)^2\left(\frac{dy_c}{dy_b}\right)^2\right] dx_b^2 . dy_b^2.$$

$$= \left[\frac{dx_c}{dx_b}\frac{dy_c}{dy_b} - \frac{dx_c}{dy_b}\frac{dy_c}{dx_b}\right]^2 dx_b^2 . dy_b^2 \quad \text{. . . . . (42)}$$

und also:

$$ds_c = (v.n).\left[\frac{dx_c}{dx_b}\frac{dy_c}{dy_b} - \frac{dx_c}{dy_b}\frac{dy_c}{dx_b}\right] ds_b \quad \text{. . . . . (43)}$$

wo die beigefügten Buchstaben (valor numericus) andeuten, daſs nur die positive Wurzel genommen werden soll.

Es handelt sich jetzt nur noch darum, die Abhängigkeit der Koordinaten x_c, y_c von x_b, y_b auszudrücken. Zu dem Ende benutzen wir die erste der gefundenen Gleichungen (34), und differenzieren sie nach x_b und y_b. Dabei ist zu bedenken, daſs jede der Gröſsen T von den drei Paaren der Koordinaten a, b, c zwei Paare enthält, welche durch die Indizes angegeben sind, und daſs x_c und y_c, wie schon erwähnt, als Funktionen von x_b und y_b anzusehen sind, während x_a und y_a als Konstante zu betrachten sind. Dies giebt die folgenden vier Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2(T_{ab}+T_{bc})}{dx_b^2} + \frac{d^2T_{bc}}{dx_b.dx_c}\cdot\frac{dx_c}{dx_b} + \frac{d^2T_{bc}}{dx_b.dy_c}\cdot\frac{dy_c}{dx_b} = 0\\
&\frac{d^2(T_{ab}+T_{bc})}{dx_b.dy_b} + \frac{d^2T_{bc}}{dx_b.dx_c}\cdot\frac{dx_c}{dy_b} + \frac{d^2T_{bc}}{dx_b.dy_c}\cdot\frac{dy_c}{dy_b} = 0\\
&\frac{d^2(T_{ab}+T_{bc})}{dx_b.dy_b} + \frac{d^2T_{bc}}{dy_b.dx_c}\cdot\frac{dx_c}{dx_b} + \frac{d^2T_{bc}}{dy_b.dy_c}\cdot\frac{dy_c}{dy_b} = 0\\
&\frac{d^2(T_{ab}+T_{bc})}{dy_b^2} + \frac{d^2T_{bc}}{dy_b.dx_c}\cdot\frac{dx_c}{dy_b} + \frac{d^2T_{bc}}{dy_b.dy_c}\cdot\frac{dy_c}{dy_b} = 0
\end{aligned}\right\} \quad \text{. . . . . . (44)}$$

Bestimmt man aus diesen die Differentialquotienten $\frac{dx_c}{dx_b}$, $\frac{dy_c}{dx_b}$, $\frac{dx_c}{dy_b}$, $\frac{dy_c}{dy_b}$ und substituiert sie in die Gleichung für ds_c, so erhält man die gesuchte Beziehung zwischen den beiden Flächenelementen. Zu dem Zwecke bilden wir die Determinanten:

$$\left.\begin{aligned}
A &= (v.n)\left[\frac{d^2T_{bc}}{dx_b.dx_c}\cdot\frac{d^2T_{bc}}{dy_b.dy_c} - \frac{d^2T_{bc}}{dx_b.dy_c}\cdot\frac{d^2T_{bc}}{dy_b.dx_c}\right]\\
E_1\left(\frac{dx_c}{dx_b}\right) &= (v.n)\left[\frac{d^2(T_{ab}+T_{bc})}{dx_b^2}\cdot\frac{d^2T_{bc}}{dy_b.dx_c} - \frac{d^2(T_{ab}+T_{bc})}{dx_b.dy_b}\cdot\frac{d^2T_{bc}}{dx_b.dx_c}\right]\\
E_2\left(\frac{dy_c}{dx_b}\right) &= (v.n)\left[\frac{d^2(T_{ab}+T_{bc})}{dx_b^2}\cdot\frac{d^2T_{bc}}{dy_b.dy_c} - \frac{d^2(T_{ab}+T_{bc})}{dx_b.dy_b}\cdot\frac{d^2T_{bc}}{dx_b.dy_c}\right]\\
E_3\left(\frac{dx_c}{dy_b}\right) &= (v.n)\left[\frac{d^2(T_{ab}+T_{bc})}{dx_b.dy_b}\cdot\frac{d^2T_{bc}}{dy_b.dx_c} - \frac{d^2(T_{ab}+T_{bc})}{dy_b^2}\cdot\frac{d^2T_{bc}}{dx_b.dx_c}\right]\\
E_4\left(\frac{dy_c}{dy_b}\right) &= (v.n)\left[\frac{d^2(T_{ab}+T_{bc})}{dx_b.dy_b}\cdot\frac{d^2T_{bc}}{dy_b.dy_c} - \frac{d^2(T_{ab}+T_{bc})}{dy_b^2}\cdot\frac{d^2T_{bc}}{dx_b.dy_c}\right]
\end{aligned}\right\} \quad \text{. . (45)}$$

Dann ist:

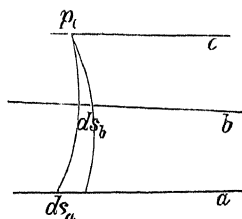
$$\frac{ds_c}{ds_b} = (v.n)\left[\frac{E_1}{A}\cdot\frac{E_4}{A} - \frac{E_3}{A}\cdot\frac{E_2}{A}\right] \quad \text{. . . . . (46)}$$

und wenn man noch setzt:

$$
\begin{aligned}
E &= A^{-1}\left\{E_1 E_4 - E_3 E_2\right\} \\
&= (v\ n)\left[\frac{d^2(T_{ab}+T_{bc})}{dx_b{}^2}\ \frac{d^2(T_{ab}+T_{bc})}{dy_b{}^2} - \left(\frac{d^2(T_{ab}+T_{bc})}{dx_b\ dy_b}\right)^2\right]
\end{aligned}
\tag{47}
$$

wird einfach

$$\frac{ds_c}{ds_b} = \frac{E}{A} \tag{48}$$

Fig 14

Ware nun in der Ebene c (Fig 14) ein bestimmter Punkt p_c gegeben, und zu dem Flachenelement ds_b der Ebene ware das entsprechende ds_a der Ebene a zu suchen, so kann dies einfach durch Vertauschung der Buchstaben a und c geschehen, da b eine unveranderte Rolle spielt Dadurch andert sich E nicht, und an Stelle von A tritt eine analoge Determinante

$$C = (v\ n)\left|\frac{d^2 T_{ab}}{dx_a\ dx_b}\ \frac{d^2 T_{ab}}{dy_a\ dy_b} - \frac{d^2 T_{ab}}{dx_a\ dy_b}\ \frac{d^2 T_{ab}}{dy_a\ dx_b}\right| \tag{49}$$

Man erhalt so einfach

$$\frac{ds_a}{ds_b} = \frac{E}{C} \tag{50}$$

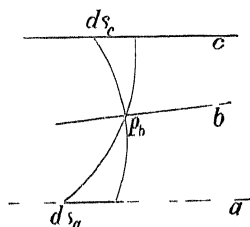



Fig 15

Wird endlich angenommen (Fig 15), es sei in der Ebene b ein bestimmter Punkt gegeben, p_b, sowie in a irgend ein Flachenelement ds_a, von dessen einzelnen Punkten durch p_b hindurch Strahlen nach c gelegt werden, wo sie wiederum das entsprechende Flachenelement ds_c herausschneiden, so finden wir das Verhaltnis beider Elemente, indem wir beachten, dafs die Determinanten A, C, E resp den Ebenen c, a, b angehoren Ganz analog wie fur (48) und (50) finden wir drittens auch

$$\frac{ds_c}{ds_a} = \frac{C}{A} \tag{51}$$

Die beiden in diesem Falle zusammengehorigen Flachenelemente verhalten sich gerade so, als ob zunachst in der Ebene b ein Element ds_b gegeben ware, und man in den Ebenen a und c einen Ausgangspunkt der Strahlen wahlte, und dann jedesmal in der dritten Ebene das entsprechende Element herstellte

Gerade wie wir mit der ersten der Grenzgleichungen verfahren, lafst sich dies auch mit den ubrigen zwei Paaren bewerkstelligen, wodurch wir stets zu drei Grofsen analog den A, C und E gefuhrt werden, durch welche sich die Verhaltnisse der Flachenelemente ausdrucken lassen Unter den so erhaltenen neun Grofsen kommen aber je zwei dreimal vor, so dafs sich die Zahl der verschiedenen auf sechs belauft Wir finden diese Grofsen leicht durch Permutation der Indizes

$$
\left.
\begin{aligned}
A &= (v\ n)\left[\frac{d^2 T_{bc}}{dx_b\ dx_c}\ \frac{d^2 T_{bc}}{dy_b\ dy_c} - \frac{d^2 T_{bc}}{dx_b\ dy_c}\ \frac{d^2 T_{bc}}{dy_b\ dx_c}\right] \\
B &= (v\ n)\left[\frac{d^2 T_{ac}}{dx_a\ dx_c}\ \frac{d^2 T_{ac}}{dy_a\ dy_c} - \frac{d^2 T_{ac}}{dx_a\ dy_c}\ \frac{d^2 T_{ac}}{dy_a\ dx_c}\right] \\
C &= (v\ n)\left[\frac{d^2 T_{ab}}{dx_a\ dx_b}\ \frac{d^2 T_{ab}}{dy_a\ dy_b} - \frac{d^2 T_{ab}}{dx_a\ dy_b}\ \frac{d^2 T_{ab}}{dy_a\ dx_b}\right]
\end{aligned}
\right\}
\tag{52}
$$

$$D = (v.n)\left\{\frac{d^2(T_{ac} - T_{ab})}{dx_a^2} \cdot \frac{d^2(T_{ac} - T_{ab})}{dy_a^2} - \left[\frac{d^2(T_{ac} - T_{ab})}{dx_a . dy_a}\right]^2\right\}$$
$$E = (v.n)\left\{\frac{d^2(T_{ab} + T_{bc})}{dx_b^2} \cdot \frac{d^2(T_{ab} + T_{bc})}{dy_b^2} - \left[\frac{d^2(T_{ab} + T_{bc})}{dx_b\, dy_b}\right]^2\right\}$$
$$F = (v.n)\left\{\frac{d^2(T_{ac} - T_{bc})}{dx_c^2} \cdot \frac{d^2(T_{ac} - T_{bc})}{dy_c^2} - \left[\frac{d^2(T_{ac} - T_{bc})}{dx_c . dy_c}\right]^2\right\}$$

Mit Hilfe dieser sechs Gröfsen lassen sich die Verhältnisse der Flächenebene wie folgt ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} \frac{ds_c}{ds_b} &= \frac{E}{A} = \frac{A}{F} = \frac{C}{B} \\ \frac{ds_b}{ds_a} &= \frac{C}{E} = \frac{B}{A} = \frac{D}{C} \\ \frac{ds_a}{ds_c} &= \frac{A}{C} = \frac{F}{B} = \frac{B}{D} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (53)$$

Die drei Horizontalreihen beziehen sich auf die Fälle, wo entweder in der Ebene a oder c oder b ein bestimmter Punkt angenommen ist, durch den die Strahlen gehen müssen. Die Vertikalreihen sind stets aus einem der Minimumgleichungssysteme und zwar der Reihe nach aus dem ersten, zweiten und dritten abgeleitet.

Zwischen den sechs Gleichungen bestehen übrigens noch folgende Gleichungen, die sich aus dem obigen ergeben:

$$\left.\begin{aligned} D = \frac{BC}{A},\ E = \frac{CA}{B},\ F = \frac{AB}{C} \\ A^2 = EF,\ B^2 = FD,\ C^2 = DE \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (54)$$

Mit diesen sechs Gröfsen wollen wir nun weiter rechnen, und werden in jedem Falle diejenigen anwenden, welche der Rechnung am geeignetsten einzufügen ist.

D. Bestimmung der gegenseitigen Zustrahlung.

Nach den vorhergegangenen Entwickelungen können wir nun den Fall untersuchen, auf welchen sich der Kirchhoffsche Ausdruck bezieht, indem wir die gegenseitige Wärmezustrahlung zweier Flächenelemente bestimmen, wenn jeder Punkt des einen Elementes von jedem Punkte des andern einen und nur einen, oder höchstens eine beschränkte Anzahl von einzelnen Strahlen, die man gesondert betrachten kann, erhält. Ein anderer Fall, durch Brechung und Reflexion verursacht, wäre der, dafs in einem Punkte des einen Elementes eine sehr grofse Zahl von einzelnen Strahlen kondensiert würde.

Sind in den Ebenen a und c die beiden Elemente ds_a und ds_c gegeben, so wollen wir zuerst die Wärme bestimmen, welche dem Elemente ds_c von dem Elemente ds_a zugesendet wird. Zu dem Ende denken wir uns die Ebene b parallel zu der Ebene a gelegt in solch kleinem Abstande ϱ, dafs bei jedem von ds_a nach ds_c gehenden Strahl das zwischen den Ebenen a und b gelegene Stück als geradlinig angesehen werden darf, und ebenso die geringe Schichte ϱ des durchlaufenen Mediums als homogen. Das von einem Punkte des Elementes ds_a nach ds_c gehende Strahlenbüschel schneidet aus b das Element ds_b heraus, dessen Gröfse dargestellt werden kann durch:

$$ds_b = \frac{B}{C}\, ds_c \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (55)$$

mit der auf ds_a errichteten parallel ist, mit dem unendlich dünnen Strahlenbündel den Winkel ϑ bildet, so ist:

$$\frac{ds}{\varrho^2} = \frac{\cos\vartheta\, ds_b}{r^2} \quad \text{. . . . . (62)}$$

Setzt man hierin den für ds_b gefundenen Ausdruck (61) so erhält man:

$$\frac{ds}{\varrho^2} = \frac{v_a{}^2}{\cos\vartheta} B\, ds_c \quad \text{. . . . . (63)}$$

Es kommt nun darauf an, zu bestimmen, wie viel Wärme das Element ds_a durch jenes auf der Kugelfläche bestimmte Element $d\sigma$ sendet. Diese Wärmemenge ist erstens proportional der Gröfse des ausstrahlenden Elementes ds_a, ferner proportional der Gröfse der Kegelöffnung $\frac{d\sigma}{\varrho^2}$, und endlich nach dem Emissionsgesetze, proportional dem Kosinus des Winkels ϑ, welchen der unendlich schmale Strahlenkegel mit der Normale bildet. Man hat also, wenn noch ε ein von der Temperatur des Flächenelements abhängiger Faktor ist:

$$\varepsilon \cos\vartheta \frac{d\sigma}{\varrho^2} ds_a$$

Zur Bestimmung des Faktors ε haben wir die Bedingung, dafs die ganze von ds_a ausgestrahlte Wärmemenge, also die der ganzen über der Ebene a befindlichen Halbkugel zugestrahlte Wärmemenge gleich dem Produkte $e_a ds_a$ sein mufs, worin e_a die Stärke der Emission der Fläche a an der Stelle des Elementes ds_a bedeutet. Man hat also die Gleichung:

$$\frac{\varepsilon}{\varrho^2}\int \cos\vartheta\, d\sigma = e_a \quad \text{. . . . . (64)}$$

das Integral über die Halbkugel ausgedehnt. Daraus folgt:

$$\varepsilon\pi = e_a \quad \text{. . . . . (65)}$$

Es ist demnach die von ds_a durch $d\sigma$ gesandte Wärmemenge:

$$\frac{e_a}{\pi} \cos\vartheta \frac{d\sigma}{\varrho^2} ds_a$$

Setzt man statt $\frac{d\sigma}{\varrho^2}$ den obigen (63) Wert, so erhält man die Wärmemenge, welche ds_c von ds_a durch Zustrahlung erhält. Diese ist also:

$$\frac{e_a}{\pi} v_a{}^2 B\, ds_a ds_c \quad \text{. . . . . (66a)}$$

In ganz derselben Weise erhält man auch die Wärmemenge, welche ds_a von ds_c durch Strahlung bekommt. Ist e_c die Gröfse der Emission der Ebene c an der Stelle, wo das Element ds_c liegt, und v_c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Strahlen in der Nähe von ds_c, so hat man:

$$\frac{e_c}{\pi} v_c{}^2 B\, ds_a ds_c \quad \text{. . . . . (66b)}$$

E. Abhängigkeit der Ausstrahlung von dem umgebenden Medium.

Die abgeleiteten Ausdrücke für die gegenseitig zugestrahlten Wärmemengen sind gleich jenen, welche schon Kirchhoff gefunden. Da dieser Forscher aber als Medium den leeren Raum betrachtete, so fehlen die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, welche in diesem Falle der Einheit gleich sind. Vergleichen wir nun die gewonnenen

4. Zöllners Folgerungen aus dem Kirchhoffschen Gesetze.[1]

Die Fruchtbarkeit des Kirchhoffschen Gesetzes zeigt sich schon nach einer kleinen an demselben vorgenommenen Veränderung, da man in dieser Form eine Menge von Spektralerscheinungen erklären kann.

a) Wir nennen E_λ eine homogene Lichtmenge von der Wellenlänge λ, welche von der Flächeneinheit einer ebenen leuchtenden Gasschicht von einheitlicher Dicke ausgestrahlt wird, und A_λ die von dieser Schicht absorbierte Lichtmenge von derselben Wellenlänge.

Hat man z. B. m solcher Schichten, so berechnet man deren Absorptionskoeffizient recht leicht. Die erste Schichte emittiert E_λ; die zweite ebensoviel. Wegen der Absorption in der ersten Schichte tritt aber nach aufsen nur $E_\lambda(1-A_\lambda)$. Nach der zweiten Schichte ist auch E_λ der dritten Schichte zu $E_\lambda(1-A_\lambda)$ geworden; wegen Absorption in der ersten Schichte tritt aber nur noch $E_\lambda(1-A_\lambda)(1-A_\lambda)$ aus. Man sieht leicht, wie das fortgesetzt werden mufs. Die Emission der r-ten Schichte beträgt nach dem Durchgange durch die erste Schichte nur noch $E_\lambda(1-A_\lambda)^{r-1}$. Das gesamte emittierte Licht ist also:

$$E_{\lambda m} = E_\lambda \sum_1^m (1-A_\lambda)^{r-1} = E_\lambda \frac{1-(1-A_\lambda)^m}{A_\lambda}$$

Sind also m solcher Schichten hintereinander befindlich, so ist die Menge $E_{\lambda m}$ des von der Flächeneinheit senkrecht ausgestrahlten Lichtes dieser vielfachen Schichte:

$$E_{\lambda m} = \frac{1-(1-A_\lambda)^m}{A_\lambda} E_\lambda \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (70)$$

Für eine unendlich benachbarte Wellenlänge seien diese beiden Gröfsen durch E_{λ_1} und A_{λ_1} bezeichnet. Setzt man nun $\frac{E_\lambda}{A_\lambda} = e_\lambda$, $\frac{E_{\lambda_1}}{A_{\lambda_1}} = e_{\lambda_1}$, so erhält man für das Helligkeitsverhältnis der beiden benachbarten Spektralregionen:

$$\frac{E_{\lambda m}}{E_{\lambda_1 m}} = \frac{[1-(1-A_\lambda)^m]\, e_\lambda}{[1-(1-A_{\lambda_1})^m]\, e_{\lambda_1}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (71)$$

Die Gröfse e ist nun gerade die bekannte Kirchhoffsche Funktion der Wellenlänge und Temperatur, welche nach Kirchhoff die folgenden Eigenschaften besitzt:

Sie ist unabhängig von der Natur des Stoffes und ändert sich bei konstanter Temperatur stetig mit der Wellenlänge bis zu demjenigen Werte der letzteren, für welche sie verschwindet, so dafs sie weder auffallende Maxima noch Minima besitzt.

Sind also in einem Spektrum Diskontinuitäten vorhanden, so können diese für dieselbe Wellenlänge nicht in dessen Emissionsfunktion stecken.

Mit Hilfe dieses Satzes schliefst Kirchhoff theoretisch auf die Möglichkeit der Umkehrung der diskontinuierlichen Spektra, und da dieser Schlufs durch die Beobachtung bestätigt wird, so kann darin umgekehrt ein Beweis für die Realität der erwähnten Eigenschaften der Funktion e gesucht werden.

Es folgt daraus, dafs sich $\frac{e_\lambda}{e_{\lambda_1}}$ bei sehr nahe gleichem λ_1 und λ der Einheit nähert; da weiter A_λ und A_{λ_1} stets echte Brüche sind, so wird auch

[1] Wissenschaftl. Abhandl. IV. p. 208.

Im ersteren Falle wäre also für den Wert $\sigma = 1$ die untersuchte Spektrallinie 20 mal so hell, als ihre unmittelbare Umgebung, und würde daher dem Auge als scharfe helle Linie sich darstellen. Bei einer 500 mal gröfseren Dichte würde sich dagegen die Helligkeit der Linie zu der des Hintergrundes verhalten, wie 11 zu 10, so dafs sie erbreitert und an den Rändern verwaschen erscheinen müfste.

Der zweite Fall zeigt, dafs verschiedene Teile des Spektrums durch Vergröfserung der Dichte ihr Helligkeitsverhältnis umkehren können. Bei der Dichte 1 ist nämlich die Linie von der Wellenlänge λ 5 mal heller, als jene von der Länge λ_1. Bei der 50 fachen Verdichtung sind beide fast gleich hell, bei 500 facher schon diese 4 mal so hell als jene.

Nimmt die Dichtigkeit stetig bis 0 ab, so nähert sich das Helligkeitsverhältnis dem Grenzwerte:

$$\left(\frac{E_{\lambda\sigma}}{E_{\lambda_1\sigma}}\right)_{\sigma=0} = \frac{e_\lambda \ \mathrm{lgnat}\ (1 - A_\lambda)}{e_{\lambda_1} \ \mathrm{lgnat}\ (1 - A_{\lambda_1})} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (73)$$

Setzt man für benachbarte Spektralregionen den Wert $\frac{e_\lambda}{e_{\lambda_1}} = 1$, so wird für das erstere Beispiel die Lage der Helligkeitsasymptote 20.8, also nur noch wenig verschieden von dem schon bei $\sigma = 1$ erlangten Werte.

c) Wir befassen uns nun mit den Veränderungen der Helligkeit derselben Linie bei verschiedenem Drucke aber konstanter Temperatur. Wir hatten für eine Linie von der Wellenlänge λ bei der Dichte σ:

$$E_{\lambda\sigma} = [1 - (1 - A_\lambda)^\sigma] \frac{E_\lambda}{A_\lambda}$$

Es verschwindet demnach $E_{\lambda\sigma}$ für $\sigma = 0$, und erreicht den Maximalwert $E_{\lambda\sigma} = \frac{E_\lambda}{A_\lambda}$ für $\sigma = \infty$.

Für einen gegebenen Wert der Temperatur und der Dichte wird $E_{\lambda\sigma}$ für irgend ein λ ein absolutes Maximum sein: Es wird unter den verschiedenen hellen Linien eines Spektrums eine die hellste sein müssen, da sowohl A_λ als $\frac{E_\lambda}{A_\lambda}$ Funktionen der Wellenlänge sind. Berücksichtigt man nun, dafs $E_{\lambda\sigma}$, unter eine gewisse, durch die Empfindlichkeit unseres Auges gegebene Helligkeitsgrenze herabgesunken, für unsern Eindruck verlöscht, so folgt der Satz:

Wird bei konstanter Temperatur die Dichtigkeit eines glühenden Gases stetig vermindert, so wird auch die Zahl der Linien seines Spektrums vermindert, und schliefslich das ganze Spektrum im allgemeinen auf nur eine Linie reduziert werden, deren Lage von der Temperatur und Qualität des Gases abhängt.

Als Bestätigung dieses Satzes führen wir die Beobachtungen Lockyers und Franklands[1] an, welchen es gelang, das Hydrogen- und Nitrogen-Spektrum auf eine einzige Linie zu reduzieren.

Aus einem derart reduzierten Spektrum darf man aber durchaus keinen Schlufs auf die Temperatur ziehen, da ja bei jeder Temperatur eine Dichte existiert, welche dasselbe Phänomen hervorbringt. Umgekehrt kann auch die Kontinuität eines Spektrums

[1] Proc. of the R. Society No. 112.

nicht ohne weiteres als Grundlage einer Dichteschätzung dienen, da ja bei der äußersten Verdünnung eine hinreichend dicke Schichte dieselbe Erscheinung hervorruft.

Immer läßt sich aber eine Grenze angeben, unter welcher die Temperatur eines glühenden Gases mit diskontinuierlichem Spektrum nicht liegen kann.

Der Maximalwert von $E_{\lambda\sigma}$ ist nämlich jene Helligkeit, welche es für die gleiche Temperatur und Wellenlänge der absolut schwarzen Körper — unabhängig von seinen übrigen Eigenschaften besitzt.

Gehen wir nun wieder zu dem Ausdrucke in (72) zurück, den wir wieder für unendlich benachbarte Wellenlängen gelten lassen. Setzt man dann wieder $\frac{e_\lambda}{e_{\lambda_1}} = 1$, so hängt bei konstanter Dichte das Helligkeitsverhältnis zweier benachbarter Spektralstellen nur von den Werten des Absorptionsvermögens ab. Diese Werte können nun bei veränderlicher Temperatur für dieselbe Wellenlänge ähnliche Maxima und Minima haben wie sie diese für veränderliche Wellenlängen bei konstanter Temperatur in der That zeigen. Es kann also das Verhältnis $\frac{E_{\lambda\sigma}}{E_{\lambda_1\sigma}}$ lediglich durch Temperaturveränderungen größer oder kleiner als 1 werden. Hieraus folgt, daß sich die Helligkeitsverhältnisse zweier benachbarter Spektralstellen durch Temperaturveränderungen umkehren können, so daß an die Stelle des früheren Maximums ein Minimum tritt.

Wir ersehen daraus die Verschiedenheit der Wirkungsweise von Druck und Temperatur. Während durch den Druck ein bestehender Intensitätsunterschied zum Verschwinden gebracht werden kann, bewirkt die Veränderung der Temperatur sogar eine Umkehrung der bestehenden Verhältnisse.

Ist also die Verschiedenheit zweier Spektra desselben glühenden Gases eine solche, daß für irgend eine Wellenlänge dem Maximum des einen Spektrums ein Minimum des andern entspricht, so müssen die den beiden Spektren zugehörigen Temperaturen verschieden sein.

d) In ähnlicher Weise, wie Kirchhoff empirisch auf die Kontinuität der Funktion e bei Veränderung der Wellenlänge und bei konstanter Temperatur schließt, läßt sich auch auf die Kontinuität jener Funktion bei konstanter Wellenlänge aber veränderlicher Temperatur schließen.

Bezüglich der zuerst erwähnten Kontinuität bemerkt Kirchhoff:

Für eine konstante Temperatur ändert sich die Funktion e kontinuierlich mit der Wellenlänge, so lange diese nur nicht denjenigen Wert erhält, bei dem für jene Temperatur e zu verschwinden beginnt. Die Richtigkeit dieser Behauptung kann man schließen aus der Kontinuität des Spektrums eines glühenden Platindrahtes, sobald man annimmt, daß das Absorptionsvermögen dieses Körpers eine kontinuierliche Funktion der Wellenlänge der auffallenden Strahlen ist.

Es beruht dieser Schluß darauf, daß das Spektrum schwarzer undurchsichtiger glühender Körper unserem Auge die Gesamtheit aller den verschiedenen Werten der Wellenlänge zugehörigen Funktionswerte von e in räumlicher Nebeneinanderlage darbietet, wie sie der bestimmten Temperatur des glühenden Körpers entsprechen. Wäre nun die Stärke des physiologischen Eindruckes, mit welcher die verschiedenen Werte von e in einem Spektrum auf unser Sensorium einwirken, nicht ebenfalls eine Funktion der Wellenlänge, oder mit andern Worten, könnten wir voraussetzen, daß das physiologisch bestimmte Intensitätsverhältnis zweier verschiedener Teile des Spektrums gleich

dem mechanischen sei, so würde der Gang der Funktion e bei Veränderung der Wellenlänge einfach durch die photometrisch bestimmte Intensitätskurve eines gegebenen Spektrums bei konstanter Temperatur des glühenden Körpers aufgefaſst werden können. Obschon nun eine solche Darstellung aus dem angeführten Umstande nicht möglich ist, und die Natur der physiologischen Funktion, nach welcher sich der optische Eindruck eines homogenen Strahles bei konstanter lebendiger Kraft mit der Wellenlänge ändert, unbekannt ist, so läſst sich doch auch von dieser Funktion behaupten, daſs sie notwendig eine kontinuierliche sein müsse.[1]

Denn wäre dies nicht der Fall, so könnten die Spektra undurchsichtiger glühender Körper auf unser Sensorium nur dann einen kontinuierlichen Eindruck machen, wenn die physiologische Funktion in einer solchen Weise diskontinuierlich wäre, daſs stets ein Maximalwert in der einen Funktion durch einen Minimalwert in der andern kompensiert würde. Da nun aber die Annahme einer solchen Beziehung zwischen den glühenden Körpern und unserer Empfindung offenbar eine absurde wäre, so folgt aus der Kontinuität der Spektra undurchsichtiger glühender Körper ebensowohl die Kontinuität der Funktion e als diejenige der physiologischen Funktion der Intensität des Reizes in seiner Abhängigkeit von der Wellenlänge.

Da nun nach allen unseren Erfahrungen die Intensität des Spektrums mit wachsender Temperatur zunimmt, so gilt dasselbe auch für die Emissionsfunktion, und es folgt hieraus, daſs bei hohen Temperaturen auch das Absorptionsvermögen gröſser sein wird.

Aus diesem Umstande ergeben sich einige interessante Folgerungen für die Verwandlung eines diskontinuierlichen Spektrums in ein kontinuierliches. Betrachtet man nämlich, Gleichung (72), die Intensitätsverhältnisse benachbarter Spektralregionen, für welche $\frac{e_\lambda}{e_{\lambda_1}}$ sich der Grenze Eins nähert, so werden diese um so rascher dem Werte 1 zustreben, je gröſser A_λ und $A_{\lambda'}$ gesetzt werden. Wie wir früher sahen, ist aber die Annäherung an diesen Grenzwert identisch mit der Verbreiterung der betreffenden Spektralstelle und darauf folgender Kontinuität des Spektrums. Ist wie früher $A_\lambda = 0.100$ und $A_{\lambda'} = 0.005$, so verringert sich das Intensitätsverhältnis bei Erhöhung des Druckes von $\sigma = 1$ bis $\sigma = 500$ von dem Werte 20.0 bis auf 1.1. Setzt man aber jetzt beide Werte des Absorptionsvermögens fünfmal gröſser, also $A_\lambda = 0.500$, $A_{\lambda'} = 0.025$, so erhält man folgende Reihe der Intensitätsverhältnisse für verschiedene Drücke:

σ	$A_\lambda = 0.500$ $A_{\lambda'} = 0.025$	$A_\lambda = 0.100$ $A_\lambda = 0.005$
1	20.0	20.0
10	4.5	13.3
20	2.5	9.2
40	1.6	5.3
80	1.1	3.0

Es erreicht also hier das Intensitätsverhältnis bei ursprünglich gleicher Gröſse jenen geringen Wert 1.1 schon bei einem Drucke, der über 6 mal kleiner als derjenige

[1] Der Begriff „kontinuierlich“ ist hier, wie schon eingangs erwähnt wurde, stets in spektralem Sinne zu verstehen — bedeutet also die Abwesenheit stark hervortretender Maxima oder Minima eines Strahlenkomplexes.

ist, der bei niedrigen Werten des Absorptionsvermögens für dieses Intensitätsverhältnis erforderlich ist.

Diese Resultate können in den folgenden Sätzen ausgesprochen werden:

Das Intensitätsverhältnis zweier benachbarter Stellen eines Spektrums ändert sich um so schneller mit der Dichtigkeit, je grofser das Absorptionsvermögen an den betreffenden Stellen ist.

Und weiter mit Berücksichtigung des für höhere Temperaturen grofseren Wertes der Absorption:

Ein diskontinuierliches Spektrum verwandelt sich durch Steigerung der Dichtigkeit um so schneller in ein kontinuierliches, je höher die Temperatur des glühenden Gases ist.

Man erinnert sich, dafs die Wasserstofflinie H_β sehr leicht und energisch auf Druckänderungen reagiert und wird daher auf das grofse Absorptionsvermögen des Hydrogens für diese Wellenlänge schliefsen.

Aus dem zweiten Satze folgt, dafs ein glühendes Gas bei konstanter Dichtigkeit durch genügende Erhöhung der Temperatur in den spektralkontinuierlichen Zustand übergeführt werden kann. Diese letzte Folgerung wird auch durch die Erfahrung gestützt.

c) Die bisher gewonnenen Schlüsse lassen sich sogleich auf Formänderungen der Linien übertragen, die bei der Anwendung des Dopplerschen Prinzips von Bedeutung werden können. Ist nämlich das Absorptionsvermögen zu beiden Seiten einer Linie nicht gleich, so wird eine durch Dichtigkeitsänderungen erzeugte Erbreiterung der Linien schneller auf der Seite des grofseren Absorptionsvermögens eintreten, und die Sache den Anschein gewinnen, als ob die ganze Linie gegen diese Seite verschoben wäre. Das heifst:

Die Mitte einer durch Druckerhöhung verbreiterten Linie erleidet eine Verschiebung nach derjenigen Seite des Spektrums, auf welcher die grofseren Werte des Absorptionsvermögens des glühenden Gases liegen.

Man hat sich daher wohl zu hüten, die Verschiebungen der Mitten ungleich breiter Linien desselben Stoffes bei Vergleichung verschiedener Lichtquellen notwendig als eine Folge des Dopplerschen Prinzipes zu betrachten. Diese Verschiebung infolge der Verbreiterung der Linien läfst sich schon an den Natriumlinien nachweisen.

Wir wollen nun noch einige Worte über die Umkehrung der Linien selbst sagen. Da die Funktion e in Bezug auf ihre Variabelen stetig ist, und keine auffallende Maxima und Minima besitzt, so folgt, dafs die Emission und Absorption zugleich Maxima oder Minima besitzen. Eine von irgend einem Körper besonders kräftig emittierte Strahlengattung wird von demselben auch vorzugsweise absorbiert.

Wäre nun E die Emission eines homogenen Strahles eines glühenden Gases, A dessen Absorption, ebenso E' die Emission eines dasselbe durchdringenden Strahles derselben Wellenlänge, so wäre die resultierende Intensität

$$I = E + E'(1 - A)$$

also kleiner als E' in dem Falle, dafs $E < E'A$ oder, dafs $E' > e$, wo sich die Emission des absolut schwarzen Körpers auf die Temperatur des absorbierenden Gases bezieht. Die Bedingung für die Umkehrung eines Spektrums ist also, dafs die Temperatur des emittierenden Körpers höher sei, als die des absorbierenden.

Stellt man nun die beiden Gesetze $E = eA$ und $E = e(1 - R)A$ gegenüber, so folgt, da sich eine Linie desto leichter umkehren läfst, je grofser ihr Absorptionsvermögen

ist, daſs sich die Spektra stark reflektierender Körper schwerer umkehren lassen müssen, als man dies aus dem Kirchhoffschen Satze erschlösse. Oder mit anderen Worten: Alle Linien, welche mit den vorwiegenden Strahlen der Körperfarbe des glühenden Stoffes nahezu gleiche Wellenlänge besitzen, lassen sich schwerer umkehren, als man nach dem Kirchhoffschen Gesetze erwarten sollte. Es ist sehr wahrscheinlich, daſs die Hartnäckigkeit, mit welcher manche Linien einiger Stoffe sich jedem Umkehrungsversuche widersetzen, in dem erwähnten Umstande begründet ist.

5. Über die universelle spektralanalytische Bedeutung des Clausiusschen Gesetzes.

Das Kirchhoffsche Gesetz ist, trotzdem es durch den Ausspruch der Gleichberechtigung und Analogie der Emissions- und Absorptionsspektra den eigentlichen Grund der Spektralanalyse als Wissenschaft gelegt hat, nicht im Stande, uns irgend welche Aufschlüsse analytischer Natur über die in ihm enthaltenen Funktionen zu geben, und gewiſs wird nicht bestritten werden, daſs Wüllner und insbesondere Zöllner alles aus ihm gezogen, was aus ihm theoretisch überhaupt gefolgert werden konnte. Anders ist es mit dem Clausiusschen Gesetze. Nicht daſs dasselbe etwa direkte Maſsbestimmungen erlaubte, aber es setzt doch die noch unbekannte Emissionsfunktion in bekannte Beziehungen zu der Wellenlänge und den Eigenschaften des Mediums, und gestattet dadurch stets die Aufstellung von Funktionalgleichungen für die Emissionsfunktion. Wir wollen gleich einige dieser allgemeinen Beziehungen näher ins Auge fassen.

Es sei die Emissionsfunktion gegeben in der Form:

$$E = f(\lambda, z_1, z_2 \ldots z_n) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (74)$$

wo λ die Wellenlänge, $z_1 \ldots z_n$ aber von den Eigenschaften der Materie und teilweise oder ganz auch von der Temperatur abhängige Gröſsen vorstellen mögen. Es kann nun dargethan werden, daſs für einen beliebigen Körper die Zahl der Gröſsen z wenigstens zwei beträgt, und daſs diese Parameter der Funktion nicht stets in derselben Weise verbunden mit einander vorkommen, also nicht auf einmal eliminierbar sind.

Angenommen, sie wären dies; dann müſsten sie stets in der konstanten Verbindung

$$\zeta = \varphi(z_1, z_2 \ldots z_n) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (75)$$

in der Funktion E vorkommen. Wendet man nun die in

$$E = f(\lambda, \zeta) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (76)$$

übergangene Gleichung auf zwei Medien an, deren zweites in Bezug auf das erste den Brechungsindex n habe, so wäre $E_n = En^2$ und $\lambda_n = \frac{\lambda}{n}$; man hätte also die Gleichung

$$n^2 f(\lambda, \zeta) = f\left(\frac{\lambda}{n}, \zeta\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (77)$$

welche für alle Körper und alle Medien giltig ist. Differenzierte man nun nach ζ, um auf einen (physikalisch) unendlich benachbarten Körper zu übergehen — wobei natürlich die Wellenlänge unverändert bleibt, so könnte man aus dieser und der gewonnenen Differentialgleichung ζ eliminieren, und erhielte so eine Gleichung von der Form

$$F(\lambda, n) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (78)$$

welche die von stofflichen Verschiedenheiten unabhängige relative Dispersionsgleichung der beiden Medien darstellt. Eine solche Gleichung besteht aber nach allen unseren Erfahrungen nicht, die Prämisse war falsch: $z_1, z_2 \ldots z_n$ sind mindestens zwei nicht stets in derselben Verbindung wiederkehrende Gröfsen. Wir haben somit schon eine Bedingung für die aufzustellende Emissionsgleichung gewonnen.

Um einen anderen Fall zu haben, denken wir uns wieder die Emissionsgleichung in der Form (74) gegeben. Man kann behaupten, dafs jede Emissionsgleichung mit einer Refraktionsformel identisch sei, und umgekehrt.

Um zunächst die Bedeutung der Gröfsen $z_1 \ldots z_n$, welche bei dem Übergange zu einem anderen Medium notwendig ist, kennen zu lernen, schreiben wir die Gleichung (74) für r Specialwerte der Wellenlängen $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ und der zugehörigen Intensitäten $L_1 \ldots L_r$ auf, eliminieren aus den r Gleichungen die r Gröfsen $z_1 \ldots z_r$ und substituieren sie in die gegebene, welche darauf die Form annimmt

$$L = F(\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_r, L_1, L_2, \ldots L_r) \tag{79}$$

und noch immer die Emissionsfunktion darstellt. Wendet man nun diese Gleichung für zwei Media, deren relativer Index wieder n sein mag, an, so kommt wie früher

$$F\left(\frac{\lambda}{n}, \frac{\lambda_1}{n_1}, \frac{\lambda_2}{n_2}, \ldots \frac{\lambda_r}{n_r}, L_1 n_1^2, L_2 n_2^2 \ldots L_r n_r^2\right) = n^2 F(\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_r, L_1, L_2 \ldots L_r) \tag{80}$$

und diese Gleichung stellt nach n aufgelöst ganz allgemein eine Dispersionsgleichung vor, wenn nur aus dem Endresultate die Intensitäten der Strahlung ausfallen, oder doch nur in dem geringen Mafse stehen bleiben, welches nach den neuesten Experimentaluntersuchungen von H. Ebert[1] betreffs der Unabhängigkeit von Intensität und Wellenlänge noch als zulässig erachtet werden darf.

Versuchen wir nun auch umgekehrt, ob es möglich ist, aus der explizit gegebenen Dispersionsgleichung

$$n = \varphi(\lambda) \tag{81}$$

welche als die nach n aufgelöste (80) zu betrachten ist, die zu Grunde liegende Spektralgleichung herzuleiten. Differenziert man zu diesem Zwecke (80) nach n, um auf ein anderes Medium überzugehen, womit natürlich auch alle Konstanten $n_1, n_2 \ldots n_r$ sich ändern, und ersetzt man die Differentialquotienten $\frac{\partial n_r}{\partial n}$ aus der vorstehenden Dispersionsgleichung, so erhält man die folgende Differentialgleichung

$$0 = 1 + \frac{1}{2}\frac{\lambda}{F}\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\lambda}{n}\right)} + \frac{1}{2}\sum_1^r \frac{\lambda_r}{F}\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\lambda_r}{n_r}\right)}\frac{1}{\frac{\partial\varphi}{\partial n_r}} - \sum_1^r \frac{L_r}{F}\frac{\partial F}{\partial(L_r n_r^2)}\frac{1}{\frac{\partial\varphi}{\partial n_r}} \tag{82}$$

aus welcher sich F als Funktion der Variabelen $\frac{\lambda}{n}, \frac{\lambda_1}{n_1} \ldots L_1 n_1^2 \ldots$ bestimmen läfst. Setzt man darauf $n = 1$, d. h. geht man auf das ursprüngliche Medium zurück, so erhält man das Emissionsgesetz.

Wir werden dasselbe jedoch nicht auf dem erwähnten Wege ableiten, sondern denselben Gedankengang befolgen, den wir bei der Aufstellung desselben, als an eine Verbindung des Clausiusschen Gesetzes mit der Spektralanalyse noch gar nicht gedacht wurde, einschlugen. Jedenfalls hätte die Ableitung aus irgend einem Dispersionsgesetze

---

[1] Wied. Ann. 1887. No. 11. p. 378.

den Nachteil, dafs alle jene Hypothesen, welche diesem zu Grunde liegen, auch in jenem steckten.

Eine weitere und wie uns scheint nicht unwichtige Anwendung dieses so überaus fruchtbaren Gesetzes steht für die Wärmetheorie zu erwarten. Diese Anwendung, die wir noch zu anderer Gelegenheit werden geben müssen, liegt uns jetzt noch ferne — doch mufs auf den Gedankengang, der später zur Bestimmung von Parameterbeziehungen benutzt werden soll, näher eingegangen werden.

Leistet ein Körper bei Wärmezufuhr keine äufsere Arbeit, so verwandelt sich die ganze zugeführte Wärme in innere Energie. Es kann nun die Frage gestellt werden: Unter welchen Bedingungen ist das Verhältnis der Energievermehrung zur zugeführten Wärme, das bekanntlich dem mechanischen Äquivalente gleich ist, konstant für alle Körper? Bestimmt man den Zustand des Körpers — wie wir später thun werden, durch seine Spektralelemente, so erhält man offenbar zwischen deren Konstanten von Stoffbeschaffenheiten unabhängige Beziehungen, wie deren eine etwa das Drapersche Gesetz vorstellt.

I. Theorie der kontinuierlichen Spektra.

6. Die Spektralgleichung.[1]

Indem wir nun die Entwickelung der expliziten Emissionsfunktion, die wir im folgenden stets mit L bezeichnen und als Spektralgleichung charakterisieren wollen, vornehmen, sei es gestattet, noch einmal kurz die allgemeinsten notwendigen Erfordernisse dieser Gleichung aufzuschreiben. Diese sind zum Teil Erfahrungssätze, zum Teil theoretisch, und lauten:

I. Die Intensität des kontinuierlichen Spektrums ist eine (im beschränkten spektralanalytischen Sinne) kontinuierliche Funktion der Wellenlänge und der Temperatur.

Bei wachsender Temperatur wächst auch die Intensität; je kleiner die Wellenlänge, desto höher mufs die Temperatur ansteigen, um einen gegebenen Grad der Intensität hervorzubringen.

Alle Körper beginnen nahezu bei derselben Temperatur Strahlen derselben Wellenlänge zu emittieren, so zwar, dafs zuerst die intensivsten Strahlen merklich werden, worauf sich das Spektrum rascher gegen die brechbarere als gegen die minder brechbare Seite entwickelt; umgekehrt: Alle Körper haben nahezu dieselbe Temperatur, wenn ihre Spektra durch dieselbe Wellenlänge begrenzt sind.

II. An den Grenzen des Spektrums ($\lambda = 0$, und $\lambda = \infty$) nähert sich die Intensität dem Werte Null. Die Emission der Körper verhält sich wie die Quadrate der Brechungsindizes der umgebenden Medien.

Die Spektralgleichung enthält mindestens zwei von einander unabhängige und nicht stetig in derselben Weise verknüpft wiederkehrende Parameter.

---

[1] Mit den vorangehenden nötigen Entwickelungen der Schwingungsgleichungen vorgelegt der Königl. ungar. Akad. d. Wissensch. am 19. Okt. 1885 vom Ehrenmitgl. N. v. Konkoly.

Als spektroskopische Elemente der Schwingungen betrachten wir die Wellenlänge und die lebendige Kraft, die fortan in spektralem Sinne (objektive) Intensität genannt werden soll. Von der Polarisationsrichtung als primärem Elemente sehen wir auf Grund der Ergebnisse (I, 186, 187) sowie des Kirchhoffschen Gesetzes ab.

Für die Intensität der inneren Schwingungen eines nach der Daltonschen Atomistik konstruierten Körpers fanden wir unter (I. 188b) die Gleichung

$$L = \tfrac{3}{4}\left[m_1 \sum B^2\sigma'^2 + m \sum \mathfrak{A}^2\sigma^2 + \varkappa m \sum \frac{\mathfrak{B}^2}{M}\sigma'^2 - 2\varkappa' m \sum \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{M'}\sigma\sigma'\right]$$

wo B die Amplitude der Körperteilchen, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die freie und erregte Amplitude des Äthers bezeichnet. σ, σ' sind die entsprechenden Schwingungszahlen, m_1 und m die Massen. Die letzte Summe sollte über alle Glieder, für welche $\sigma = \sigma'$, ausgedehnt werden.

Diese Gleichung wollen wir vereinfachen, indem wir zunächst die neben den Amplituden stehenden Extinktionsfaktoren e^{f-St} und $e^{f-S't}$, die von der Zeit und der Entfernung der Wellenfläche vom Erregungspunkte abhängen, weglassen. Da nämlich das Spektrum durch fortdauernde Erregung des Körpers erzeugt wird, so zeigt es innerhalb endlicher Zeiten keine Schwächung, und was den Einflufs der Distanz anbelangt, so kann dieser leicht getrennt in Rechnung gezogen werden.

Die Gröfse der Amplitude ist bis jetzt noch gänzlich unbestimmt. B wurde willkürlich angenommen, und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ traten als Integrationskonstanten auf. Sie läfst sich aber durch Einführung einer Kontinuitätsbedingung bestimmen, welche ihre Erklärung durchaus in der atomistischen Hypothese findet. Früher wollen wir uns jedoch noch eine Anschauung über den Zusammenhang des Äthers mit den Körperteilchen bilden.

Das kontinuierliche Spektrum besteht unseren Gleichungen nach aus der Übereinanderlagerung zweier Spektra, welche bezüglich den Schwingungen der Molekeln und der Ätherteilchen entsprechen. Wären nun beide vollkommen von einander unabhängig, d. h. wäre die Ausdehnung des einen wesentlich verschieden von der des andern, so mufste bei beliebiger Temperatur wenigstens einmal eine Unterbrechung der Kontinuität im Spektrum eintreten, was nicht der Fall ist. Wir schliefsen daraus, dafs eine gewisse Äthermenge konstant den Molekeln anhaftet, und mit ihnen isochron schwingt, und dafs weiter der freie Äther, welcher die Molekularräume durchdringt, nur ein so schwaches Spektrum liefert, welches neben dem ersteren verschwindet. Und in der That, während die Oszillationsgeschwindigkeiten in beiden Fällen von derselben Gröfsenordnung sind, ist die Masse des freien Äthers verschwindend klein gegen die des Körpers. Nach Graetz[1] ist die Dichtigkeit s des Äthers in Bezug auf Wasser $9{,}0 \cdot 10^{-17} > s > 0{,}1 \cdot 10^{-17}$.

Versteht man nun unter m die Masse einer Molekel mit der anhaftenden und mitschwingenden Äthermasse, und unter a die Amplitude eines solchen Elementarsystems, so hat man statt (I. 186b) bis auf einen konstanten Faktor

$$L = \sum m a^2 \sigma^2 \qquad (33)$$

Die Definition der Körpereigenschaften und ihre Ursache finden wir in der Hypothese gegenseitiger Einwirkung der Molekeln, und es ist somit leicht ersichtlich, dafs diese Eigenschaften verschwinden, sobald die Aufeinanderwirkung der Molekeln auf-

[1] Repert. d. Phys. B. XXI. H. 8.

hört, was eintreten wird, wenn infolge der durch Temperaturerhöhung bedingten Disgregation die Molekularentfernungen einer für die einzelnen Körper charakteristischen Gröfse sich nähern. Die einzuführende Kontinuitätsbedingung lautet daher:

Die Schwingungsamplitude einer Molekel kann nicht gröfser sein, als die gröfste Entfernung, aus welcher eine Rückkehr in die Gleichgewichtslage noch möglich ist, sollen anders die Körpereigenschaften nicht aufgehoben werden. Diesen Satz könnte man das Prinzip der Erhaltung der Körpereigenschaften innerhalb der Grenzen der Dissoziation nennen.

Diese Hypothese ist übrigens durchaus nicht neu, wie ich zuerst annahm; schon R. Pictet[1] bedient sich ihrer in fast genau derselben Form zur Bestimmung des Siedepunktes fester Körper, indem er annimmt, dafs der Mittelwert der Amplituden der um ihre Gleichgewichtslage schwingenden Teilchen fester Körper im Augenblicke der Schmelzung für alle Stoffe die gleiche Gröfse besitze. Pictets Formel entspricht den wahren Verhältnissen so gut, als es überhaupt die rohe Kenntnis der in dieselbe eingehenden Gröfsen irgend erlaubt, und wird somit zur Stütze auch der beschränkteren Hypothese des konstanten Entfernungswertes.[2] Übrigens deutet die von zwei von einander unabhängigen Individuen eingeführte Hypothese stets auf die Notwendigkeit derselben.

Sei nun $f(r)$ die gegenseitige Wirkung der Molekeln m, α, β, γ die Projektionen der Amplitude auf die Koordinatenaxen. Da im Gleichgewichtszustande

$$0 = \sum m f(r) \frac{x}{r} \qquad (84)$$

ist, so wird die Kraft δ, mit welcher das Teilchen im Augenblicke seiner gröfsten Elongation von der Umgebung angezogen wird

$$\delta = \sum m f(r+\varrho) \frac{x+\alpha}{r+\varrho} \qquad (85)$$

Durch bereits angewandte Vereinfachungen und die Substitution

$$\mathfrak{f}(r) = \frac{f(r)}{r} \qquad (86)$$

erhält man daraus zunächst

$$\sum m x \mathfrak{f}(r) + \sum m \alpha \mathfrak{f}(r) + \sum m \mathfrak{f}'(r) \cdot \varrho x = \delta \qquad (87a)$$

und unter Rücksicht auf die vorausgetzte vollkommene Homogeneität des Körpers als Kraft, mit welcher das Teilchen durch das Molekularsystem angezogen wird

$$\sum m \alpha \mathfrak{f}(r)$$

Die Kraft, mit welcher das Teilchen in die Gleichgewichtslage zurückgezogen wird, hat dagegen wegen der Schwingungsgleichung $\alpha \sin \sigma t$ die Gröfse $-\alpha m \sigma^2$. Im Augenblicke der Dissoziation sollen beide Kräfte einander gleich sein, vor dem Eintreten derselben ist also

$$\alpha m \sigma^2 > \sum m \mathfrak{f}(r) \alpha$$

oder in Gleichungsform geschrieben:

---

[1] Compt. rend. 1879. T. 88. p. 855,

[2] L. Meyer, die mod. Theorien der Chemie. IV. Aufl. p. 154.

$$\alpha m \sigma = \sum m \mathfrak{f}(r) \alpha + \varepsilon m \tag{87b}$$

wobei nun εm eine von der Disgregation abhangige Grofse ist, und im besonderen die Kraft bedeutet, mit welcher ein Teilchen mehr gegen die Gleichgewichtslage, als durch die ubrigen Molekeln von dieser weggezogen wird, oder mit andern Worten, welche zur momentanen Schwingungselastizitat hinzugefugt, den Korper aus dem jetzigen Zustande in den Zustand der Dissoziation uberfuhrt

Die Grofse der Disgregation ist nun jedenfalls im Innern eines Molekularsystems konstant, wenn mit diesem Namen eine solche Vereinigung von Molekeln belegt wird welche noch auf eine innerhalb des Systems liegende Molekel wirken Jedenfalls sind aber die Grofsen $\varepsilon_1 - \varepsilon_k$ fur verschiedene Kombinationen der Molekeln mindestens von betrachtlich hoherer Ordnung als die Elastizitatskrafte Da zum Zustandekommen eines kontinuierlichen Spektrums eine fast unbegrenzte Zahl von Molekeln erforderlich ist so wird es noch erlaubt sein, mittlere Molekulardistanzen einzufuhren, indem wir setzen

$$p = m \mathfrak{f}(r) = \frac{f(r)}{r} \tag{88}$$

worauf wir die Gleichung (87b) und deren Analoge in Bezug auf die beiden anderen Komponenten der Amplitude in expliziter Form aufschreiben

$$\left.\begin{array}{l} 0 = -\alpha_1\sigma_1^2 + \alpha_2 p + \alpha_3 p + \quad + \alpha_n p + \varepsilon_1 \\ 0 = \alpha_1 p - \alpha_2\sigma_2 + \alpha_3 p + \quad + \alpha_n p + \varepsilon_2 \\ \\ 0 = \alpha_1 p + \alpha_2 p + \alpha_3 p + \quad - \alpha_n\sigma_n^2 + \varepsilon_n \end{array}\right\} \tag{89}$$

Ahnliche Gleichungen erhalt man auch fur die beiden ubrigen Koordinaten β und γ, und da man fur die drei Komponenten der n Molekeln $3n$ Gleichungen aufstellen kann, so ist die Bestimmung der Amplitude unzweideutig ausfuhrbar Die Auflosung kann in zweifacher Weise geschehen, erstlich nach der Determinantentheorie, was wir spater ausfuhren werden, oder aber durch Subtraktion der m-ten Gleichung von der n-ten, wobei der Voraussetzung nach $\varepsilon_n - \varepsilon_m$ wegfallt Diese letztere Methode giebt

$$\alpha_n = \alpha_m \frac{\sigma_m^2 + p}{\sigma_n^2 + p}, \quad \beta_n = \beta_m \frac{\sigma_m^2 + p}{\sigma_n^2 + p}, \quad \gamma_n = \gamma_m \frac{\sigma_m^2 + p}{\sigma_n^2 + p} \tag{90}$$

Da die absolute Amplitude mit a bezeichnend, ist

$$a^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \tag{91}$$

so findet man ganz allgemein

$$a = a_0 \frac{\sigma_0^2 + p}{\sigma^2 + p} \tag{92}$$

Fuhrt man Wellenlangen ein, indem mit c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnend

$$\sigma = \frac{2\pi c}{\lambda} \tag{93a}$$

und analoger Weise

$$\mu^2 = \frac{4\pi^2 c^2}{p} = \frac{4\pi^2 c^2 r}{f(r)} \tag{93b}$$

gesetzt wird, so erhalt man

$$a = a_0 \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} \frac{\lambda_0^2 + \mu^2}{\lambda^2 + \mu^2} \tag{94}$$

und hieraus nach Gleichung (15 II) auch die Intensitat

$$L = L_0 \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} \left(\frac{\lambda_0^2 + \mu^2}{\lambda^2 + \mu^2}\right)^2 \quad \ldots \ldots \quad (95)$$

die nun freilich nicht in absolutem Betrage, sondern nur relativ gegen die Intensität des Strahles von der Farbe λ_0 gegeben ist.

Wir haben somit das merkwürdige Gesetz gefunden, daſs die Intensität irgend einer Spektralstelle des kontinuierlichen Spektrums bekannt ist, sobald nur die Intensität einer einzigen Wellenlänge gegeben ist. Das Kirchhoffsche Gesetz und die vollkommene Kontinuität des Spektrums fordern übrigens dasselbe, und es ist der Willkürlichkeit von λ_0 und L_0 zufolge klar, daſs hier kein Widerspruch mit den Experimentaluntersuchungen Lippichs oder Eberts vorwaltet, denen zufolge die Amplitude einer Schwingung unabhängig von der Wellenlänge ist.

Wir wollen nun, soweit es jetzt schon thunlich ist, die Spektralgleichung einer eingehenden Diskussion unterwerfen, um sie dann sogleich auf allgemeineren Grundlagen von neuem ableiten zu können.

7. Diskussion der Spektralgleichung in Bezug auf die Wellenlänge.

a) Statt in der Gleichung (95) die willkürlichen Konstanten L_0 und λ_0 zu belassen, können wir diese durch Parameter von ganz bestimmter physikalischer Bedeutung ersetzen. Wir bilden zu dem Zwecke die Integralintensität

$$\mathfrak{L} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} \left(\frac{\lambda_0^2 + \mu^2}{\lambda^2 + \mu^2}\right)^2 d\lambda = -\left[\frac{1}{2\mu} \operatorname{arctg} \frac{\mu}{\lambda} + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\lambda^2 + \mu^2}\right]_{\lambda_1}^{\lambda_2} \cdot \frac{(\lambda_0^2 + \mu^2)^2}{\lambda_0^2} \quad \ldots \quad (96\text{a})$$

oder nach Einsetzung der Grenzen

$$\mathfrak{L} = L_0 \frac{(\lambda_0^2 + \mu^2)^2}{\lambda_0^2} \left[\frac{1}{2\mu} \operatorname{arctg} \frac{\mu(\lambda_2 - \lambda_1)}{\mu^2 + \lambda_1 \lambda_2} - \frac{1}{2} \frac{(\mu^2 - \lambda_1 \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)}{(\lambda_1^2 + \mu^2)(\lambda_2^2 + \mu^2)}\right] \quad \ldots \quad (96\text{b})$$

Versteht man nun unter der Totalintensität $\varDelta$ des Spektrums die Intensität des zwischen den Grenzen $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ genommenen Spektrums, so hat man

$$\varDelta = \frac{\pi}{4\mu} L_0 \frac{(\lambda_0^2 + \mu^2)^2}{\lambda_0^2} \quad \ldots \ldots \quad (97)$$

womit man L_0 und λ_0 aus (95) eliminieren kann, um die Beziehung zu erhalten:

$$L = \frac{4}{\pi} \mu \varDelta \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^2} \quad \ldots \ldots \quad (98)$$

μ und $\varDelta$ sind die Parameter oder wie wir sie von nun an nennen werden, die Elemente des Spektrums. Wie man sieht, genügen sie der Forderung des Clausiusschen Gesetzes, indem ihre Zahl zwei beträgt, und sie nicht auf einmal eliminierbar sind. In letzterer Form werden wir die Gleichung zumeist benutzen.

Die Diskussion der Gleichung zerfällt in drei Teile; man kann die Intensität als Funktion der Wellenlänge oder der Temperatur betrachten. Endlich — und diesem Falle muſs ein ganz besonderer Abschnitt gewidmet werden — läſst sich die Funktion für einen bestimmten und konstant zu erhaltenden Grenzwert der Intensität als Gleichung zwischen λ und μ betrachten.

Da μ nur von der Struktur des Körpers abhängt, so ist sie jedenfalls eine Funktion der Temperatur, und zwar, wie sich später zeigen wird, eine Funktion der Temperatur allein.

Die Spektralgleichung ist eine kontinuierliche, positive und eindeutige Funktion der Wellenlange und der statt der Temperatur eintretenden Variabelen A und μ die nur fur die Wellenlangen $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ verschwindet Bildet man den Differentialquotienten

$$\frac{dL}{d\lambda} = \frac{2 \cdot 4\mu}{\pi} A \frac{\lambda(\mu^2 - \lambda^2)}{(\lambda^2 + \mu^2)^3} \tag{99}$$

so ersieht man, daſs der Funktion ein und nur ein Maximum zukommt, dessen Lage durch $\lambda = \mu$ fixiert ist Die Intensitat nimmt mit dem Argumente zu, so lange $\lambda < \mu$, und sie nimmt trotz Annaherung an das weniger brechbare Ende ab, wenn $\lambda > \mu$ Die Maximalintensitat selbst betragt

$$L_{\mu} = \frac{A}{\pi\mu} \tag{100}$$

und bildet ein — wie wir besonders hervorheben — sehr flaches Maximum

Der zweite Differentialquotient ergiebt

$$\frac{d^2 L}{d\lambda^2} = \frac{2 \cdot 4}{\pi} \mu A \frac{3\lambda^4 + \mu^4 - 8\lambda^2 \mu^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^4} \tag{101a}$$

d h fur die Punkte

$$\lambda^2 = \tfrac{1}{3}\mu^2 \left[4 \pm \sqrt{13}\right] \tag{101b}$$

zwei Inflexionspunkte, die in einem von stofflichen und Temperaturverschiedenheiten unabhangigen konstanten Verhaltnisse zur Wellenlange des Intensitatsmaximums stehen

Da die Spektralgleichung von einem Minimalwerte ausgehend beiderseits bis auf Null abnimmt, so entsprechen naturlich jeder Intensitat auch zwei zugehorige Wellenlangen, wie sich dies auch aus der inverten Gleichung

$$\lambda^2 - 2\lambda \sqrt{\frac{\mu A}{\pi L}} + \mu^2 = 0 \tag{102}$$

ergiebt Sind λ_1 und λ_2 zwei Wellenlangen, welchen gleiche Intensitat zukommt, so bestehen fur diese, wie ein Blick auf vorstehende Gleichung lehrt, die Beziehung

$$\lambda_1 \lambda_2 = \mu^2 \tag{103}$$

und es ist klar, daſs diese Gleichung ebenso fur die (wahren, physikalischen) Grenzen gilt, fur welche die Intensitat zu Null, oder allgemeiner zu einem unendlich kleinen konstanten Wert abnimmt, als fur die Wellenlange des Maximums, fur welches $\lambda_1 = \lambda$ wird

Nach derselben abgeleiteten Beziehung liegen die gleichen Intensitaten entsprechenden Wellenlangen auf einer gleichseitigen Hyperbel von der Halbaxe $\sqrt{2}\,\mu$, wenn die Assymptoten zu Koordinatenaxen gewahlt werden

Da unsere Formel sowohl in λ als auch in μ (nach 93) die Lichtgeschwindigkeit c enthalt, so daſs fur ein anderes Medium

$$\lambda' = \lambda \frac{c'}{c}, \quad \mu' = \mu \frac{c'}{c} \tag{104}$$

zu setzen ist, so erhalt man die wichtige Beziehung

$$Lc^2 = L'c'^2 \tag{105}$$

die mit dem **Clausius**schen Satze identisch ist, wenn, was ja einleuchtend ist, angenommen werden darf, daſs die Absorption der Korper von dem umgebenden Medium unabhangig ist

Wollte man schliefslich noch für gegebene kleine Werte der Intensität, wie sie etwa an den Grenzen des Spektrums herrschen, die zugehörigen Grenzwellenlängen berechnen, so fände man für die brechbarere und weniger brechbare Wellenlänge respektive die Werte:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{\mu \varDelta}{\pi L}} - \sqrt{\frac{\mu \varDelta}{\pi L} - \mu^2} \text{ und } \lambda_2 = \sqrt{\frac{\mu \varDelta}{\pi L}} + \sqrt{\frac{\mu \varDelta}{\pi L} - \mu^2} \quad . \quad . \quad . \quad (106)$$

wo L jene kleine Intensität bedeutet.

Die Differentation nach Θ, der absoluten Temperatur, ergiebt:

$$\frac{dL}{d\Theta} = \frac{4}{\pi} \mu \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^2} \frac{d\varDelta}{d\Theta} + \frac{4}{\pi} \varDelta \frac{\lambda^2(\lambda^2 - 3\mu^2)}{(\lambda^2 + \mu^2)^3} \frac{d\mu}{d\Theta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (107)$$

und zeigt im allgemeinen, dafs die Zunahme der Intensität für die einzelnen Strahlen des Spektrums durchaus keine gleichförmige ist. Dafs eine Zunahme stets erfolgt, können wir erst später nachweisen; vor der Hand ersieht man nur, wenn man μ mit wachsender Temperatur sich verkleinernd denkt, dafs die Strahlen, welche brechbarer sind, als $\sqrt{3}.\mu$ rascher an Intensität zunehmen, als die diesseits $\lambda = \sqrt{3}.\mu$ gelegenen.

Nähert sich endlich die Temperatur solchen Grenzen, dafs respektive $\lim \mu = 0$ und $\lim \mu = \infty$ wird, was unendlich wachsender, bezüglich unendlich abnehmender Temperatur entspräche, so nähert sich auch die Spektralgleichung den einfacheren Formen

$$L = L_0 \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2 \text{ und } L = L_0 \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (108)$$

wie man aus (95) leicht ersieht. Durch die trigonometrische Substitution

$$\frac{\lambda}{\mu} = \operatorname{tg} \varphi$$

nimmt die Spektralgleichung die einfache Form an

$$L = L_\mu \sin^2 2\varphi$$

wenn L_μ die Maximalintensität bedeutet. Die Formel wird besonders für numerische Rechnungen sehr bequem.

b) Im allgemeinen mufs die Spektralgleichung auch für absolut schwarze Körper gelten, wenn nur die Konstanten entsprechend gewählt werden. Dann stellte sich das Absorptionsvermögen nach dem Kirchhoffschen Gesetze unter der Form dar:

$$A = a \left(\frac{\lambda^2 + m^2}{\lambda^2 + \mu^2}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (109)$$

wo a eine von der Wellenlänge unabhängige Gröfse, m aber die Wellenlänge der Maximalintensität im Spektrum eines absolut schwarzen Körpers bedeutet. Wir werden später Gelegenheit finden, den Faktor $a = \frac{\varDelta \mu}{Hm}$, wenn H die Bedeutung von $\varDelta$ für einen schwarzen Körper hat, als reine Funktion von μ und m darzustellen. Sind nun zwei Körper gegeben, deren Spektra kurz mit

$$L_1 = C_1 \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \mu_1^2)^2} \text{ und } L_2 = C_2 \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \mu_2^2)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (110)$$

bezeichnet werden mögen, so entsteht die Frage, ob die Superposition beider Spektra wieder denselben mathematischen Ausdruck besitze, wo das neue μ und C aus dem alten auf eine von der Wellenlänge unabhängige Weise zusammengesetzt ist? Allgemeinheit halber nehmen wir an, das Spektrum des Körpers 1 durchdringe den Körper 2; dann haben wir für das Superpositionsspektrum, dessen Elemente μ_0, C_0 sein mögen, den folgenden Ausdruck:

$$C_1 \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu_1^2)^2}\left\{1-a\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu_2^2}\right)^2\right\}+C_2\frac{\lambda}{(\lambda^2+\mu_2^2)^2} \# C_0\frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu_0^2)^2} \tag{111}$$

wo das Verbindungszeichen der linken und rechten Seite ein präsumiertes Äquivalenzzeichen vorstellen mag

Da die Gleichung identisch für alle Wellenlängen befriedigt sein soll, so zerfällt sie durch Vergleichung gleich hoher Potenzen von λ in folgende fünf

$$\left.\begin{array}{l}
C_1 - aC_1 + C_2 - C_0 \# 0 \\
C_1(\mu_0^2+\mu_2^2) - C_1 a(m^2+\mu_0^2) + C_2(\mu_0^2+\mu_1^2) - C_0(\mu_1^2+\mu_2^2) \# 0 \\
C_1(\mu_2^4+4\mu_0^2\mu_2^2+\mu_0^4) - C_1 a(m^4+4m^2\mu_0^2+\mu_0^4) \\
\qquad + C_2(\mu_1^4+4\mu_0^2\mu_1^2+\mu_0^4) - C_0(\mu_1^4+4\mu_1^2\mu_2^2+\mu_2^4) \# 0 \\
C_1(\mu_0^2\mu_2^4+\mu_2^2\mu_0^4) - C_1 a(\mu_0^2 m^4+m^2\mu_0^4) \\
\qquad + C_2(\mu_0^2\mu_1^4+\mu_1^2\mu_0^4) - C_0(\mu_2^2\mu_1^4+\mu_1^2\mu_2^4) \# 0 \\
C_1\mu_0^4\mu_2^4 - C_1 a m^4\mu_0^4 + C_2\mu_0^4\mu_1^4 - C_0\mu_1^4\mu_2^4 \# 0
\end{array}\right\} \tag{112}$$

welche jedoch als Gleichungen nicht gleichzeitig bestehen können Man sieht daher, daß die Spektralgleichung kein Additionstheorem besitzt (selbst dann nicht, wenn einfacher $a = 0$ gesetzt würde) was in Worten ausgedrückt so lautete

Es giebt keinen Körper, der innerhalb der Grenzen der Dissoziation zu einer beliebigen Temperatur erhoben ein Spektrum gäbe, welches der Summe der Spektra beliebig temperierter Körper gleich wäre

Die Nichtexistenz eines Additionstheoremes ist für die Anwendung der Spektralanalyse auf Astrophysik von größter Wichtigkeit, da es so möglich wird, aus dem Superpositionsspektrum der Sterne die Spektra des glühenden Kernes und der umgebenden Photosphäre gesondert darzustellen

8 Experimentelle Prüfung der Spektralgleichung

Der nächstfolgende Gedanke ist nun, eine experimentelle Prüfung des gefundenen Spektralgesetzes vorzunehmen, doch dies hat aus naheliegenden und schon erörterten Gründen beträchtliche Schwierigkeiten Die auf irgend eine Weise angestellte Beobachtung ergiebt nämlich stets ein subjektives Spektrum, welches mit dem objektiven L durch die Gleichung

$$I = sL \tag{113}$$

wo s das subjektive Äquivalent der objektiven Intensität bedeutet, verbunden ist Diese Größe als Funktion der Wellenlänge für die bei den Untersuchungen benutzten Instrumente darzustellen ist aber bis heute stets unterlassen worden

Wir wollen aber nichtsdestoweniger die Beobachtungen von Mouton[1] zu Grunde legen, da es uns später auf einem von unserer Spektralgleichung ganz unabhängigen Wege gelingen wird, die relative Energieschwächung der Körper zu bestimmen

Die Beobachtungen beziehen sich auf das Spektrum des glühenden Platins und der Sonne, und erstrecken sich auf eine etwa 5 mal größere Ausdehnung, als der Länge des sichtbaren Spektrums zukommt Von einer Benutzung der Sonnenbeobachtungen muß jedoch hier abgesehen werden, da das kontinuierliche Spektrum des festen

[1] Compt Rend LXXXIX pag 295

glühenden Kernes durch die Absorption der Photosphäre und des Luftkreises auf eine noch nicht genügend sicher bekannte Weise beeinflufst wird.

Das Intensitätsmaximum des glühenden Platins liegt bei $\lambda = 1.53$ (Einheit = 0.001 mm) und da wohl anzunehmen ist, (wie es auch die weiter unten folgende Tabelle der Werte s bestätigt), dafs die Absorption des angewandten Instrumentes für geringe Wellenlängenunterschiede in der Umgebung des Intensitätsmaximums konstant sein wird, kann mit diesem Werte $= \mu$ gerechnet werden.

Wir geben nun in der folgenden Tabelle[1] für die von Mouton untersuchten Wellenlängen das Äquivalent der subjektiven Intensität s, die beobachtete Intensität I, die objektive L und die nach den Gleichungen (113) und (IV. 18) berechnete subjektive Intensität sL. Die Maximalintensität ist als Einheit der Intensitäten genommen.

Wellenlänge	s	L	I	sL	$I-sL$
0.431	0.166	0.272	0.030	0.045	—0.015
0.486	223	333	050	074	—0.024
0.526	259	378	072	098	—0.026
0.589	312	450	125	140	—0.015
0.655	363	524	201	190	+0.011
0.760	465	635	314	295	+0.019
0.900	573	764	471	438	+0.033
1.150	794	923	739	733	+0.006
1.305	932	975	896	908	—0.012
1.400	0.980	0.992	962	0.971	—0.009
1.500	1.000	1.000	0.997	1.000	—0.003
1.530	0.999	1.000	1.000	0.999	+0.001
1.610	983	0.997	0.975	980	—0.005
1.750	903	982	849	887	—0.038
1.850	814	965	751	784	—0.033
1.980	671	936	607	628	—0.021
2.140	475	895	408	425	—0.017

Man sieht daraus, dafs das objektive Spektrum stets gröfser ist als das subjektive, wie es denn auch wegen der Vernachlässigung der Instrumentalabsorptionen sein mufs — dafs aber das berechnete und beobachtete subjektive Spektrum fast ganz zusammenfallen. Jedenfalls sind die Abweichungen innerhalb der Grenzen der bei photometrischen Messungen möglichen und zulässigen Grenzen, indem der mittlere wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung auf 1·3 Proz. zu stehen kommt. Die Übereinstimmung könnte noch erhöht werden, wenn man nicht gesondert nach (95) und (113) gerechnet hätte, sondern auch μ direkt aus (113) bestimmt hätte.

Von etwas geringerer Beweiskraft ist die Übereinstimmung mit der Forderung der Gleichung (103). Man erhält durch graphische Interpolation für die von Mouton angestellten subjektiven Beobachtungen am glühenden Platin und an der Sonne als Wellenlängen gleicher Energie und ihrem Produkte die Werte:

Platinspektrum.			Sonnenspektrum.		
$\lambda_1 = 1.530$	$\lambda_2 = 1.530$	$\lambda_1\lambda_2 = 2.341$	$\lambda_1 = 0.560$	$\lambda_2 = 0.560$	$\lambda_1\lambda_2 = 0.314$
1.439	622	333	547	580	317
1.393	660	307	530	596	316
1.360	688	298	518	610	316

[1] Vergl. dazu Tafel I.

Platinspektrum			Sonnenspektrum		
$\lambda_1 = 1.333$	$\lambda_2 = 1.710$	$\lambda_1\lambda_2 = 2.274$	$\lambda_1 = 0.508$	$\lambda = 0.625$	$\lambda_1\lambda = 0.317$
1.307	732	266	497	640	318
1.288	747	258	488	655	320
1.270	762	235	478	667	319

Der Satz, daſs das Produkt der Wellenlängen gleicher Intensität konstant ist, scheint trotz des auffallenden Ganges der Werte $\lambda_1\lambda$ hierdurch erhärtet zu sein, da es gelingt, die Richtung des Ganges schon im Vorhinein anzugeben. Sie erklärt sich ganz ungezwungen durch die Substitution eines subjektiven Spektrums an Stelle eines objektiven.

Der intensivste Teil des Platinspektrums liegt nämlich in der Gegend der gröſseren Wellen, und daher muſs die relative Energieschwächung von dem Maximum ausgehend, wo sie der Einheit gleichgesetzt ist, rascher gegen die weniger brechbare Grenze zunehmen. Die kleineren Wellenlängen werden also in geringerem Maſse gegen die Lage des Maximums hin restringiert, als die längeren und herrschen demnach vor, μ^2 muſs abnehmen. Das Maximum des Sonnenspektrums liegt dagegen näher dem Violett, von diesem ab muſs die relative Schwächung gegen die brechbare Grenze hin viel rascher zunehmen als gegen Rot. Der Kurvenast der kürzeren Wellen nähert sich rascher der Abszissenaxe als im objektiven Spektrum, die längeren Wellen herrschen vor, μ^2 muſs zunehmen.

Nach der Langleyschen Kurve des Sonnenspektrums[1] ist $\mu = 0.52$, während die Inflexionspunkte sich zu $\lambda_1 = 0.44$ und $\lambda_2 = 0.82$ ergeben. Für das objektive Spektrum fanden wir für die Lage dieser Punkte

$$\lambda_1 = 0.3626\ \mu, \quad \lambda_2 = 1.5922\ \mu$$

womit $\lambda_1 = 0.189$ und $\lambda_2 = 0.828$ wird. Da in den ultravioletten Teilen das objektive Spektrum durch Beobachtungen jedenfalls am meisten verzerrt ist, so wird wenigstens die Übereinstimmung des einen Inflexionspunktes günstig gedeutet werden müssen.

Die Beobachtungsreihen, die über Vergleichungen gleicher Strahlen in verschiedenen Spektra vorliegen, sind zwar von dem Einflusse der Instrumentalabsorption frei, beziehen sich aber auf eine so kurze Strecke des Spektrums, daſs hiervon wenig zu hoffen steht. Auch sind sie nicht geeignet, Aufschluſs über die Form der Spektralgleichung zu geben, da ja alle multiplikativen Glieder, welche reine Funktionen der Wellenlänge sind, herausfallen müssen.

9. Neue Ableitungen der Spektralgleichung

1) Wir wollen jetzt versuchen, eine von den mechanischen Anschauungen und hypothetischen Voraussetzungen über die Natur der Materie und des Äthers unabhängige Ableitung der Spektralgleichung zu geben.

Wir setzen dabei voraus, daſs das Clausiussche Gesetz allgemein gültig sei, daſs die Intensität des Spektrums an den Grenzen $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ verschwinde.

Da das kontinuierliche Spektrum auch im analytischen Sinne stetig ist, so muſs es sich durch eine Funktion der Variabelen, der Wellenlänge, ausdrücken lassen. Dieser Ausdruck sei eine nach Potenzen der willkürlichen Funktion $\varphi(\lambda)$ fortschreitende Reihe

[1] Mitteilung an die Pariser Akademie 1881.

Denn dafs eine solche Reihenentwickelung erlaubt ist, folgt daraus, dafs das Spektrum, wenn es selbst durch periodische Funktionen ausgedrückt werden müfste, sich nicht über das Bereich einer Periode erstreckt. Setzen wir also

$$L = a_0 + a_1 \varphi(\lambda) + a_2[\varphi(\lambda)]^2 + \cdots \quad \text{(114)}$$

wo wieder L die der Wellenlänge λ entsprechende Intensität, $a_0, a_1 ..$ aber nur vom Zustande und den stofflichen Beschaffenheiten der Materie abhängige Gröfsen sind. Nehmen wir nun an, dafs für unendlich kurze und unendlich lange Wellen die Intensität Null werde, was gleicherweise gilt, ob man die Intensitätsverteilung im Spektrum durch Verschiedenheiten der Amplitude oder durch die im Mittel wahrscheinlichste Verteilung durchschnittlich gleicher Amplituden erkläre.[1] Aus dieser Annahme folgt:

$$a_0 = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(\infty) = 0 \quad \text{(115)}$$

und die einfachste Funktion, welche diesen Bedingungen genügt, ist offenbar:

$$\varphi(\lambda) = \frac{\lambda^n}{\lambda^m + \mu^m}, \quad m > n \quad \text{(116)}$$

Benutzen wir jetzt den Clausiusschen Satz, dafs die Intensitäten in verschiedenen Medien verkehrt proportional sind dem Quadrate der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, so folgt aus der Gleichung

$$L = \sum a_q \left(\frac{\lambda^n}{\lambda^m + \mu^m}\right)^q \quad \text{(117)}$$

zunächst die Forderung

$$\frac{\mu}{c} = \text{konst}, \quad (m - n)q = 2 \quad \text{(118)}$$

wodurch die neue Form

$$L = \sum a_q \left(\frac{\lambda^n}{\lambda^m + \mu^m}\right)^{\frac{2}{m-n}} \quad \text{(119)}$$

hervorgeht. Nun steht μ in solcher Verbindung mit der Wellenlänge, dafs es zumal angesichts der Gleichung (118) nicht möglich ist, ihre mit der Wellenlänge analoge Bedeutung zu verkennen. Wir dürfen daher diesem Parameter eine beliebige, mit der Variabeln analoge aber speziale und genau definierbare Bedeutung unterlegen. Die Wahl wird nicht schwer, denn differenziert man die vorstehende Gleichung in Bezug auf λ, so erhält jedes Glied den Faktor

$$(m - n)\lambda^m - n\mu^m$$

der sogleich auf ein Maximum der Intensität bei der Wellenlänge

$$\lambda^m = \mu^m \frac{n}{m-n} \quad \text{(120)}$$

hinweist. Es ist also das natürlichste, μ die Wellenlänge dieses Intensitätsmaximums sein zu lassen. Dann wird

$$m = 2n \quad \text{(121)}$$

und die Spektralgleichung verwandelt sich in

$$L = a_1 \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^2} + a_2 \frac{\lambda^2}{\lambda^4 + \mu^4} \quad \text{(122)}$$

deren erstes Glied uns schon durch die erste Ableitung bekannt ist. Setzt man $L = 0$, so findet man aufser den physikalisch einzig zulässigen Wurzeln $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = \infty$ auch

[1] Diese Worte sind lange vor Erscheinen der Michelson schen Arbeit niedergeschrieben worden.

noch zwei neue der Gleichung 4. Grades in λ^2, nämlich $\cos 2\varphi = \sqrt{-\frac{a_1 + 2a_2}{a_1}}$, wo $\operatorname{tang} \varphi = \frac{\lambda}{\mu}$ gesetzt wurde. Diese Wurzel ist aber wesentlich imaginär. Denn a_1 kann nicht negativ sein, somit mufste es a_2 sein. Da aber stets $\frac{\lambda}{\lambda^4 + \mu^4} > \frac{\lambda}{(\lambda^2 + \mu^2)^2}$, so konnte ein negatives a_2 unter Umstanden eine negative Intensitat hervorbringen, was unmoglich ist. Aus den Wurzelwerten der Gleichung $L = 0$ kann also nicht auf die Richtigkeit der Gleichung $a_2 = 0$ geschlossen werden. Es ist jedoch zu bedenken, dafs die drei Grofsen Intensitat, Amplitude, Wellenlange in einem reinen quadratischen Verhaltnisse zu einander stehen mussen, so dafs sich die Amplitude rational durch die beiden andern Grofsen ausdrucken lassen mufs. Dieses Verhaltnis wird in (122) nur dadurch hergestellt, dafs $a_2 = 0$ angenommen wird. Aufserdem giebt es aber keine Dispersionsformel, welche unter Beibehaltung des zweiten Gliedes aus der Spektralgleichung (122) hervorgehen wurde, wie dies fur das erste Glied nachweisbar der Fall ist. Dies Verhaltnis soll unter b) besprochen werden. Es bleibt somit nur

$$L = \frac{4}{\pi} \mu A \frac{\lambda}{(\lambda^2 + \mu^2)} \tag{123}$$

b) Wir brauchen uns nun nicht eben auf ein Medium zu beschranken, in welchem die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Strahlung konstant ist, sondern wir durfen ebensowohl annehmen, dafs in demselben Dispersion zu Stande kommt. Es ist dann zu erwarten, dafs die Spektralgleichung in irgend eines der bekannten Dispersionsgesetze ubergeht.

Bilden wir nun dieselbe fur zwei Medien, deren relativer Brechungsindex fur den Strahl λ mit n, fur μ mit r und fur λ_0 mit n_0 bezeichnet sei, wobei wir wieder, um das Medium leichter berucksichtigen zu konnen, die Formel (95) benutzen, so erhalt man nach (80) die folgende Gleichung

$$L_0 \frac{\lambda}{\lambda_0^2} \left(\frac{\lambda_0^2 + \mu^2}{\lambda^2 + \mu^2} \right) = L_0 \frac{\lambda}{\lambda_0^2} \left(\frac{\lambda_0^2 r^2 + \mu^2 n_0^2}{\lambda^2 r^2 + \mu^2 n^2} \right) \tag{124a}$$

oder anders geschrieben

$$n^2 (\lambda_0^2 + \mu^2) + r^2(\lambda^2 - \lambda_0^2) - n_0^2(\lambda^2 + \mu^2) = 0$$

und aus dieser folgt

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\varkappa^2}{l^2 - \lambda^2} \tag{124b}$$

wenn gesetzt wird

$$\varkappa^2 = \frac{\lambda_0^2 + \mu^2}{r^2 - n_0^2}, \quad l^2 = \frac{\mu^2 n_0^2 + \lambda_0^2 r^2}{r^2 - n_0^2} \tag{125}$$

und ist nichts anderes als die Dispersionsgleichung, welche Ketteler auf Grund strenger kritischer Untersuchung aller bisher bekannt gewordenen Untersuchungen dieser Art ableitet, und spater durch eine Theorie, die auch wir reproduziert haben, erlautert. Wie bekannt, ist hier die Wellenlange noch im Korper gezahlt. Soll sich also λ auf den Weltather beziehen, so ist zu schreiben

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\varkappa^2}{l^2 - \frac{\lambda^2}{n^2}} \tag{126}$$

wo die $\varkappa'$ und l' den früheren analoge Bedeutung haben. Wenn Ketteler sagt, daſs für einen Körper, der aus mehreren optisch einfachen Elementen zusammengesetzt ist, allgemein die Gleichung

$$\frac{1}{n^2} = \sum \frac{\varkappa^2}{l^2 - \lambda^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (127)$$

bestehe, so besagt das von unserem Standpunkte aus nur, daſs die Spektralgleichung kein Additionstheorem besitze.

Wir heben besonders hervor, daſs wir durch diese Beziehung in den Stand gesetzt sind, aus dem bekannten Spektrum eines Stoffes seine Dispersionsverhältnisse, und umgekehrt, aus zwei Refraktionsbestimmungen die Spektralelemente für die betreffende Temperatur abzuleiten. Wir haben dadurch ein Mittel gefunden, das Element μ für beliebige Temperaturen mit ausgezeichneter Genauigkeit zu bestimmen.

Schreibt man nun umgekehrt die Kettelersche Dispersionsgleichung in der Form

$$n^2 = \frac{\dfrac{n_1{}^2\lambda_2{}^2 - n_2{}^2\lambda_1{}^2}{n_1{}^2 - n_2{}^2} - \lambda^2}{\dfrac{\lambda_2{}^2 - \lambda_1{}^2}{n_1{}^2 - n_2{}^2}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (128)$$

so erhielte man zur Bestimmung der ihr zu Grunde liegenden Spektralgleichung nach (82) die Differentialgleichung:

$$0 = 1 + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial \lg F}{\partial\left(\dfrac{\lambda}{n}\right)} + \frac{n(\lambda_2{}^2 - \lambda_1{}^2)}{n_1(\lambda_2{}^2 - \lambda_1{}^2)}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial \lg F}{\partial\left(\dfrac{\lambda_1}{n_1}\right)}\lambda_1 - \frac{\partial \lg F}{\partial(L_1 n_1{}^2)}L_1\right]$$
$$- \frac{n(\lambda_2{}^2 - \lambda_1{}^2)}{n_2(\lambda_1{}^2 - \lambda^2)}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial \lg F}{\partial\left(\dfrac{\lambda_2}{n_2}\right)}\lambda_2 - \frac{\partial \lg F}{\partial(L_2 n_2{}^2)}L_2\right]$$

aus der zunächst folgte:

$$L = F(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, L_1, L_2)$$
$$= L_0 L_1(\lambda_0{}^2 - \lambda_1{}^2)^2 \frac{\lambda^2}{[\lambda^2(\lambda_0\sqrt{L_1} - \lambda_1\sqrt{L_0}) + \lambda_1\lambda_0(\lambda_0\sqrt{L_0} - \lambda_1\sqrt{L_1})]^2} \quad \ldots \quad (129)$$

und die sich dann leicht in unsere bekannte Gleichung umtransformieren lieſse.

Angesichts dieser Übereinstimmung unserer Spektralgleichung mit einer durch die schärfsten und rigorosesten Untersuchungen und Experimenten geprüften Formel der theoretischen Optik, kann wohl an der Giltigkeit derselben kein Zweifel mehr obwalten, auch wenn wir nicht noch bei Besprechung der Lockyerschen Spektralmethode im Stande sein würden, neue Beweise für dieselbe zu erbringen.

Was uns aber wichtig bedünkt, ist, daſs sie aus den allgemeinsten Erfahrungen der Spektralanalyse ableitbar ist, mithin unabhängig von unseren Anschauungen über Stoff, Äther, ja selbst des Spektrums wird, insofern statt der Wellenlänge eine Variabele λ überhaupt, statt der Spektralelemente Λ und μ Kurvenparameter überhaupt stehen.

Umgekehrt ist durch die vorangehende Ableitung auch die Veränderung der Dispersion und Refraktion mit der Temperatur gegeben, sobald μ als Funktion dieser Variabelen bekannt ist, und wir können theoretisch selbst das Emissionsspektrum von Flüssigkeiten als solcher, insbesondere auch das der anomal dispergierenden Körper darstellen, worauf jedoch an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden soll.

10 Parametergleichungen

Zusammenhang von Spektrum und Zustand

Da der Zustand eines Korpers im allgemeinen als bestimmt anzusehen ist, sobald zwei der Variabelen, Temperatur, Druck und Dichte gegeben sind, aber nicht minder auch dann als bekannt anzunehmen ist, wenn nur sein Spektrum vollkommen bekannt ist, so folgt daraus die Notwendigkeit der Existenz gewisser Verbindungsgleichungen der besagten Zustandselemente Es sind also uberhaupt drei Gesetze zu erwarten Eine Verbindung von μ mit der Temperatur allein, von Δ mit der Temperatur und mit der Dichtigkeit

A Das Drapersche Gesetz

a) Da die Emission eines absolut schwarzen Korpers bei niedrigen Temperaturen unendlich klein angenommen werden mufs, der Absorptionskoeffizient aber fur alle Korper endliche Werte besitzt, so folgt daraus, dafs bei solch tiefen Temperaturen auch die Emission dieser Korper verschwindet Nimmt aber in Folge von Temperaturerhohung die Funktion e des Kirchhoffschen Gesetzes einen endlichen Wert an, so wird das zugleich mit E geschehen Mit anderen Worten Alle Korper fangen bei derselben Temperatur an, Strahlen einer gewissen Brechbarkeit zu emittieren Ein Gesetz, das wie man weifs, lange vor Kirchhoffs Untersuchungen von Draper experimentell gefunden und fur die verschiedensten festen Korper nachgewiesen wurde

In neuester Zeit fand allerdings H F Weber[1] die Entwickelung der Lichtemission bei festen Korpern nicht zusammenfallend mit den alteren, seit Drapers Zeiten sich gebildeten Ansichten, wonach die Emission mit dem tiefsten Rot bei der Temperatur 798° abs beginnt und gegen Violett fortschreitend die brechbare (sichtbare) Grenze des Spektrums bei 1443° erreichte Der neuere Forscher findet den Beginn der Strahlung, der dem Auge den Eindruck grauer oder farbloser Helligkeit einpragt, stets an der Stelle, wo bei entwickeltem Spektrum das (subjektive) Maximum der Intensitat liegt Auch scheint der erste Beginn der Strahlung nicht genau auf denselben Temperaturgrad zu fallen Fur die Grauglut des Platins betragt er etwa 668° abs

Dieses stimmt wohl alles trefflich mit der abgeleiteten Beziehung

$$\lambda_1 \lambda_2 = \mu^2$$

uberein, worin λ_1 und λ_2 die Grenzen des Spektrums, hier also die Wellenlangen des Emissionsbeginnes darstellen Bei Temperaturerhohung des Korpers beginnt die Strahlung bei der Wellenlange μ, die sich nun gegen das brechbare Ende verschiebt Zugleich fuhrt aber erhohte Temperatur eine Ausdehnung des Spektrums herbei, sodafs λ_1 rascher sich dem brechbareren Ende, als λ_2 dem weniger brechbaren nahert Wenn das Auftreten der ersten Lichtemission an eine konstantere Stelle gebunden scheint, als dies die Natur von μ mit sich zu bringen scheint, so liegt der Grund hiervon darin dafs ja die objektive Intensitat, um in subjektive verwandelt zu werden, mit einem Faktor multipliziert werden mufs, der an den Grenzen des sichtbaren Spektrums Null wird, und etwa bei $\lambda = 0\,560$ ein Maximum besitzt Die Maximalenergie wird also bei den Augenbeobachtungen gegen die Wellenlange $E\frac{1}{2}D$ gedrangt[2]

---

[1] Wied Ann 32 p 256 1887
[2] Wied Ann 32 p 700 1887

Hält man aber, wie wir es auch thun wollen, an den physikalischen Grenzen des Spektrums fest, so ist das Drapersche Gesetz als eine theoretische Forderung des Kirchhoffschen Gesetzes für denselben Fall eines objektiven Spektrums zu betrachten, das weiteren Untersuchungen wohl zu Grunde gelegt werden darf.

Wir bezeichnen nun mit ι eine unendlich kleine für alle Zustände konstante Intensität, und berechnen die dazu gehörige Wellenlänge, d. h. die Begrenzung des Spektrums, für welche nach Drapers Satz die Gleichung gilt:

$$\lambda = \text{konst.} \qquad (130)$$

wobei die Konstante von allen Körpereigenschaften unabhängig, nur eine Funktion der Temperatur darstellt.

Nach Gleichung (106) hat man, wenn man sich nur auf die brechbarere Begrenzung des Spektrums beschränkt, die nach dem soeben Gesagten auf Temperatureinwirkungen lebhafter reagiert:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\mu \mathit{\Delta}}{\pi \iota}} - \sqrt{\frac{\mu \mathit{\Delta}}{\pi \iota} - \mu^2} = \text{konst.} \qquad (131)$$

oder indem man eine Reihenentwickelung vornimmt, und rechterseits einen zweiten Körper von derselben Temperatur mit den Elementen μ_0, $\mathit{\Delta}_0$ einführt:

$$\sqrt{\frac{\mu \mathit{\Delta}}{\pi \iota}} \left\{\frac{1}{2}\frac{\mu \pi \iota}{\mathit{\Delta}} + \frac{1}{2.4}\,\frac{\mu^2 \pi^2 \iota^2}{\mathit{\Delta}^2} + \cdots\right\} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mathit{\Delta}_0}{\pi \iota}} \left\{\frac{1}{2}\frac{\mu_0 \pi \iota}{\mathit{\Delta}_0} + \frac{1}{2.4}\,\frac{\mu_0{}^2 \pi^2 \iota^2}{\mathit{\Delta}_0{}^2} + \cdots\right\}$$

Da wegen der unendlichen Kleinheit von ι gegen $\mathit{\Delta}$ bei dem ersten Gliede der Entwickelung stehen geblieben werden kann, so kommt ganz allgemein für zwei gleich temperierte Körper die Beziehung

$$\frac{\mu^3}{\mathit{\Delta}} = \frac{\mu_0{}^3}{\mathit{\Delta}_0} \qquad (132\text{a})$$

Insbesondere wird auch für einen absolut schwarzen Körper gelten

$$\frac{m^3}{H} = \frac{\mu^3}{\mathit{\Delta}} \qquad (132\text{b})$$

da ja die Spektralgleichung nicht an bestimmte Annahmen über die Natur des glühenden Körpers gebunden war.

b) Um diese Gleichung, die dadurch bemerkenswert ist, dafs sie von Oberflächenbeschaffenheiten oder stofflichen Verschiedenheiten der strahlenden Körper ganz unabhängig ist und nur in $\mathit{\Delta}$ die Entfernung des Beobachters enthält, zu vervollständigen, müssen wir nun die rechte Seite der obenstehenden Gleichung als explizite Funktion der Temperatur darstellen.

Bei diesem einen Punkte kommen wir nun nicht ohne bedenkliche Hypothese vorbei, wir hoffen aber, dafs das Resultat nicht zu sehr fraglich erscheinen wird. Wir müssen nämlich das Element μ eines mit kontinuierlichem Spektrum leuchtenden Gases (beispielshalber also Kohlenoxyd), das ja keine Ausnahme von dem Kirchhoffschen Gesetze bildet, mit seinem Molekulargefüge in Verbindung bringen.

Es sei zu dem Ende die in der Gleichung (84) vorkommende zwischen den Molekeln m des Körpers wirkende Kraft $f(r)$ explizite in der Form

$$f(r) = \frac{\varepsilon}{r^n} \qquad (133)$$

gegeben. Wird nun durch einen äufseren, normal auf die Oberfläche wirkenden Druck, dessen Gröfse für die Flächeneinheit p sein mag, die mittlere Molekular-

distanz r um dr verringert, so ist die innere Arbeit einer Molekel bei Verschiebung aller übrigen[1] durch

$$a = m\,dr \sum f(r) \tag{134}$$

gegeben, in welchem Ausdrucke allgemein die Summe über alle Molekeln des Körpers zu nehmen ist. Da aber die Kräfte $f(r)$ bei wachsender Distanz sehr rasch abnehmen, wird es genügen, die Summe nur über ein Molekularsystem zu erstrecken, worunter wir, wie früher, die (sphärische) Gesamtheit aller jener Molekeln verstehen, welche noch eben merkbar auf ein in ihm gelegenes Teilchen wirken. Die innere Arbeit aller N Molekeln des Körpers wird sohin

$$A = \tfrac{1}{2} N m\,dr \sum f(r) \tag{135}$$

wobei der Faktor $\frac{1}{2}$ daher rührt, daſs bei der Summation alle Teilchen zweimal vorkommen (da ja die Molekularsysteme nicht als gegeneinander abgegrenzte selbständige Stoffbestandteile angesehen werden). Diese Gleichung gilt natürlich nur für das Innere des Körpers, da an der Oberfläche sich nur unvollständige Molekularsysteme vorfinden. Wir können aber von einer Korrektion für die Oberfläche aus mehreren Gründen absehen; erstlich ist klar, daſs das der Gleichung hinzuzufügende Korrektionsglied an und für sich nur klein sein wird; zweitens darf aber immer die Oberfläche der Körper durch eine dynamische Hülle ersetzt gedacht werden, welche die Unvollständigkeit der Molekularsphären kompensiert (eine solche Hülle ist in der That an Flüssigkeiten zu beobachten). Endlich gehen aber die Strahlen, die unsere Sinne erregen, besonders bei höheren Temperaturen nicht von der Oberfläche der Körper aus, sondern von einer tiefer liegenden Schichte, gegen deren Tiefe wohl der Bruchteil der Molekulardistanz vernachlässigt werden darf.

Die vom Drucke p geleistete äuſsere Arbeit drückt sich aus durch

$$\mathfrak{A} = p\,dv \tag{136}$$

wenn v das Volumen des Körpers bedeutet. Da man hat

$$\frac{dv}{v} = 3\frac{dr}{r} \tag{137}$$

so erhält man durch Gleichsetzung der inneren und äuſseren Arbeit $A = \mathfrak{A}$ die Gleichung

$$\frac{3}{r}\,dr\,p\,v = \tfrac{1}{2} N m\,dr \sum f(r) \tag{138a}$$

oder anders geschrieben

$$p\,v = \tfrac{1}{6} N m^2 r \sum f(r) \tag{138b}$$

Für die Wellenlänge des Intensitätsmaximums fanden wir (93b) die Gleichung

$$\mu^2 = \frac{4\pi^2 c^2 r}{f(r)}$$

welche in die vorige (138b) unter der Annahme, es befänden sich in einem Molekularsysteme je N Molekeln, substituiert, ergiebt

$$pv = \tfrac{2}{3} N\mathsf{N}\, m^2 \frac{\pi^2 c^2 r^2}{\mu^2} \tag{139}$$

Schreibt man aber nach (93b) und 133)

---

[1] Redtenbacher, Das Dynamidensystem pag. 57

$$\mu^2 = 4\pi^2 c^2 \frac{r^{n+1}}{\varepsilon} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (140)$$

so geht die Zustandsgleichung in die folgende über:

$$pv = \tfrac{1}{6} NN'm^2 \, \varepsilon^{\frac{2}{n+1}} \left(\frac{4\pi^2 c^2}{\mu^2}\right)^{\frac{n-1}{n+1}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (141a)$$

Es ist nun das Produkt Nm und $N'm$, da ja m die Molekularmasse bedeutete, bezüglich die Masse des ganzen Körpers und der einzelnen Molekularsysteme; bezeichnet man diese mit M und M', so kommt

$$pv = \tfrac{1}{6} MM' \varepsilon^{\frac{2}{n+1}} \left(\frac{4\pi^2 c^2}{\mu^2}\right)^{\frac{n-1}{n+1}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (141b)$$

wobei ε und n die Charakteristiken der Molekularkräfte bedeuten. Wir betrachten nun noch die Gröfse M'. Die Masse einer Molekularsphäre ist für gleiche Körper gleich, wenn auch die Zustände dieselben sind. Treten Zustandsveränderungen ein, so haben diese eine Veränderung der mittleren Molekulardistanzen im Gefolge, wodurch möglicherweise die Zahl der ein System bildenden Molekeln, daher auch M' selbst ein anderes werden könnte. Eine solche Änderung ist wenig wahrscheinlich, jedenfalls aber so gering, dafs selbst bei sehr verschiedenen Zuständen die M' merklich konstant bleiben, da sie (wegen der Kontinuität in der Abweichung vom gewöhnlichen Boyle-Gay-Lussacschen Gesetze) nur um eine endliche Zahl von absoluten Molekulargewichten ab- oder zunehmen könnte.

Setzen wir also für eine gegebene Substanz

$$R = \tfrac{1}{6} M' \varepsilon^{\frac{2}{n+1}} (4\pi^2)^{\frac{n-1}{n+1}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (142)$$

und verstehen unter μ stets dasjenige, welches der jeweiligen Fortpflanzungsgeschwindigkeit entspricht, was auch bisher stattgefunden hat, so erhält man als allgemeine Gleichung des Zustandes:

$$pv = RM \left(\frac{1}{\mu}\right)^{2\frac{n-1}{n+1}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (143)$$

die mit dem Boyle-Gay-Lussacschen Gesetze völlig zusammenfällt, wenn

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{\Theta_0}{\Theta}\right)^{\frac{n+1}{2(n-1)}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (144)$$

gesetzt wird.

Hält man sich nun an ein vollkommenes Gas, so kann man das Drapersche Gesetz ganz explizite hinschreiben, indem die Totalintensität der absoluten Temperatur einfach proportional ist. Die Gleichung (132) ergiebt dann die folgende:

$$\frac{\mu^3}{A} = \frac{\mu_0^3}{A_0} \left(\frac{\Theta_0}{\Theta}\right)^{\frac{5n+1}{2(n-1)}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (145a)$$

wo nur noch der Exponent n zu bestimmen bleibt. Die Indizes 0 beziehen sich jetzt auf einen beliebig temperierten Körper, da vorstehende Gleichung allgemein giltig ist, sobald sie nur für einen Körper nachweisbar ist.

Da Untersuchungen über Spektra kontinuierlicher Gase bei verschiedenen Temperaturen nicht vorliegen, so benutzten wir eine allerdings sehr unvollständige Beobachtungsreihe von Draper, die glauben läfst, dafs n nahezu den Wert 3 besitzen werde. Überhaupt durchläuft der Exponent von $n = 2$ bis $n = \infty$ die Zahlenwerte von 5.5 bis 2.5 und wird nur für $n = 3$ zu einer ganzen Zahl, gleich 4. Sollte es blofser Zufall

sein, daſs in diesem Falle das Gesetz gerade identisch wird mit dem Stefanschen Strahlungsgesetze? Wir glauben nicht und ist einmal dieses Strahlungsgesetz, wie es heute auch der Fall ist, angenommen, so konnte das Drapersche Gesetz noch einfacher als wir es hier gethan, aus demselben abgeleitet werden. Wir schreiben daher

$$\frac{\mu^3 O^4}{A} = D \tag{115b}$$

und nennen D, welche eine reine Zahlenkonstante ist, die Drapersche Konstante. Das Gesetz ist gewissermaſsen die Verallgemeinerung des Stefanschen, indem es auch auf die Qualität der Strahlung Rücksicht nimmt, ist aber dafür — wie schon erwähnt — von Oberflächenbeschaffenheiten unabhängig.

c) Aus einer sehr ungünstig gegebenen Versuchsreihe von J. Violle[1], in welcher die Intensitäten der Strahlen glühenden Platins auf deren Werte im Augenblicke der Erstarrung des geschmolzenen Metalles bezogen sind,

Temperatur	$\lambda = 0.656$	0.5892	0.535	0.482
775	0.0001	0.00007	0.00003	
954	0.0020	0.0012	0.0007	
1045	0.0061	0.0045	0.0027	0.0013
1500	0.303	0.271	0.225	0.156
1775	1.000	1.000	1.000	1.000

erhielten wir durch eine sehr mühsame Reduktion die folgenden Werte der Draperschen Konstante

O abs. =	2048°	1773°	1318°	1227°	1048°
$\log D$	12.1050	12.1099	12.1046	12.1007	11.9130

wo nur der letzte Wert wegen der Kleinheit der Intensitäten bei der Temperatur 775° C ausgeschlossen wurde.

Nimmt man als Einheit der Intensität die Totalintensität des von einem Quadratcentimeter Oberfläche bei 1775° C erstarrenden Platins ausgestrahlten Spektrums, so wird für Tausendstel Millimeter als Einheit der Wellenlänge und dem (absoluten) Centesimalgrade

$$D = 12737 \cdot 10^8 \quad (\log 12.1051).$$

Zugleich dürfte die voranstehende Reihe der Konstanten ein schöner experimenteller Beweis des abgeleiteten Gesetzes sein. Die Grenzen der Temperatur sind genügend, die der Intensitäten fast zu weit auseinandergehalten.

Endlich schreiben wir noch das Drapersche Gesetz für den Fall her, daſs man statt der Totalintensität die Intensität L eines Strahles von der Wellenlänge λ einführen wollte. Es lautet sodann

$$\frac{\mu^4 O^4 \lambda}{(\lambda^2 + \mu^2)^2 L} = \frac{\pi}{4} D \tag{115c}$$

B. Die Stoffmenge.

Bisher sprachen wir unter stillschweigenden Voraussetzungen stets von Intensitäten und Absorptionen, welche sich auf die Einheit der Stoffmenge bezogen. Die Intensität an sich wird natürlich durch Veränderung des Druckes oder der Dichte nicht geändert, wohl aber indirekt durch Veränderungen der Absorptionsfähigkeit. Bezeichnet

[1] Ann. de Chim. et Phys. VI, 3, p. 373.

A deren Wert für die Einheit der emittierenden Zahl von Stoffteilchen, so möge er für deren n-fachheit mit A_n bezeichnet werden. Zwischen A_n und n besteht nun eine einfache Beziehung. Emittiert nämlich ein Körper schichtenweise die Intensität L, so gilt das insbesondere auch von der ersten Schichte. Die zweite Schichte emittiert ebenfalls L, davon wird aber AL in der ersten absorbiert, so dafs nur $L(1-A)$ austritt. Die n-te Schichte emittiert ebenfalls L, welche Intensität nach der $n-1$-ten Schichte auf $L(1-A)$, nach der r-ten auf $L(1-A)^{n-r}$ herabschmilzt. Emittiert wird also:

$$L + L(1-A) + L(1-A)^2 + \cdots + L(1-A)^{n-1} = L\frac{1-(1-A)^n}{A}$$

Die Anzahl n der Teilchen, welche in die Gesichtslinie des Beobachters fallen — denn selbstverständlich kann hier nur von diesen gesprochen werden — ist aber proportional der Stoffmenge, welche der Sehkegel aus dem Körper herausschneidet. Bezeichnen wir diese Menge, welche auch durch den Querschnitt dieses Kegels in die Dicke und Dichte des Körpers ausgedrückt werden kann, durch q, so kommt:

$$L_q = L\frac{1-(1-A)^q}{A} \quad \text{. . . . .} \quad (146\text{a})$$

wo nun A als Absorptionsvermögen für die Stoffmenge Eins definiert werden mufs. Daraus ersehen wir sogleich, dafs Druck- oder Dichteveränderungen eines Körpers nur dann spektralanalytisch sich bemerklich machen, wenn dadurch das Produkt aus Dichte und Dicke des Körpers geändert wird: wenn also entweder Stoffzufuhr vorhanden ist, wie bei den meisten unserer Versuche, oder wenn die Dicke sich in anderem als dem umgekehrten Verhältnis der Dichte ändert.

Wir versuchen nun die Spektralgleichung dem allgemeineren Falle einer von der Einheit verschiedenen Stoffmenge anzupassen. Da A eine Funktion der Wellenlänge ist, so wird oft statt der geschlossenen Form (146a) eine Reihenentwickelung nach Potenzen von q vorzuziehen sein Dies läfst sich in zweifacher Weise bewerkstelligen, je nachdem man $\frac{L}{A} = e$ setzt, wo e die Kirchhoffsche Funktion bedeutet, und man daher von einem absolut schwarzen Körper ausgeht, oder ob man in der That nach Potenzen von A entwickelt, und später nach Potenzen der q, welche in den Binominalkoeffizienten stecken, ordnet. Die erste Entwickelung giebt:

$$L_q = -e.\sum_1^{\infty} \frac{q^n[\operatorname{lognat}(1-A)]^n}{n!} \quad \text{. . . . .} \quad (146\text{b})$$

(das negative Vorzeichen ist nur scheinbar, denn $\log(1-A)$ ist, da $0 < A < 1$, stets negativ), die zweite und wichtigere dagegen:

$$L_q = \frac{4}{\pi}\mu A \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2} \sum_1^{\infty}{}_r (-1)^{r-1} \frac{q(q-1)\ldots(q-r+1)}{r!} A^{r-1} \text{. . .} \quad (146\text{c})$$

woraus man, nach Potenzen von q ordnend, die folgende unendliche Doppelreihe bekommt:

$$\sum_1^{\infty}{}_r (-1)^{r-1} \frac{q(q-1)\ldots(q-r+1)}{r!} A^{r-1} = Q =$$

$$q\Big[1 + \frac{1}{2!}A + \frac{2}{3!}A^2 + \frac{6}{4!}A^3 + \frac{24}{5!}A^4 + \frac{120}{6!}A^5 + \frac{720}{7!}A^6 + \frac{5040}{8!}A^7 + \frac{40320}{9!}A^8$$
$$+ \frac{362880}{10!}A^9 + \frac{3628800}{11!}A^{10} + \cdots$$

$$\begin{aligned}
&-q^2\Big[\frac{1}{2!}A+\frac{3}{3!}A^2+\frac{11}{4!}A^3+\frac{50}{5!}A^4+\frac{274}{6!}A^5+\frac{1764}{7!}A^6+\frac{13068}{8!}A^7\\
&\qquad+\frac{109584}{9!}A^8+\frac{1026576}{10!}A^9+\frac{10628640}{11!}A^{10}+\\
&+q^3\Big[\frac{1}{3!}A^2+\frac{6}{4!}A^3+\frac{35}{5!}A^4+\frac{225}{6!}A^5+\frac{1624}{7!}A^6+\frac{13132}{8!}A^7\\
&\qquad+\frac{118124}{9!}A^8+\frac{1172700}{10!}A^9+\frac{12753576}{11!}A^{10}+\\
&-q^4\Big[\frac{1}{4!}A^3+\frac{10}{5!}A^4+\frac{85}{6!}A^5+\frac{735}{7!}A^6+\frac{6769}{8!}A^7+\frac{67284}{9!}A^8\\
&\qquad+\frac{723680}{10!}A^9+\frac{8409500}{11!}A^{10}+\\
&+q^5\Big[\frac{1}{5!}A^4+\frac{15}{6!}A^5+\frac{175}{7!}A^6+\frac{1960}{8!}A^7+\frac{22449}{9!}A^8+\frac{269325}{10!}A^9\\
&\qquad+\frac{3416930}{11!}A^{10}+\\
&-q^6\Big[\frac{1}{6!}A^5+\frac{21}{7!}A^6+\frac{322}{8!}A^7+\frac{4536}{9!}A^8+\frac{62273}{10!}A^9\\
&\qquad+\frac{892055}{11!}A^{10}+\\
&+q^7\Big[\frac{1}{7!}A^6+\frac{28}{8!}A^7+\frac{546}{9!}A^8+\frac{9450}{10!}A^9+\frac{156773}{11!}A^{10}+\\
&-q^8\Big[\frac{1}{8!}A^7+\frac{36}{9!}A^8+\frac{870}{10!}A^9+\frac{18150}{11!}A^{10}+\\
&+q^9\Big[\frac{1}{9!}A^8+\frac{45}{10!}A^9+\frac{1320}{11!}A^{10}+\\
&-q^{10}\Big[\frac{1}{10!}A^9+\frac{55}{11!}A^{10}+\\
&+q^{11}\Big[\frac{1}{11!}A^{10}+
\end{aligned}\qquad (147)$$

und die wir kurz mit Q bezeichnen wollen, so daß die Gleichung des Spektrums wird

$$L_q = \frac{4}{\pi}\mu A Q \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2} \qquad (148)$$

wo sich natürlich A noch auf das Spektrum der Stoffmenge Eins bezieht. Nach den Untersuchungen über das Drapersche Gesetz kann auch A eliminiert werden, wodurch man als neuere Form der Spektralgleichung findet

$$L_1 = \frac{4}{\pi D}\mu^4 O^4 Q \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2} \qquad (149)$$

Viel verwickelter wird für diesen allgemeinen Fall die Bestimmung der Intensität zwischen gegebenen Grenzen. Diese Aufgabe führt auf das verwickelte Integral

$$L = \frac{4}{\pi}\mu A\int\frac{\lambda^2}{(\lambda^2+m^2)^2}\left\{1-\left[1-\frac{\mu^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}\right)^2\right]^q\right\}d\lambda \qquad (150)$$

wo das Absorptionsvermögen — wie es in Gleichung (174) gerechtfertigt werden soll —

$$A = \frac{\mu^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}\right)^2 \qquad (151)$$

gesetzt wurde. Je nachdem man

$$\frac{\mu^2}{m^2}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}\right)=x \text{ oder } \frac{\mu^2}{m^2}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}\right)=\cos\varphi$$

setzt, wird man auf eines der folgenden einfacheren Integrale geführt:

$$L=\frac{4}{\pi}\pi\Lambda\left\{\int\frac{\lambda^2}{(\lambda^2+m^2)^2}\,d\lambda-\frac{\mu^2}{2m(m^2-\mu^2)}\int\frac{(1-x^2)^q}{x^2}\sqrt{\frac{1-x}{1-\frac{m^2}{\mu^2}x}}\,dx\right\}$$

$$L=\frac{4}{\pi}\mu\Lambda\left\{\int\frac{\lambda^2}{(\lambda^2+m^2)}\,d\lambda-\frac{\mu^2}{2m(m^2-\mu^2)}\int\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{\frac{m^2}{\mu^2}\cos\varphi-1}}\cdot\frac{\sin^{2q+1}\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi\right\}$$

deren keines innerhalb der Grenzen $\lambda=0$ und $\lambda=\infty$ unendlich grofs und unstetig werden kann. Man wird bei wirklichen Berechnungen, da selbst Reihenentwickelungen nicht rasch zum Ziele führen, am liebsten zur graphischen oder mechanischen Quadratur greifen. Das über die Grenzen $\lambda=0$ und $\lambda=\infty$ genommene und auf irgend eine Weise berechnete Integral bezeichnen wir mit $f(q)$, so dafs man als zweite Parametergleichung hat:

$$\left.\begin{aligned}&\Lambda_q=f(q).\Lambda\\&f(q)=\frac{4}{\pi}\mu\int_0^\infty\frac{\lambda^2}{(\lambda^2+m^2)^2}\left\{1-\left[1-\frac{\mu^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}\right)^2\right]^q\right\}d\lambda\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (152)$$

und bemerken, dafs die Funktion aufser von ihrem Argumente, nur von μ und m abhängt.

C. Der erste Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie.

Wir haben schon kurz darauf hingedeutet, dafs es a priori durchaus nicht einleuchtend sei, dafs die Verwandlung der Wärme in Arbeit bei allen Körpern und unabhängig von der Qualität (Wellenlänge) der entstehenden inneren Bewegung nach demselben konstanten Verhältnisse vor sich geht. Um die hier in Betracht kommenden Fragen zu erläutern, und daraus die sich ergebenden Folgerungen abzuleiten, nehmen wir an, dafs die Energie eines Körpers im Clausiusschen Sinne durch die Totalintensität und die Wellenlänge der Maximalintensität gegeben sei. Die Annahme ist offenbar ganz gerechtfertigt, da eben die innere Energie Ursache der Gröfse und Beschaffenheit der ausgestrahlten Intensität ist, und da die Intensität eine nur von der momentanen Geschwindigkeit, die Wellenlänge des Intensitätsmaximums eine nur von der momentanen Konfiguration der Teilchen abhängige Funktion ist. Der einzige Unterschied bei dem wirklich beobachteten Spektrum wird der sein, dafs wegen der notwendig endlichen Dauer der Beobachtung statt der momentanen, mittlere Elemente eintreten. Doch ist diese Beschränkung insofern von keiner Bedeutung, als derselbe Fall auch für die Energie stattfindet.

Bezeichnen wir die Energie mit U, so werden wir ganz allgemein schreiben können:

$$U=\varphi(\Lambda)+\psi(\mu) \quad \ldots \quad (153)$$

wo φ und ψ noch unbestimmte Funktionen sind, die sich aus dem Clausiusschen Gesetze ergeben werden. Um dieses aber anwenden zu können, müssen wir zunächst untersuchen, was aus dem Körper wird, wenn er in ein anderes Medium übertragen wird.

Aus Gleichung (100) folgt zunächst:

$$\Lambda=\pi\mu L_\mu \quad \ldots \quad (154)$$

woraus wir sehen, daſs sich die Totalintensität eines Spektrums beim Übergang in ein Medium, dessen in Bezug auf das erstere genommene Brechungsvermögen für den Strahl μ die Gröſse ν besitzt, im Verhältnis von 1 zu ν vergröſsert. Wir denken uns als Wärmequelle die Totalstrahlung eines absolut schwarzen Körpers, Q. Für den Zuwachs der inneren Energie besteht dann die Gleichung

$$A\,dQ = dU$$

während im zweiten Medium $A\nu\,dQ$ stehen wird. Da nun das mechanische Äquivalent der Wärme jedenfalls von Zeit und Ort unabhängig ist, so kann die neue Gleichung für das zweite Medium nur bestehen, wenn auch U im Verhältnisse von $1:\nu$ zunimmt. Dies giebt nach (153) die Gleichung

$$\nu\left\{\varphi(\mathcal{A})+\psi(\mu)\right\} = \varphi(\mathcal{A}\nu)+\psi\left(\frac{\mu}{\nu}\right) \tag{155}$$

die in zwei von einander unabhängige zerfallen. Differenziert man nach ν und setzt hierauf $\nu = 1$, so kommt

$$\varphi(\mathcal{A}) = K\mathcal{A}, \quad \psi(\mu) = \frac{k}{\mu} \tag{156}$$

wo K und k Konstanten bedeuten, die vom Zustande unabhängig sind. k ist eine Funktion der stofflichen Natur des Körpers, K höchstwahrscheinlich eine absolute Konstante, insofern sie den Bruchteil der inneren Intensität darstellt, der emittiert wird. Wir bemerken, daſs, während die erste Gleichung (156) geradezu selbstverständlich ist, die zweite einen schönen Beweis für die Richtigkeit der Gleichung (141) giebt, da gerade $\frac{k}{\mu}$ das Potential der Teilchen auf sich selbst darstellen soll und dieses daraus in der That für den benutzten Fall $n = 3$ hervorgeht. Wir werden also überhaupt berechtigt sein, die Gleichung

$$pv = MR\,\frac{1}{\mu} \tag{157}$$

als allgemein giltige zu betrachten, da die vorhergehende Ableitung offenbar an gar keine Annahme über die Beschaffenheit des Körper gebunden war.

Bezeichnet nun Q die gesamte, als Wärme und Arbeit im Körper befindliche Wärme, und wieder A das mechanische Äquivalent der Wärme, so ist nach dem ersten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie

$$AQ = K\mathcal{A} + \frac{k}{\mu} \tag{158}$$

und es muſs zugleich die Bedingung

$$\frac{K\mathcal{A}\mu + k}{\mu Q} = A = \text{abs. konst.} \tag{159a}$$

erfüllt sein, soll anders das Äquivalent eine absolut konstante Zahl bedeuten. Ist dieses aber angenommen, so erhalten wir umgekehrt eine allgemeine Parametergleichung. Setzt man nach dem Draperschen Gesetze

$$\mathcal{A} = \frac{\mu^3 O^4}{D}$$

so kommt

$$\frac{K\mu^4 O^4 + kD}{D\mu Q} = A \tag{159b}$$

Für vollkommene Gase ist die innere Arbeit bekanntlich Null, also

$$k = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (160)$$

Damit wird, wenn nach

$$Q = c_v \Theta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (161)$$

gesetzt wird, wo bekanntlich auch c_v eine von der Beschaffenheit des Gases abhängige Konstante ist:

$$\mu \Theta = \sqrt[3]{\frac{ADc_v}{K}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (162)$$

Wir erhalten also wieder unsere im Draperschen Gesetze auf einem anderen Wege abgeleitete Beziehung, daſs für vollkommene Gase die Wellenlänge des Intensitätsmaximums sich umgekehrt proportional der absoluten Temperatur ändere. Das Gesetz drückt geometrisch eine gleichseitige auf die Assymtoten als Koordinatenaxen bezogene Hyperbel aus. Zugleich finden wir aber auch, daſs das Gesetz der Intensitätszunahme der Spektra für alle Gase bekannt ist, sobald es für ein einziges gegeben ist, insofern sich die groſsen Halbaxen der verschiedenen Gasen zugehörenden Hyperbeln verhalten wie die Bikuben der spezifischen Wärmen bei konstantem Volumen.

Bei anderen Körpern kann die Temperatur explizite nicht eingeführt werden, da wir es im allgemeinen vermeiden wollen, bei diesen von spezifischen Wärmen zu sprechen. Wir müssen vielmehr die Temperatur aus dem Draperschen Gesetze berechnet voraussetzen, und erhalten dann aus den jetzt gefundenen Gleichungen die der errechneten Temperatur entsprechende Wärme.

Will man die Totalintensität als Funktion der Temperatur haben, so hat man $\mu^3 = \frac{D\Lambda}{\Theta^4}$ zu setzen, und erhält:

$$K\Lambda + \frac{1}{\sqrt[3]{\Lambda}} \frac{k\Theta^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{D}} = AQ \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (163)$$

Da die dem Körper zugeführte Wärmemenge stets zur Erhöhung der Temperatur und Vermehrung der inneren Arbeit verbraucht wird, so folgt daraus, daſs Q rascher wächst, als die Temperatur. Es wächst daher auch das Produkt $\mu\Theta$ stets mehr und mehr mit wachsender Temperatur, d. h. μ steigt bei Körpern im allgemeinen rascher an, als bei Gasen. In der nebenstehenden Figur 16 bezieht sich die ausgezogene und punktierte Kurve resp. auf die Werte von μ und Θ eines vollkommenen Gases und irgend eines andern Körpers.

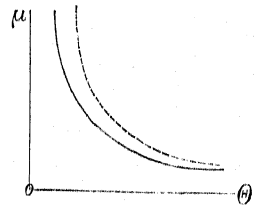
Fig. 16.

Wir schreiben schlieſslich (159) in der bequemeren Form

$$K(\mu\Theta)^4 - AD\frac{Q}{\Theta}(\mu\Theta) + kD = 0 \; . \; . \; . \; (164)$$

in welcher wir sie vorwiegend gebrauchen werden. Die Gleichung kann auch noch explizite gelöst werden. Ist y die positive Wurzel

$$y = \sqrt[3]{\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{ADQ}{K\Theta}\right)^2 \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{ADQ}{K\Theta}\right)^4 - \frac{4^3}{27}\left(\frac{kD}{K}\right)^3}\right\}} + \sqrt[3]{\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{ADQ}{K\Theta}\right)^2 \mp \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{ADQ}{K\Theta}\right)^4 - \frac{4^3}{27}\left(\frac{kD}{K}\right)^3}\right\}}$$

so erhält man zur Bestimmung von $\mu\Theta$ die beiden Gleichungen:

$$\mu O = -\frac{\sqrt{y}}{2} \pm \sqrt{-\frac{ADQ}{KO}\frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{y}{4}} \text{ und } \mu\Theta = \frac{\sqrt{y}}{2} \pm \sqrt{+\frac{ADQ}{KO}\frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{y}{4}}$$

Daſs aber die vorgelegte Cardanische Formel in y stets eine und nur eine reelle Wurzel besitzt, ersieht man daraus, daſs

$$27\left(\frac{ADQ}{KO}\right)^4 > 4^4\left(\frac{kD}{K}\right)^3, \text{ oder } \frac{27}{256}\left(\frac{AQ}{O}\right)^4\frac{D}{K} > k^3$$

ist Es ist nämlich $\frac{Q}{O}$ nahezu gleich der spezifischen Wärme, A und D eine sehr groſse Zahl, K aber ein nicht sehr viel von der Einheit verschiedener Bruch Dagegen ist k ein echter Bruch, der anzeigt, wie viel von der Wärme Q auf innere Arbeit verbraucht wurde

D Die Gleichung der inneren Arbeit

Wir haben unabhängig von unseren speziellen Annahmen über die innere Konstitution gefunden, daſs $\frac{k}{\mu}$ das Potential der inneren Kräfte darstellte Wir wollen nun dasselbe noch auf eine andere Weise zu berechnen suchen, indem wir dem Gedankengange Stefans[1] folgen Wirkt normal auf die Oberfläche eines Körpers der pro Flächeneinheit p betragende Druck, so wird im allgemeinen das Volumen v desselben auf v reduziert, wo nach dem Elastizitätsgesetze ist

$$apv = v - v \tag{165}$$

wenn a die Kontraktion der Volumeneinheit unter dem Drucke Eins bezeichnet Ist nun

$$p = \frac{1}{a} = E \tag{166}$$

so verschwindet das Volumen des Körpers Es ist also E der Druck, welcher das Volum zu Null, oder der Zug, der es zum doppelten macht, der sogenannte kubische Elastizitätsmodulus Nimmt man nun das Elastizitätsgesetz als unbeschränkt an, so läſst sich die innere Arbeit berechnen, welche während der Ausdehnung des Körpers von v' auf v verbraucht wurde Da nun die Deformation $v' - v$ nach (165) proportional ist dem Drucke, so schlieſst die Enddeformation mit ihrem entsprechenden Drucke in rechtwinkligen Koordinaten ein rechtwinkliges Dreieck ein, dessen Spitze im Anfangspunkt gelegen ist Der Flächeninhalt desselben

$$F = \frac{p(v - v)}{2} \tag{167}$$

stellt offenbar die gesamte innere Arbeit dar, welche während der ganzen Dauer der Deformation dem äuſseren Drucke stets das Gleichgewicht hielt Nach Substitution von p erhält man

$$F = \frac{(v - v')^2 E}{2v} \tag{168}$$

und demnach wird die innere Kraft, welche einem Wachstum des Volumens von 0 bis v entspricht

$$F_0 = \frac{v}{2} E \tag{169}$$

---

[1] Das Dulong Petitsche Gesetz Sitzungsber d k Wiener Akad d W XXXVI p 85

Man hat daher, da diese Arbeit andrerseits $\frac{\mu}{k}$ gefunden wurde:

$$2\frac{k}{\mu} = vE \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (170a)$$

wofür man jedoch allgemeiner schreiben wird:

$$\frac{k}{\mu} = \int_0^v p\, dv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (170b)$$

Ist der Druck konstant, so erhält man das allgemeine Gesetz von Boyle-Gay-Lussac in derselben Form für alle Körper, wie jenes für die Gase besteht. Es ist also k umgekehrt proportional der Dichte zu setzen. Man hat jedoch stets zu bedenken, dafs diese Gleichung nur für den Fall gilt, dafs die innere Arbeit in der äufseren ihr Äquivalent hat. Fälle, wie z. B. chemischer Umsatz bei konstantem Volumen sind prinzipiell ausgeschlossen.

E. Zusammenfassung.

Wir haben nun zwischen den Elementen des Spektrums, die der Beobachtung in jedem Falle zugänglich sind, und den Zustandsvariabeln der Körper vier Gleichungen gefunden, die insgesamt zwei von der Beschaffenheit des Stoffes abhängige Konstanten enthalten. Sie lauten der Reihe nach

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & \frac{\mu^3\Theta^4}{A} = D \\ \text{II} & A_q = f(q) A \\ \text{III} & K(\mu\Theta)^4 - AD\frac{Q}{\Theta}(\mu\Theta) + kD = 0 \\ \text{IV} & \frac{k}{\mu} = \int_0^v p\, dv \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (171)$$

und mögen nach den beigeschriebenen Ordnungszahlen benannt werden. Ist, wie wir nun annehmen, die Natur des emittierenden Stoffes bekannt, so giebt I die Temperatur, II die innere Wärme des Körpers, III und IV geben die Masse des in die Gesichtslinie fallenden Stoffes, und die von demselben geleistete innere Arbeit. Es sind somit alle Bestimmungsstücke gegeben, welche eine thermodynamische Behandlung des emittierenden Körpers betreffen.

Was die Genauigkeit der Gesetze bei praktischem Gebrauche anbelangt, so ist leicht zu ersehen, dafs II am bedenklichsten erscheinen mufs. Ist der Absorptionskoeffizient des Körpers wie etwa bei Gasen, die glücklicherweise in der Anwendung der Spektralanalyse die überwiegende Bedeutung haben, sehr klein, so wird $f(q) = q$; die Intensität bei der Masse q einfach des q-fachen der für die Masse Eins geltenden Intensität. Je gröfser das Absorptionsvermögen wird, desto geringer ist die Sicherheit in der Bestimmung von q, für $A = 1$ kann q bei konstanter Intensität jeden beliebigen Wert annehmen. Beschränkt man sich aber auch nur auf Gase, so kann $f(q)$ ohne besondere Schwierigkeiten bestimmt werden.

Ein Umstand verdient wohl noch hervorgehoben zu werden, der zwar bei dem Stande unserer heutigen Beobachtungskunst in Bezug auf Photometrie nur rein theoretisches Interesse besitzt. Handelt es sich um ein Gas, dessen Beschaffenheit durch das Spektrum bekanntlich sogleich erkennbar ist, so wird $\frac{Q}{\Theta} = c_v$ die spezifische Wärme bei kon-

stantem Volumen, eine konstante Zahl Die Temperatur läfst sich nun sowohl aus μ allein welches bekanntlich von der Ausdehung und Entfernung der Lichtquelle unabhängig ist als auch aus I bestimmen, und da in Δ die Entfernung des emittierenden Körpers enthalten ist, ist die Möglichkeit von Entfernungsbestimmungen durch die Spektralanalyse nicht ausgeschlossen

Nachtrag Die Gleichungen I und II ermöglichen es, aus einem gegebenen Spektrum die Temperatur und die Masse des leuchtenden Körpers zu bestimmen, lösen aber die umgekehrte Aufgabe nicht Darum mufste danach gestrebt werden, noch andere Beziehungen aufzufinden und so entstanden die Gleichungen III und IV die aufser der etwas unsicheren Methode der Übertragung eines Körpers in ein anderes Medium auch ziemlich ferne stehende Grofsen, wie Q, in das Problem einführen Es ist mir während des Druckes gelungen statt der Gleichungen III und IV eine einzige rationellere aufzustellen, welche zugleich im Stande sein wird darüber zu entscheiden, ob die Elemente Δ und μ von der Dichtigkeit unabhängig sind oder nicht, ob also das Spektrum die Dichte mit der Dicke der durchstrahlten Schichte nur in der bekannten Exponentialfunktion explizite enthält, oder aber der erstere dieser Faktoren auch implizite darin enthalten ist In einem besonderen Nachtrage soll diese Parametergleichung abgeleitet werden

11 Der absolut schwarze Körper Absorptionsvermögen

1) Die Kirchhoff'sche e-Funktion sollte von der Temperatur und Wellenlänge abhängen und als Funktion der beiden Variabeln betrachtet stetig sein, im ganzen Verlaufe weder auffallende Minima noch Maxima haben, und für gleiche Temperaturen um so höhere Intensitätswerte liefern, je gröfser die Wellenlänge ist Da die Gleichung des kontinuierlichen Spektrums allen diesen und auch dem Clausius'schen Satze Genüge leistet, überdies bei der Ableitung desselben keine speziellen Annahmen über die Beschaffenheit der Materie, oder der in derselben vorkommenden Bewegungen gemacht wurde, so können wir als Ausdruck dieser Funktion schreiben

$$e = e_0 \frac{\lambda}{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0^2+m^2}{\lambda^2+m^2}\right)^2 \tag{172a}$$

oder auch nach Einführung der Totalenergie H

$$e = \frac{4}{\pi} Hm \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+m^2)^2} \tag{172b}$$

wobei wir nun festsetzen wollen, dafs sich die Elemente H und m stets auf absolut schwarze Körper beziehen mögen, die für eine gegebene Temperatur ganz bestimmte Werte annehmen Wir stellen uns nun die Aufgabe, diese Werte zu bestimmen, und wollen zu dem Ende das Absorptionsvermögen des Körpers A ableiten Nach dem Kirchhoff'schen Satze hat man

$$A = \frac{E}{e} \tag{173}$$

woraus sogleich die Relation folgt

$$A = \frac{\Delta\mu}{Hm}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}\right) \tag{174a}$$

welche die Absorption als Funktion der Temperatur und Wellenlänge darstellt Nach dem Draper'schen Gesetze hätte man für zwei gleich temperierte Körper

$$\frac{A}{\mu^3} = \frac{H}{m^3}$$

und damit wird die Gleichung (174a) einfacher:

$$A = \frac{\mu^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2 + m^2}{\lambda^2 + \mu^2}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (174\text{b})$$

in der nur mehr je ein Spektralelement vorkommt. Beobachtet man also bei der Temperatur Θ_1 die Absorption eines Körpers (A, μ) für verschiedene Wellenlängen, so ergiebt sich daraus μ_1 und m_1. Bei der Temperatur Θ_2 gebe das Emissionsspektrum desselben Körpers die Elemente A_2 und μ_2. Dann bestehen die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{\mu_1^4}{m_1^4}\left(\frac{\lambda^2 + m_1^2}{\lambda^2 + \mu_1^2}\right)^2 \\ L &= \frac{4\mu_2}{\pi} A_2 \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \mu_2^2)^2} \\ \frac{H_1}{m_1^3} &= \frac{A_2}{\mu_2^3}\left(\frac{\Theta_1}{\Theta_2}\right)^4 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (175)$$

welche die Bestimmung der Elemente H_1 und m_1 für die Temperatur Θ_1 gestatten. Die Gleichung

$$\frac{H}{m^3} = \frac{H_0}{m_0^3}\left(\frac{\Theta}{\Theta_0}\right)^4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (176)$$

liefert dann eine Beziehung zwischen beiden Elementen bei anderen beliebigen Temperaturen. Die Bestimmung eines derselben z. B. von m geschieht erst, wenn diese Gröfse selbst als Funktion der Temperatur gegeben ist, was — will man Hypothesen vermeiden, nur auf experimentellem Wege — nach (174b) geschehen kann.

Differenziert man die Gleichung (174b) nach der Wellenlänge und der Temperatur, so kommt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \lambda} &= 4\frac{\mu^4}{m^4} \cdot \lambda \frac{(\mu^2 - m^2)(\lambda^2 + m^2)}{(\lambda^2 + \mu^2)^3} \\ \frac{\partial A}{\partial \Theta} &= \frac{4\mu^3}{m^4}\left(\frac{\lambda^2 + m^2}{\lambda^2 + \mu^2}\right)^2\left[1 - \frac{\mu^2}{\lambda^2 + \mu^2}\right]\frac{d\mu}{d\Theta} - 4\frac{\mu^4}{m^5}\left(\frac{\lambda^2 + m^2}{\lambda^2 + \mu^2}\right)^2\left[1 - \frac{m^2}{\lambda^2 + m^2}\right]\frac{dm}{d\Theta} \\ \frac{\partial A}{\partial \Theta} &= \frac{4\mu^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2 + m^2}{\lambda^2 + \mu^2}\right)^2\left\{\frac{1}{\mu}\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \mu^2}\frac{d\mu}{d\Theta} - \frac{1}{m}\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + m^2}\frac{dm}{d\Theta}\right\} \end{aligned}\right\} \cdot \quad (177)$$

Man ersieht daraus, dafs die Absorption bei zunehmender Wellenlänge zunimmt, wenn $\mu > m$ ist, und da μ mit wachsender Temperatur abnimmt, so findet man bei Temperaturerhöhung eine Absorptionszunahme, wenn:

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \mu^2}\frac{d\mu}{d\Theta} < \frac{1}{m} \cdot \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + m^2}\frac{dm}{d\Theta}$$

Da das Absorptionsvermögen stets zwischen 0 und 1 liegen mufs, so folgt aus (174b):

$$\mu^2(\lambda^2 + m^2) < m^2(\lambda^2 + \mu^2)$$

oder aber

$$\mu < m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (178)$$

und mit diesem Resultate lassen sich die unter (177) gefundenen Sätze so aussprechen: Die Absorption eines Körpers nimmt bei abnehmender Wellenlänge zu, bei wachsender Wellenlänge ab.

Da sich μ und m mit der Temperatur, invert ändern, so ist

$$\frac{d\mu}{d\Theta} > \frac{dm}{d\Theta}$$

$\frac{dA}{dO}$ also bei allen Temperaturen und Wellenlängen positiv. Denn man hat weiter noch die folgenden Ungleichungen

$$\frac{1}{\mu} > \frac{1}{m}, \quad \frac{\lambda^2}{\lambda^2+\mu^2} > \frac{\lambda^2}{\lambda^2+m^2}$$

durch deren Multiplikation man findet, daſs $\frac{dA}{dO}$ stets positiv ist. Bei zunehmender Temperatur wächst also die Absorption, wie dies die Thatsachen und Zöllners Folgerungen aus dem Kirchhoffschen Gesetze erfordern.

Es verdient noch bemerkt zu werden, daſs die Absorptionskurve in den Punkten

$$\lambda^2 = \frac{3\mu^2 - 5m^2}{6} \pm \sqrt{\frac{(3\mu^2 - 5m^2)^2}{36} + \frac{\mu^2 m^2}{3}} \tag{179}$$

Inflexionspunkte besitzt. Davon ist jedoch der unter Beibehaltung des —Zeichens entstehende imaginär.

Da es häufig von Vorteil sein wird, mittlere Absorptionskoeffizienten zu kennen, so berechnen wir noch einige hierher gehörige Integrale. Wir integrieren die Gleichung (174b) innerhalb der beliebigen Grenzen λ_1 und λ_2, und erhalten so

$$A_{(\lambda_1\lambda_2)} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\mu^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}\right)^2 d\lambda \tag{180}$$

Berücksichtigt man die Identität

$$\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}\right)^2 = 1 + 2(m^2-\mu^2)\frac{1}{(\lambda^2+\mu^2)} + \frac{(m^2-\mu^2)^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2}$$

so erhält man folgende Integralwerte

$$\int\frac{d\lambda}{(\lambda^2+\mu^2)} = \frac{1}{\mu}\operatorname{arctang}\frac{\lambda}{\mu} + \text{Const}$$

$$\int\frac{d\lambda}{(\lambda^2+\mu^2)^2} = \frac{1}{2\mu^3}\left[\operatorname{arctang}\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda\mu}{(\lambda^2+\mu^2)}\right] + \text{Const}$$

und daraus folgt, wie man leicht findet

$$A = \frac{\mu^4}{m^4}\left\{\lambda + \left[\frac{m^2-\mu^2}{\mu} + \frac{m^4-\mu^4}{2\mu^3}\right]\operatorname{arctang}\frac{\lambda}{\mu} + \left[\frac{m^4-\mu^4}{2\mu^2} - (m^2-\mu^2)\right]\frac{\lambda}{\lambda^2+\mu^2}\right\} + \text{Const}$$

$$\begin{aligned} A_{(\lambda_1\lambda_2)} = \frac{\mu^4}{m^4}\Bigg\{1 &+ \left[\frac{m^2-\mu^2}{\mu} + \frac{m^4-\mu^4}{2\mu^3}\right]\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\operatorname{arctang}\frac{\mu(\lambda_2-\lambda_1)}{\mu^2+\lambda_1\lambda_2} \\ &+ \left[\frac{m^4-\mu^4}{2\mu^2} - (m^2-\mu^2)\right]\frac{\mu^2-\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1^2+\mu^2)(\lambda_2^2+\mu^2)}\Bigg\} \end{aligned} \tag{181}$$

Genügen die Grenzwellenlängen der Bedingung

$$\lambda_1\lambda_2 = \mu^2 \tag{182}$$

was wohl häufig genug der Fall sein wird, d. h. hat man es mit physikalischen Grenzen des Spektrums zu thun, so wird

$$A_{(\lambda_1\lambda_2)} = \frac{\mu^4}{m^4}\left\{1 + \left[\frac{m^2-\mu^2}{\mu} + \frac{m^4-\mu^4}{2\mu^3}\right]\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\operatorname{arctang}\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2\mu}\right\} \tag{183}$$

während von einem mittleren Absorptionskoeffizienten zwischen den Grenzen $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ nicht mehr gesprochen werden kann.

Setzt man in Gleichung (174b) $\lambda = \infty$, so wird

$$A_{\lambda=\infty} = \frac{\mu^4}{m^4} \tag{184}$$

der Absorptionskoeffizient für sehr lange Wellen. Für unendlich kurze Wellen ist

$$A_{\lambda=0} = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (185)$$

und mithin sind für sehr kurze Wellen alle Körper als absolut schwarze zu betrachten.

Wir geben schliefslich noch eine andere Definition des mittleren Absorptionsvermögens, indem wir den Koeffizienten stets mit der zugehörigen Spektralintensität multiplizieren. Danach wird:

$$A_{(\lambda_1 \lambda_2)} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{\mu^4}{m^4} \frac{4\mu}{\pi} \mathcal{A} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2} \left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}\right)^2 d\lambda \quad \ldots \ldots \quad (186)$$

und der Sinn dieser Integration ist, einen jeden Absorptionskoeffizienten mit demjenigen Gewichte in die Rechnung zu führen, welches der Häufigkeit seines Vorkommens bei derselben Temperatur entspricht.

Zerlegt man in Partialfaktoren, so kommt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\lambda^2(\lambda^2+m^2)^2}{(\lambda^2+\mu^2)^4} &= \frac{A}{(\lambda^2+\mu^2)^4} + \frac{B}{(\lambda^2+\mu^2)^3} + \frac{C}{(\lambda^2+\mu^2)^2} + \frac{D}{\lambda^2+\mu^2} \\ A &= 2m^2\mu^4 - \mu^2 m^4 - \mu^6 \\ B &= m^4 - 4m^2\mu^2 + 3\mu^4 \\ C &= 2m^2 - 3\mu^2 \\ D &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (187)$$

und wendet man hierauf die Reduktionsformel an:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \frac{x}{2n a^2} \frac{1}{(x^2+a^2)^n} + \frac{(2n-1)}{2n a^2} \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$$

so gelangt man leicht zu den folgenden Integralformeln:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{I} &= \frac{1}{\mu} \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{\mu} \qquad \mathrm{II} = \frac{1}{2\mu^2}\left(\frac{\lambda}{\lambda^2+\mu^2} + \frac{1}{\mu} \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{\mu}\right) \\ \mathrm{III} &= \frac{1}{4\mu^2}\left(\frac{\lambda}{(\lambda^2+\mu^2)^2} + \frac{3}{2\mu^2} \frac{\lambda}{\lambda^2+\mu^2} + \frac{3}{2\mu^3} \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{\mu}\right) \\ \mathrm{IV} &= \frac{1}{6\mu^2}\left(\frac{\lambda}{(\lambda^2+\mu^2)^3} + \frac{5}{4\mu^2} \frac{\lambda}{(\lambda^2+\mu^2)^2} + \frac{3.5}{2.4\mu^4} \frac{\lambda}{\lambda^2+\mu^2} + \frac{3.5}{2.4.\mu^5} \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{\mu}\right) \end{aligned}\right\} \cdot \quad (188)$$

welche ergeben:

$$A_{(\lambda_1 \lambda_2)} = \frac{4\mu}{\pi} \frac{\mu^4}{m^4} \mathcal{A} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \Big\{ A\,\mathrm{IV} + B\,\mathrm{III} + C\,\mathrm{II} + D\,\mathrm{I} \Big\}_{\lambda=\lambda_1}^{\lambda=\lambda_2} \quad \ldots \quad (189)$$

Der hingeschriebene Klammerausdruck ist aber:

$$\left[\frac{D}{\mu} + \frac{1.C}{2\mu^3} + \frac{1.3B}{2.4.\mu^5} + \frac{1.3.5A}{2.4.6.\mu^7}\right] \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{\mu} + \left[\frac{1.C}{2\mu^2} + \frac{1.3B}{2.4.\mu^4} + \frac{1.3.5A}{2.4.6.\mu^6}\right] \frac{\lambda}{\lambda^2+\mu^2}$$
$$+ \left[\frac{B}{4\mu^2} + \frac{5.A}{4.6.\mu^4}\right] \frac{\lambda}{(\lambda^2+\mu^2)^2} + \frac{A}{2.3.\mu^2} \frac{\lambda}{(\lambda^2+\mu^2)^3} \quad \ldots \quad (190)$$

oder nach Substitution der für $A \ldots D$ gefundenen Werte:

$$\frac{m^4 + 2m^2\mu^2 + 5\mu^4}{2.2.4.\mu^5} \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{\mu} + \frac{m^4 + 2m^2\mu^2 - 11\mu^4}{2.2.4.\mu^4} \frac{\lambda}{\lambda^2+\mu^2}$$
$$+ \frac{m^4 - 14\mu^2 m^2 + 13\mu^4}{4.6.\mu^2} \frac{\lambda}{(\lambda^2+\mu^2)^2} - \frac{(m^2-\mu^2)^2}{2.3} \frac{\lambda}{(\lambda^2+\mu^2)^3} \quad \cdot \quad (191)$$

Setzt man in diesen Ausdrücken die Grenzen λ_2 und λ_1 ein, und dividiert durch $(\lambda_2 - \lambda_1)$, so erhält man unter leicht verständlicher Bezeichnung der konstanten Faktoren den Wert:

$$\frac{(I)}{\lambda_2-\lambda_1}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\mu(\lambda_2-\lambda_1)}{\lambda_1\lambda_2+\mu^2}+(II)\,\frac{\mu^2-\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1^2+\mu^2)(\lambda_2^2+\mu^2)}$$
$$+(III)\,\frac{\mu^2(\mu^2-2\lambda_1\lambda_2)-\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_1\lambda_2)}{(\lambda_1^2+\mu^2)^2(\lambda_2^2+\mu^2)^2}$$
$$+(IV)\,\frac{\mu^6-3\mu^4\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_1\lambda_2+\mu^2)-\lambda_1\lambda_2[\lambda^4_2+\lambda_1(\lambda_1^2+\lambda_2^2)(\lambda_2+\lambda_1)]}{(\lambda_1^2+\mu^2)^3(\lambda_2^2+\mu^2)^3} \tag{192}$$

Ist zugleich die Bedingung erfullt

$$\lambda_1\lambda_2=\mu^2 \tag{193}$$

so wird einfacher

$$\frac{(I)}{\lambda_2-\lambda_1}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2\mu}-(III)\,\frac{\mu^2(\lambda_1+\lambda_2)^2}{(\lambda_1^2+\mu^2)^2(\lambda_2^2+\mu^2)^2}$$
$$+(IV)\,\frac{\mu^6-3\mu^4(\lambda_1+\lambda_2)^2-\mu^2[\lambda_1^4+\lambda_2^4+\mu^4+\mu^2(\lambda_1^2+\lambda_2^2)]}{(\lambda_1^2+\mu^2)^3(\lambda_2^2+\mu^2)^3} \tag{194}$$

Sind endlich die Grenzen unendlich und Null, so wird der hingeschriebene Klammerausdruck, wie man durch Umformung leicht findet

$$\frac{6m^4+12m^2\mu^2+5\mu^5}{2\ 2\ 4\mu^5}$$

und man erhalt so

$$A_{(0\,\infty)}=\frac{\mathcal{A}}{4\pi m^4}\,(6m^4+12m^2\mu^2+5\mu^4) \tag{195}$$

wobei $\mathcal{A}$ die Totalenergie des absorbierenden Korpers bedeutet

b) Die Grofse m konnte als Funktion der Temperatur auf theoretischem Wege nur so dargestellt werden, wenn man auch μ als Funktion dieser Variabelen kannte Da diese Voraussetzung fur ein vollkommenes Gas zutrifft, so ist die Moglichkeit, m als Funktion der Temperatur zu bestimmen, darauf zuruckgefuhrt, diese Bestimmung fur das Absorptionsvermogen eines vollkommenen Gases zu thun (nach Gleichung (171b)) Dies ist nun in der That moglich, wenn man sich auf die kinetische Theorie der Gase als alleinige Hypothese stutzt [1]

Absorption soll stattfinden, wenn ein Lichtstrahl bei seinem Durchgange durch das Gas auf Teilchen stofst, die mit ihm isoperiodisch schwingen Von Schwingungen der Gas- — oder vielleicht auch durch diese angeregt — der Atherteilchen im Gase kann a priori keine Rede sein, wir wissen nur, dafs die Molekeln fortschreitende Bewegungen besitzen Es lafst sich aber leicht nachweisen, dafs das enorme Gewirre der in kurzen Weglangen L in der Zeit T zwischen zwei Zusammenstofsen einherfliegenden Teilchen den Eindruck einer schwingenden Bewegung macht, welche sich durch

$$y=\frac{L}{2}\sin\frac{2\pi}{2T}t$$

ausdrucken lafst Noch angenaherter wird dies von den zwischen den Gasmolekeln befindlichen Atherteilchen gelten Um diese Gleichung zu verifizieren bilden wir den Ausdruck der mittleren Geschwindigkeit G, es ist

$$G=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{dy}{dt}\,dt=\frac{L}{T}$$

gerade der Wert, den die kinetische Gastheorie als mittlere Geschwindigkeit der Molekeln findet Ebenso leicht erhalten wir auch den Ausdruck fur die charakteristischen Eigen-

---

[1] Astr Nachr No 2585 pag 302

schaften der Gase: sei N die Anzahl der Molekeln in einem bestimmten Volumen, m die Masse der einzelnen, so ist die Energie in einem beliebigen Momente:

$$p = N\frac{m}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

die auf die Wände des Gefäfses als Druck wirkt. Ist α der Winkel der Geschwindigkeitsrichtung mit der Stofsfläche, so ist:

$$p = \tfrac{1}{8}Nm\pi^2\frac{L^2}{T^2}\cos^2\pi\frac{t}{T}\cdot\cos^2\alpha$$

und ähnliche Ausdrücke erhält man für die beiden anderen Koordinaten. Da aber bei der sehr grofsen Anzahl der Molekeln die wahrscheinlichste Verteilung derselben eine derartige ist, dafs

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma$$

so ist, mit Rücksicht auf

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

der Wert der mittleren Energie gegeben durch

$$p = \tfrac{1}{3}Nm\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 G^2$$

welche Formel der Ausdruck des Boyleschen Gesetzes ist.

Es bezeichne nun Ω den arithmetischen Mittelwert der molekularen Geschwindigkeit, η den Koeffizienten der inneren Reibung, ϱ die Dichte des Gases; dann ist:

$$T = \frac{\pi\eta}{\varrho}\cdot\frac{1}{\Omega^2}$$

und hängt mithin, da η und ϱ durch das ganze Gasgemenge hindurch dieselben bleiben, lediglich von Ω ab; dies ist aber eine Gröfse, welche sich um einen Mittelwert rasch fallend gruppiert, mithin verschiedene Werte annimmt.

Es falle nun auf das Gas ein Bündel homogenen Lichtes von n Strahlen mit der Einzelintensität i; dann ist die Gesamtintensität des Bündels ni. Werden nun m Strahlen davon im Gase verschluckt, so ist:

$$\frac{m}{n} = A$$

das Absorptionsvermögen des Gases bei der angenommenen Temperatur.

Die Anzahl der Teilchen m, welche bei genügend beträchtlicher Dicke der Gasschichte absorbiert werden, d. h. welche die Periode $2T = \tau$ oder allgemeiner $2T = \nu\tau$ haben, wo τ die Schwingungsdauer des betreffenden Lichtstrahles, ist proportional der Wahrscheinlichkeit des Vorkommens einer molekularen Geschwindigkeit Ω. Ist Ω_0 deren Maximalwert im Gase für eine bestimmte Temperatur, und berechnet man

$$\frac{\Omega}{\Omega_0} = x$$

so ist diese Wahrscheinlichkeit nach dem Maxwellschen Gesetze:

$$w = \frac{4}{\sqrt{\pi}}x^2 e^{-x^2}$$

und daher ist, wenn C eine Konstante bedeutet:

$$A = C x^2 e^{-x^2}$$

Wird nun die absolute Temperatur von Θ_0 auf Θ erhöht, so wird die Geschwindigkeit Ω die $\sqrt{\frac{\Theta}{\Theta_0}}$ fache der früheren, und im Vergleich mit der früheren Anzahl der Teilchen mit der früheren Periode τ wird diese jetzt;

$$w^1 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} x^2 \frac{O}{O_0} e^{-x^2 \frac{\Theta}{O_0}}$$

Man erhalt also fur das Absorptionsvermogen

$$\frac{A}{A_0} = \frac{O}{O_0} e^{-x^2\left(\frac{O}{\Theta_0} - 1\right)}$$

wo noch x eine Funktion der Wellenlange ist Um sie zu bestimmen gehen wir von der Gleichung der inneren Reibung aus Nennt man die Zusammenstofsperiode der Maximalgeschwindigkeit T_0, welche spektroskopisch genommen der Wellenlange grofster Wahrscheinlichkeit, mithin μ, der Wellenlange des Intensitatsmaximums entspricht, so hat man unter Berucksichtigung der Beziehung

$$\lambda = 2Tc$$

die aus der angenommenen Schwingungsform folgt, die Gleichung

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{\Omega^2}{\Omega_0} = x^2$$

Damit wird nun

$$\frac{A}{A_0} = \frac{O}{O_0} e^{-\frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{\Theta}{O_0} - 1\right)}$$

oder μ auf eine feste Temperatur bezogen, da man fur vollkommene Gase die Gleichung hat

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{O_0}{O}$$

die man nun umgekehrt auch aus dem Verhalten von x^2 ableiten kann das Absorptionsvermogen

$$\frac{A}{A_0} = \frac{O}{O_0} e^{-\frac{\mu_0}{\lambda}\left(1 - \frac{O_0}{O}\right)}$$

Verbindet man die Gleichung (174b) mit den beiden vorhergehenden, so folgt

$$\frac{\mu^4 m_0^4}{\mu_0^4 m^4}\left(\frac{\lambda^2 + m^2}{\lambda^2 + \mu^2}\right)^2 \left(\frac{\lambda^2 + \mu_0^2}{\lambda^2 + m_0^2}\right)^2 = \frac{O}{O_0} e^{-\frac{\mu_0}{\lambda}\left(1 - \frac{\Theta_0}{O}\right)}$$

oder anders geschrieben

$$\frac{m_0^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2 + m^2}{\lambda^2 + m_0^2}\right)^2 = \left(\frac{\lambda^2 + \mu_0^2 \frac{O_0^2}{O^2}}{\lambda^2 + \mu_0^2}\right)^2 \left(\frac{O}{O_0}\right)^5 e^{-\frac{\mu_0}{\lambda}\left(1 - \frac{O_0}{O}\right)}$$

welche nun die chromatische Wellenlange des absoluten schwarzen Korpers als Funktion der Temperatur darstellt Die Gleichung gilt naturlich auch in der von der Wellenlange unabhangigen Form Setzt man also $\lambda = \infty$, so kommt

$$\frac{m^4}{m_0^4} = \left(\frac{O_0}{O}\right)^5$$

Bei sonst gleichen Umstanden durchwandert das Energiemaximum des absolut schwarzen Korpers unter allen Stoffen am schnellsten das Gebiet des Spektrums Aus der Gleichung (176) folgt daraus weiter

$$\frac{H}{H_0} = \left(\frac{O}{O_0}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Die Energie des absolut schwarzen Korpers ist proportional der vierten Wurzel aus der absoluten Temperatur und es ist selbstverstandlich, dafs die Geschwindigkeit der Energieanderung unter allen Korpern die kleinste ist Man darf aber durchaus nicht vergessen,

dafs die hier abgeleiteten Resultate auf der Hypothese beruhen, dafs sich das Spektrum aufser auf die von uns angenommene Art noch durch Annahme gleicher Partialintensitäten mit einer wahrscheinlichen Verteilung der Wellenlänge, erklären lasse.

Dieser Zusatz über die Bestimmung von m als Funktion der Temperatur ist mit der einzigen Veränderung der reziprok gegebenen Absorptionsgleichung eines späteren Abschnittes halber beibelassen werden. Der ungarischen Akademie der Wissenschaften[1] wurde er bereits in der Form vorgelegt, in welcher x eine allgemeine Funktion der Wellenlänge $\varphi(\lambda)$ darstellt, welche für $\lambda = \infty : x = 0$ giebt, da Ruhe von Molekeln nur Wellen von unendlich grofser Länge hervorbringt. Die Spezialisierung $x^2 = \frac{\lambda}{\mu}$ ist entschieden — wenn auch folgerichtig, doch unglücklich, denn sie giebt für $\lambda = 0$, $A = 0$, was widersinnig ist. Jedenfalls braucht nicht wiederholt hervorgehoben zu werden, dafs dieser Abschnitt nur beiläufigen Aufschlufs über den Lauf von m erbringen, nicht aber den Beobachtungen vorgreifen wollte.

12. Experimentelle Prüfung des Absorptionsgesetzes.

Um eine Anwendung der abgeleiteten Absorptionsformeln zu geben, wollen wir die Absorption der Sonnenchromosphäre untersuchen, die von Prof. Dr. H. C. Vogel messend untersucht wurde, indem verschiedene Teile der Sonnenscheibe photometrisch bestimmt wurden. Aus den Daten, die sich bis an den Rand der Scheibe erstrecken, berechnet Prof. Vogel den Betrag der Absorption nach der Bouguerschen Formel.

Es ergiebt sich so:

$\lambda =$	0.6620	0.5790	0.5125	0.4700	0.4430	0.4085
A beob.	0.206	0.334	0.443	0.423	0.466	0.519
A berech.	0.275	0.334	0.389	0.432	0.463	0.505

Bei der Rechnung gingen wir von der Formel

$$A = \frac{\mu^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}\right)^2$$

aus, und betrachteten μ und m als unbekannt. Die direkte Auflösung ist $\mu = 0.7250$, $m = 1.9375\sqrt{-1}$ mit der Fehlerquadratsumme $\sum v^2 = 0.0051$. Der unmögliche imaginäre Wert von m kommt jedenfalls von Beobachtungsfehlern (auffallend ist der Sprung zwischen den Wellenlängen 0.5125 und 0.4430), welche, da der Wellenlänge ein sehr geringer Spielraum belassen ist, in den Koeffizienten der Gleichungen sehr ungünstig zusammenwirken. Die obige Reihe der A ist mit dem Werte

$$\mu = 0.5361, \quad m = 1.1631$$

gerechnet und läfst die Fehlerquadratsumme $\sum v^2 = 0.0080$. Bei der Schwierigkeit der Messungen ist die Übereinstimmung jedenfalls genügend grofs.

Besseren Anschlufs an die Beobachtung gewährt eine Reihe von Untersuchungen, die von Dr. G. Müller[2] zur Bestimmung der Absorption der Erdatmosphäre angestellt sind,[3] und die wir unter Berücksichtigung der Krümmung der Erdoberfläche reduzierten.

---

[1] Sitzung vom 17. Oktober 1887.
[2] Astr. Nachr. 2464.
[3] Vergl. dazu Tafel IV.

Das ursprüngliche Beobachtungsmaterial bezieht sich auf photometrische Messungen verschiedener Teile des Sonnenspektrums bei verschiedener Höhe über dem Horizonte.

Die Gegeneinanderstellung von Rechnung und Beobachtung giebt

$\lambda =$	0.666	0.616	0.598	0.581	0.550	0.514	0.486	0.462	0.442
A beob =	0.1260	0.1378	0.1625	0.1872	0.2134	0.2536	0.2744	0.2803	0.3787
A berech =	0.1349	0.1631	0.1749	0.1868	0.2108	0.2427	0.2709	0.2978	0.3219

$$\mu = 0.5038, \quad m = 6.96$$

Die Summe der Fehler wird $\sum v = 0.0101$, der Fehlerquadrate $\sum v^2 = 0.0045$. Die Temperatur, auf welche sich die Untersuchung bezieht, dürfte sich nicht weit von der mittleren Sonnentemperatur Potsdams entfernen.

Dafs die Chromosphäre der Sonne ein Spektrum liefert, dessen Intensitätsmaximum auf etwa $E\frac{1}{7}D$ fällt, hatte man auf anderem Wege, wegen der Superponierung der Spektra von Sonnenkern, Photosphäre und Chromosphäre nicht leicht gefunden. Auffallend wird es auch sein, dafs das kontinuierliche Spektrum der Erdatmosphäre (die Zenithalhöhe der Atmosphäre zur Einheit genommen) sein Intensitätsmaximum bei $b\frac{1}{4}F$ liegen hat. Es steht das damit im Zusammenhange, dafs die atmosphärische Luft bei dieser Temperatur gerade die Wellen von geringer Länge sehr bedeutend absorbiert.

13. Diskussion der Spektralgleichung in Bezug auf die Temperatur

Wir gehen aus von der Gleichung (149), welche in Bezug auf die Einheit der Stoffmenge lautet

$$L = \frac{4}{\pi D}\mu^4 O^4 \frac{\lambda}{(\lambda^2 + \mu^2)} \tag{196}$$

um sie als Funktion der Temperatur einer näheren Untersuchung unterziehen zu können.

Was nun zunächst die Gröfse μ anbelangt, so sahen wir, dafs sie bei Gasen der absoluten Temperatur umgekehrt proportional ist, im allgemeinen aber rascher ansteigt als eine in Bezug auf die Assymtoten genommene gleichseitige Hyperbel. Da, wie früher erwähnt, bei wachsender Temperatur die ganze innere Wärme rascher zunimmt als die Temperatur, so können wir zur Erleichterung der Diskussion (ohne die jetzt einzuführende Gleichung in theoretische Untersuchungen mit einzuziehen) schreiben

$$\frac{Q}{O} = c + c_1 O + c^2 O^2 + \tag{197}$$

wo c_1, c_2 positive Konstanten sind — wenigstens so lange, als ihre Gröfse auf das Zeichen einfliefsend in Betracht kommen kann. Für unendlich hohe Temperaturen wird also $\mu = 0$, für nahe beim absoluten Nullpunkt gelegene dagegen $\mu = \infty$. Das Spektrum nähert sich in beiden Fällen, wie wir schon früher fanden, den Kurven

$$L = L_0 \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2 \text{ und } L = L_0 \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2$$

Der Differentialquotient $\frac{d\mu}{dO}$ wird allgemein

$$\frac{d\mu}{dO} = \frac{AD\mu \frac{dQ}{dO} - 4K\mu^4 O^3}{4K\mu^3 O^4 - ADQ} \tag{198}$$

Da der Nenner nicht unendlich wird, so lange man in endlichen Grenzen der Temperatur bleibt, und auch in diesem Falle das für $O = \infty$ selbstverständlich eintretende Minimum

von μ charakterisierte, so suchen wir die Nullwerte des Zählers. Man findet für unsere spezielle Annahme über die spezifische Wärme als Maximum-Minimumgleichung:

$$4K\mu^3\Theta^3 = AD(c_1 + 2c_2\Theta + \cdot\cdot) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (199)$$

so dafs für μ ein Kulminationspunkt, und zwar nur einer, allerdings statt hat. Derselbe mufs der Natur der Sache nach ein Maximum sein; denn ein Minimum machte den Verlauf der Kurve der μ dem bei Gasen eingehaltenen ähnlich. Da wir das Maximum wieder aus dem Produkte $\mu\Theta$ bestimmen, so mufs dasselbe in Bezug auf die Kurve $\mu\Theta =$ konst. ein sehr flaches Maximum sein. Um die Lage des Maximums auf der Temperaturaxe zu schätzen, nehmen wir annäherungsweise linker Hand [nach (162)]

$$\mu\Theta = \sqrt[3]{\frac{ADc}{K}}$$

und erhalten so in Θ die Gleichung

$$\Theta = \frac{4c - c_1}{2c_v} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (200)$$

Da c_2 im Vergleiche zu c_1, dieses aber schon gegen c sehr klein ist, so folgt daraus, dafs das Maximum von μ bei sehr hohen Temperaturen liegen mufs. Es ist wahrscheinlich, dafs dieses Stationärwerden der Wellenlänge gröfster Intensität bei hohen Temperaturen mit einer andern Erscheinung desselben zusammenhängt, von der wir noch später, bei Ableitung der Balmerschen Formel, zu sprechen haben werden.

So viel ist klar, dafs man ganz allgemein $\mu\Theta =$ konst. setzen darf, so lange es sich nur darum handelt, allgemeine Anschauungen über den Einflufs der Temperatur auf das Spektrum zu gewinnen. Dann ist aber sogleich klar, dafs bei wachsender Temperatur L stets gröfser wird. Das Maximum der Intensitätsänderung liegt stets bei $\lambda = \frac{\mu}{\sqrt{5}} = 0.4472\,\mu$, also nahe bei dem ersten Inflexionspunkte der Spektralkurve im brechbaren Teile. Strenge gelten diese Sätze nur für ein mit kontinuierlichem Spektrum leuchtendes Gas, erfahren aber bei ihrer Anwendung auf andere Körper nur geringe Modifikationen.

14. Die Lockyersche Spektralmethode.

Erteilt man in der Spektralgleichung der den einzelnen Wellenlängen entsprechenden Intensität den konstanten und beliebig kleinen Wert $L = \iota$, so kann die Formel als Gleichung zwischen μ und λ angesehen werden, welche als Kurve dargestellt, den geometrischen Ort aller jener Punkte darstellt, deren Emission soeben beginnt, oder soeben verschwindet, die also, um kurz zu reden, dem Draperschen Gesetze gleichzeitig gehorchen. Ist also μ konstant, so erhält man die Gleichung der Grenzwellenlängen des Spektrums, ist λ konstant, so die Temperatur — oder vielmehr eine Funktion derselben, bei welcher das Spektrum für den betreffenden Strahl aufhört. Stellt man nun ein Spektrum wirklich her, indem man etwa eine in ihren verschiedenen Punkten verschieden temperierte Lichtquelle untersucht (dieselbe auf den Spalt eines Spektroskopes projiziert), so wird man finden, dafs die Höhe des Spektrums für verschiedene Strahlen verschieden ist. Der Endpunkt der Höhenordinate entspricht gerade demjenigen μ, für welches die Emission verschwindet.

Lockyer, der die Methode zuerst zweckdienlich anwandte — praktisch besteht sie nur darin, dafs nicht das diffuse Licht einer Quelle, sondern deren Bild beobachtet

werde — nannte sie die Methode der langen und kurzen Linien, insofern die Spektrallinien der Gase desselben Stoffes verschiedene Hohe oder Lange besitzen Wir werden sie einfach die Lockyersche Spektralmethode nennen

Nach welchem Maſse nun die Lange eines Spektralstrahles zu messen sei, ist nach dem Gesagten unschwer zu bestimmen Irgendwelche festbestimmte Funktion der Temperatur von der Beschaffenheit, daſs sie mit wachsendem Argumente abnimmt genugt, und wir wahlen daher aus Grunden, die bei der Untersuchung der Gase klar hervortreten werden, die Funktion O^{-2} Diese Definition hat noch den Vorteil, daſs die Lange der Linie vollkommen unabhangig wird von den Dimensionen und der Entfernung der Lichtquelle und des Beobachtungsinstrumentes, was bei keiner anderen Definition der Lange der Fall ware Unter Lange eines Strahles im Spektrum verstehen wir also das inverte Quadrat jener Temperatur, fur welche der betreffende Strahl gerade unsichtbar wird Insoweit im allgemeinen das Drapersche Gesetz giltig ist, folgt daraus, daſs die Lange der Strahlen gleicher Brechbarkeit bei allen Korpern nahezu gleich ist

Wir gehen wieder von der Gleichung

$$L = \frac{4}{\pi D} \mu^4 O^4 \frac{\lambda}{(\lambda^2 + \mu^2)}$$

aus, lassen $L = \iota$ unendlich klein und konstant werden, und bezeichnen die fur alle Korper konstante Groſse

$$\frac{2}{\sqrt{\pi \iota D}} = c_1 \tag{201}$$

mit c_1 Dann laſst sich die Spektralgleichung in der Form schreiben

$$\mu^2 O^2 (O^{-2} - c_1 \lambda) + \lambda^2 = 0 \tag{202}$$

Da nun μO bei Gasen konstant ist, bei anderen Korpern aber von einer konstanten nicht mehr abweicht als dies entsprechend auch fur die spezifische Warme gilt, so kann man schreiben

$$c_2 \mu O f(O) = 1 \tag{203}$$

wo nun $f(O)$ eine Groſse darstellt, die sich nie weit von der Einheit entfernt Und da wir fanden, daſs μO mit wachsender Temperatur zunimmt, so ist $f(O)$ stets ein echter Bruch

Nach Substitution dieses Wertes in (202) erhalt man als Gleichung der Lange des Spektrums

$$O^{-2} = c_1 \lambda - c_2 \lambda^2 f(O)$$

aus welchem O^{-2} als Funktion der Wellenlange entwickelt werden kann Fur das kontinuierliche Spektrum eines Gases wird einfacher

$$O^2 = c_1 \lambda - c_2 \lambda^2 \tag{204}$$

Wir wollen nun die Bestimmung der Funktion $f(O)$ wirklich durchfuhren

Ist allgemein eine Gleichung von der Form

$$z^p - az + b = 0$$

gegeben, wobei p eine ganze positive Zahl bedeuten moge, und besteht fur die reellen Koeffizienten die Umgleichung

$$\text{val num } \frac{b^{p-1}}{a^p} < \text{val num } \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p}$$

so ist eine Wurzel der vorgelegten Gleichung der folgende Ausdruck

$$z = \frac{b}{a} + \frac{(p)_0}{1} \frac{b^p}{a^{p+1}} + \frac{(2p)_1}{2} \frac{b^{2p-1}}{a^{2p+1}} + \frac{(3p)_2}{3} \frac{b^{3p+1}}{a^{3p+1}} +$$

worin $(rp)_{r-1}$ die Binomialkoeffizienten bedeuten Fur unseren Fall, wo die Gleichung

$$(\mu\Theta)^4 - \frac{AD}{K}\frac{Q}{\Theta}(\mu\Theta) + \frac{k}{K}D = 0$$

vorliegt, bewiesen wir schon das Zutreffen der bedingenden Ungleichung, und wir haben somit:

$$\mu\Theta = \frac{k}{A}\left(\frac{\Theta}{Q}\right) + \frac{(4)_0}{1}\frac{k^4K}{A^5D}\left(\frac{\Theta}{Q}\right)^5 + \frac{(8)_1}{2}\frac{k^7K^2}{A^9D^2}\left(\frac{\Theta}{Q}\right)^9 + \frac{(12)_2}{3}\frac{k^{10}K^3}{A^{13}D^3}\left(\frac{\Theta}{Q}\right)^{13} + \cdots$$

eine Reihe, welche sehr rasch konvergiert, so daſs man nur in den seltensten Fällen wird das dritte Glied mitnehmen müssen, ja das zweite ist schon unmerklich, da der Nenner $A^5D = 175.10^{23}$ beträgt, während die übrigen Gröſsen echte Brüche bedeuten. Wir schreiben daher

$$\mu\Theta = \frac{k}{A}\left(\frac{\Theta}{Q}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (205)$$

woraus folgt:

$$c^2f(\Theta) = \left(\frac{AQ}{k\Theta}\right)^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (206)$$

und die Längengleichung wird allgemein:

$$\Theta^{-2} = c_1\lambda - \left(\frac{AQ}{k\Theta}\right)^2\lambda^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (207)$$

wo man statt $\frac{Q}{\Theta}$ auch die mit der Temperatur veränderliche spezifische Wärme einsetzen kann. Wir ersehen aus der vorliegenden Gleichung: Die Länge der Linien von unendlich kurzer Wellenlänge ist Null, und erreicht etwas weiter als $\lambda = \frac{c_1}{2c_2}$ ein Maximum. Ist $\Theta^{-2} > c_1\lambda - \left(\frac{AQ}{k\Theta}\right)^2\lambda^2$, so ist, so lange diese Ungleichung gilt, kein Spektrum sichtbar. Das Spektrum besteht also stets zwischen nahe den Wellenlängen:

$$\lambda_1 = \left(\frac{k\Theta}{AQ}\right)^2\left\{\frac{c_1}{2} - \sqrt{\frac{c_1^2}{4} - \Theta^{-2}\left(\frac{AQ}{k\Theta}\right)^2}\right\} \text{ und } \lambda_2 = \left(\frac{k\Theta}{AQ}\right)^2\left\{\frac{c_1}{2} + \sqrt{\frac{c_1^2}{4} - \Theta^{-2}\left(\frac{AQ}{k\Theta}\right)^2}\right\}$$

Wenn wir noch bemerken, daſs man diese Kurve recht deutlich sichtbar machen kann, wenn man einen Platindraht an dem einen Ende glühend macht, so daſs er von diesem Punkte ab abnehmende Temperaturen besitzt, und dessen Bild auf die Spalte des Spektroskops wirft, so können wir eine weitere Besprechung dieses interessanten Punktes uns für die Gasspektra vorbehalten, wo ja die Lockyersche Methode eigentlich ihrer wahren Bedeutung entspricht.

15. Zusammenfassung.

Wir stellen hier noch einmal die verschiedenen Formen der Spektralgleichung zusammen und erlauben uns einen kurzen Rückblick auf die Hypothesen, welche derselben zu Grunde liegen.

Bezieht man die Intensität auf die der Wellenlänge λ_0, so ist

$$L = L_0\frac{\lambda_2}{\lambda_0^2}\left(\frac{\lambda_0^2 + \mu^2}{\lambda^2 + \mu^2}\right)^2$$

Entspricht speziell λ_0 dem Maximalwerte $\lambda = \mu$, so ist:

$$L = 4\mu^2 L_\mu \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^2}$$

Führt man die totale Intensität ein, so kommt

$$L = \frac{4}{\pi} \mu \varDelta \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^2}$$

Bei Einfuhrung der absoluten Temperatur verwandelt sie sich in

$$L = \frac{4}{\pi D} \mu^4 O^4 \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^2}$$

und andere Formen von geringerer Wichtigkeit wurden noch hervorgehen, wenn man μ durch $\varDelta$ und O ersetzte, oder statt demselben die Intensitat irgend einer Spektralstelle einführte

Bei der Besprechung der Grundlagen der Spektraltheorie haben wir zwei Gesichtspunkte zu betrachten Der erste bezieht sich auf die Spektralanalyse als solche, die sich mit der expliziten Funktion der Emission durchaus begnugt, der zweite auf die Untersuchungen, durch welche die Spektralelemente zu Kennzeichen des Zustandes des emittierenden Korpers werden Da aber gerade die wichtigeren Untersuchungen beider Gebiete grofseren Teils Resultate zweier von einander unabhangiger Ableitungen sind, so mussen wir uns huten, etwa die volle Zahl der in Erwahnung kommenden Hypothesen als wirklich benutzt zu glauben

Die Spektralgleichung ist in ihrer ursprunglichen Ableitung nichts weiter als die selbstverstandliche Kontinuitatsbedingung, dafs, so lange inneres Gleichgewicht des Korpers besteht, die Amplitude der inneren Bewegung eines schwingenden Teilchens nicht grofser sein darf, als jene Entfernung, aus welcher dasselbe noch in seine Gleichgewichtslage zuruckkehren kann Bei der analytischen Behandlung des Problems sind alle jene vereinfachenden Voraussetzungen gemacht, welche in der theoretischen Optik bei Untersuchungen uber Schwingungen von Punktsystemen erlaubt erscheinen Dafs dieselben grofsenteils auch fallen gelassen werden konnen, wird sich bei der analogen Behandlung der Gasspektra zeigen Insoweit huldigen wir der Annahme diskreter Massenteilchen der Korper, mit schwingenden Bewegungen begabt

Unsere (auch der Zeit nach) zweite Ableitung hat mit dieser Annahme nichts zu schaffen Sie setzt (in dem Clausiusschen Satze) den zweiten Hauptsatz der mechanischen Warmetheorie die Kontinuitat der Spektra im (analytischen Sinne der Funktionen) und das Axiom voraus, dafs an den aufsersten Grenzen des Spektrums die Intensitat Null sein musse Übrigens ist diese Annahme, wie man sich leicht uberzeugt, nicht unumganglich notwendig, doch so selbstverstandlich, dafs man ihrer Umgehung halber nicht der grofseren Einfachheit der Ableitung zu entsagen braucht Im ubrigen ist dabei von Wellenlange und Intensitat nicht die Rede, wir konnen diese zwei Grofsen, was sie auch im Grunde bedeuten mogen als zwei Variabele betrachten, welche den qualitativen und quantitativen Unterschieden in den Spektra Rechnung tragen

Nimmt man endlich die Kettelersche Dispersionsgleichung das Resultat einer streng kritischen Untersuchung und nachfolgender theoretischer Begrundung an, die wie wir wissen, die Refraktionsbestimmungen selbst bei anomaler Dispersion genauer wiedergeben, als irgend eine andere zu diesem Zwecke ersonnene Formel, so geht unter Benutzung des Clausiusschen Satzes (des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Warmetheorie) wieder unsere Spektralgleichung hervor

In Bezug auf die Parametergleichungen haben wir zu bemerken

Das Drapersche Gesetz ist zunachst unmittelbare Folgerung aus dem Kirchhoffschen Gesetze, und als solches streng richtig Dasselbe gilt fur den spektralanalytischen Ausdruck desselben, so lange wir Korper von gleicher Temperatur haben, d h

so lange wir die Temperatur nicht explizite einführen. Die (auch der Entstehung nach) erste Ableitung desselben als expliziter Temperaturfunktion ist allerdings hypothetischer Natur, indem wir nicht nur die Körper als System diskreter Massenteilchen betrachten, sondern sogar gezwungen sind ein ganz bestimmtes Gesetz ihrer inneren Bewegung anzunehmen. Man hätte, wie der Erfolg zeigt, auch direkt das Stefansche Strahlungsgesetz annehmen können, von welchem wir — ohne jedoch näheres darüber erfahren zu können — hörten, daſs es als Konsequenz der kinetischen Gastheorie herstellbar sei. Glücklicherweise kommt uns da die III. Parametergleichung zu Hilfe, welche wieder nichts anderes ist, als ein veränderter Ausdruck des zweiten Satzes der mechanischen Wärmetheorie, und welche wenigstens für Gase ganz genau dieselbe explizite Temperaturfunktion fordert, wie das Drapersche Gesetz. Ist dasselbe aber überhaupt für einen Körper nachgewiesen, so gilt es für alle. Die zweite Parametergleichung ist nur eine mathematische Transformation der Spektralgleichung, und die IV. ist ein integrierender Bestandteil der dritten. Allgemein giebt sie die innere Arbeit eines Körpers — ohne Zuhilfenahme von besonderen Anschauungen über die Natur der inneren Kräfte — im besonderen aber auch die ganze geleistete äuſsere Arbeit, wenn die ausdrückliche Bedingung eingehalten ist, daſs die innere Arbeit stets in einer äuſseren ihr Äquivalent findet.

Fassen wir noch einmal zusammen, so können wir behaupten, daſs die neue Theorie unter folgenden Annahmen besteht:

1. Das Spektrum besitzt von einander unabhängige quantitative und qualitative Unterschiede, die kontinuierlich aufeinander folgen.
2. Die Emission aller absolut schwarzen Körper ist bei derselben Temperatur und demselben qualitativen Unterschiede dieselbe.
3. Die Wärme geht nicht von selbst von einem kältern zum wärmeren Körper über.

16. Verwandte Spektraltheorien.[1]

Bevor wir die Theorie der kontinuierlichen Spektra abschlieſsen, um auf den allgemeineren und schwierigeren Fall der diskontinuierlichen Spektra überzugehen, möge es noch erlaubt sein, einiges über ähnliche Versuche, die Spektralanalysis auf mathematischer Grundlage aufzubauen, vorzubringen.

a) Die ersten Versuche, hauptsächlich in der Richtung angestellt, um das Spektrum als Funktion der Temperatur zu erhalten, wobei die Wellenlänge nur als implizites Element erscheint, und mehr durch Versuche empirisch in die Formeln hineingebracht wird, rühren unseres Wissens von E. Becquerel[2] und Zöllner[3] her. Wir erwähnen Becquerel zuerst, da seine Theorie, auf der Dulong-Petitschen Strahlungsformel beruhend, die allgemeinere ist. Seine Formel lautet:

$$L = a(e^{b(\Theta - \Theta_0)} - 1)$$

wo a eine absolute Konstante, Θ_0 die Temperatur des Beginnes der Lichtemission, und b eine von der Wellenlänge abhängige Konstante bedeutet. Aus Becquerels zahl-

---

[1] Vorgelegt der Königl. ungar. Akad. d. Wissensch. vom o. M. Prof. Dr. J. Fröhlich im Dez. 1887.

[2] La lumière. Paris 1867. T. I. p. 82.

[3] Photom. Untersuch. Basel. 1859.

reichen Versuchen, die sich übrigens dieser Exponentialformel willig anschmiegen, scheint mit ziemlicher Sicherheit zu folgen, daſs b der Wellenlänge umgekehrt proportional sich ändere. Daraus folgt aber für unendlich kurze Wellen unendlich groſse Intensität, (für $\lambda = \infty$ giebt die Formel richtig $L = 0$), was allen unseren Erfahrungen widerspricht.

Übrigens beweist ja der Exponent $\Theta - O_0$, daſs es nur auf die Darstellung von subjektiven Spektra hinausläuft, da ja unterhalb der Temperatur O_0 die Intensität sogar negativ wird.

Die Zöllnersche Formel

$$L = a e^{cw}$$

in welcher a und c Konstante, und w die Wärmemenge bedeutet, welche die Intensität L hervorbringt, kann als Spezialfall der Becquerelschen angesehen werden — obwohl sie natürlich ihrer Entstehung nach davon ganz unabhängig ist. c enthält die Wellenlänge, und zwar wie es scheint, in direktem Verhältnisse. Es folgt daraus, da sich c positiv ergiebt, für $\lambda = \infty$ unendlich groſse, für $\lambda = 0$ endliche Intensität. In Bezug auf die Wellenlänge leistet also die Formel noch weniger als die vorher besprochene. Innerhalb der Versuchsreihe ist jedoch die Darstellung eine ganz befriedigende. Die Bestimmung von c für rotes und grünes Licht giebt nämlich unter anderem

$$c = \frac{\lg L}{w} = \begin{array}{rr} 0.5717 & 0.5562 \\ 5653 & 5709 \\ 5669 & 5725 \\ 5678 & 5714 \end{array} \qquad c = \frac{\lg L}{w} = \begin{array}{rr} 0.4210 & 0.4933 \\ 4470 & 5136 \\ 4815 & 5197 \\ 4880 & 5265 \end{array}$$

und zeigen wohl zur Genüge, daſs man bei Berechnung eines Spektrums mit bloſsen Interpolationsformeln ganz beträchtliche Annäherungen erhalten kann. Mit Rücksicht auf ihre prinzipiellen Widersprüche werden wir aber diese Formeln nicht weiter besprechen. Ebenso können wir von den Spektralgleichungen absehen, welche in den Dispersionsformeln liegen, und die mit Cauchy ihren Anfang nehmen, da an die Identität beider Gleichungen damals noch niemand dachte, wir daher für die Spektralanalyse selbst nichts gewinnen.

b) Dagegen verdient eine neue Arbeit von Wladimir Michelson[1] vollste Beachtung, schon deshalb weil sie auf einer anderen Basis beruht, und die wahrscheinlichste Verteilung von durchschnittlich gleichen Amplituden zum Ausgangspunkte nimmt, während wir die Ansicht wesentlich verschiedener Amplituden verfechten. Wenn noch erwähnt wird, daſs unsere ersten Bemühungen insbesondere zur Erklärung der Absorption und der Erbreiterung der Linien denselben Standpunkt einnahmen, wobei wir jedoch weit hinter Michelson zurückblieben, so können wir auf eine nähere Besprechung dieser Theorie eingehen.

Michelson faſst die Schwingungen der kleinsten Teilchen auf, als ob sie in unendlich kleinen elastischen Hohlkugeln vom Radius ϱ, deren Mittelpunkt mit der Gleichgewichtslage der Teilchen zusammenfällt, vor sich gingen. Dadurch ist das Problem auf das der elastischen Stoſse zurückgeführt, und kann direkt den Maxwellschen Gleichungen angepaſst werden.

---

[1] Journ de la Soc Phys Chim Russe XIX No 4 p 79 1887

[2] Astr Nachr 2585 p 302

Suchen wir nun unter der Annahme, daſs die Lage der Teilchen in ihren Hohlkugeln einmal bloſs nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit bestimmt war, die von denselben wahrscheinlich durchlaufenen Bahnen.

Fig. 17.

Sei (Fig. 17), während ON die Polaraxe darstellt, das Teilchen im Punkte M in der Entfernung r vom Mittelpunkte der Kugel, und seine Bahn bilde mit der Axe den Winkel φ. Nimmt man, wie dies auch in der Gastheorie Sitte ist, an, daſs alle Bewegungsrichtungen gleichmäſsig vertreten sind, so ist die Wahrscheinlichkeit, daſs die Bahnrichtung mit der Axe einen zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ liegenden Winkel bilde

$$\tfrac{1}{2} \sin \varphi \, d\varphi$$

Bezeichnet δ den Inzidenzwinkel, so ist

$$r \sin \varphi = \varrho \sin \delta$$

Da sowohl φ als $\pi - \varphi$ derselbe Wert von δ entspricht, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daſs ein ursprünglich in der Entfernung von r bis $r + dr$ vom Mittelpunkte gelegenes Teilchen die Oberfläche seiner Kugel unter einem zwischen δ und $\delta + d\delta$ begriffenen Winkel trifft:

$$\sin \varphi \, d\varphi = \frac{\varrho^2}{r^2} \frac{\sin \delta \cos \delta \, d\delta}{\sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{r^2} \sin^2 \delta}}$$

und eben diese Wahrscheinlichkeit erhalten wir für ein jedes Teilchen, wenn wir den Ausdruck mit $\frac{dr}{\varrho}$ der Wahrscheinlichkeit, daſs ein Teilchen zwischen r und $r + dr$ vom Centrum seiner Kugel abstehe, multiplizieren, und über alle zu einem gegebenen δ gehörigen r integrieren. Dies ergiebt:

$$w_\delta = \int_{\varrho \sin \delta}^{\varrho} \frac{\varrho}{r^2} \frac{\sin \delta \cos \delta \, d\delta \, dr}{\sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{r^2} \sin^2 \delta}} = \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \cos \delta \, . \, d\delta$$

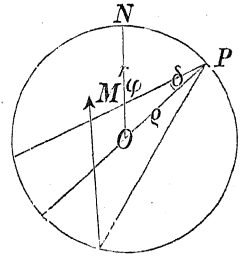
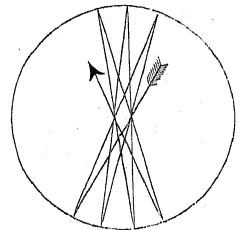
Fig. 18.

Es ist klar, daſs diese Wahrscheinlichkeit für $\delta = 0$ ein Maximum besitzt, d. h. diejenigen Bahnen sind die wahrscheinlichsten, welche nahezu durch den Mittelpunkt der Kugeln gehen. Die Bewegung eines Teilchens im Inneren der Hohlkugel wird sich daher so gestalten, wie es die nebenstehende Figur versinnlicht.

Wenn man annimmt, daſs sich eine jede periodische Bewegung des Teilchens dem Äther als Welle mitteilt, und daſs, da die eben beschriebenen diametralen Trajektorien die häufigsten und daher wahrscheinlich auch die intensivsten sein werden, gerade diese das Spektrum konstituieren, so hat man als Gleichung der Schwingungszeit τ:

$$\tau = \frac{4\varrho}{v} \qquad \qquad (208)$$

wo v die momentane Geschwindigkeit des Teilchens bedeutet.

Nun sind wir so weit vorgeschritten, um die **Maxwell**sche Gleichung benutzen zu können. Sie giebt bekanntlich die wahrscheinlichste Verteilung der lebendigen Kraft eines Systems von irgend welchen Punkten, die mit Hilfe von Kräften, welche ein Potential besitzen, stetig ihre Geschwindigkeiten auswechseln. Bezeichnet also N die

Anzahl aller Atome, m die Masse des einzelnen, k die Konstante $\frac{3}{2mv_0^2}$ so ist nach Maxwell die Zahl der Atome, welche die Geschwindigkeit v bis $v+dv$ besitzen

$$\nu_v = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} (km)^{\frac{3}{2}} e^{-kmv^2} v^2 dv \tag{209}$$

Setzt man hierin aus Gleichung (208) den Wert von v ein, so kommt

$$\nu_\tau = \frac{256N}{\sqrt{\pi}} \varrho^3 (km)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{16km\varrho^2}{\tau^2}} \tau^{-} dt \tag{210}$$

Diese Formel giebt die Zahl der Atome, deren Hauptperiode zwischen τ und $\tau+dt$ liegt

Wegen der Superposition der Schwingungen kann man annehmen, dafs die Intensitat der Schwingungen von der einfachen Dauer proportional sein mufs 1 der Zahl ν_τ der Teilchen, welche dieselbe Periode besitzen, 2 einer Funktion der lebendigen Kraft dieser Teilchen Wegen der Gleichung (208) und dem grofsen Werte von $\frac{1}{\tau}$ fur alle in Betracht fallenden Schwingungen kann diese Funktion auf eine Potenz von $\frac{1}{\tau^2}$ reduziert werden 3 Endlich einer Funktion der Temperatur Diese Funktion stellt einen Faktor dar, welcher die mittlere Schwachung oder Verstarkung der einzelnen primitiven Wellen ausdruckt, welche durch das Zusammenwirken der ubrigen hervorgebracht werden Ebenso soll der Faktor auch der im Innern des Korpers stattfindenden Absorption Rechnung tragen Diese Funktion moge mit $f(O)$, wo O die absolute Temperatur, bezeichnet werden

Sind also A und p positive Konstanten, so kann man schreiben

$$L = A\nu_\tau \left(\frac{1}{\tau^2}\right)^p f(O) \tag{211}$$

Ist, wie man gewohnlich annimmt, die absolute Temperatur proportional der lebendigen Kraft des Atomes, so kann in (210) statt k $\frac{M}{O}$ gesetzt werden wo M von O unabhangig ist Fuhrt man endlich noch Wellenlangen ein, indem man die Lichtgeschwindigkeit mit c bezeichnet, und setzt

$$\left.\begin{aligned} \frac{256}{\sqrt{\pi}} AN\varrho^3 (Mm)^{\frac{3}{2}} c^{2p+3} &= B \\ 16\varrho^2 Mmc^2 &= C \end{aligned}\right\} \tag{212}$$

so kommt

$$L\,d\lambda = B\Theta^{-\frac{3}{2}} f(O)\, e^{-\frac{C}{O\lambda^2}} \lambda^{-(2p+4)} d\lambda \tag{213}$$

Gegen ein solches Gesetz mufs nach Michelson die Verteilung der Energie im Spektrum zustreben, wenn die Kontinuitat immer vollkommener wird Obwohl p und $f(O)$ noch unbestimmt sind, gelingt es doch, einige Aufschlusse zu abstrahieren, die sich folgendermafsen zusammenfassen lassen

Zunachst enthalt das Gesetz als spezielle Falle alle Strahlungsformeln, die bisher aufgestellt wurden, die Newtonsche Dulong' und Petitsche und die Stefansche Fur die Grenzen des Spektrums $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ wird L sowohl als $\frac{dL}{d\lambda}$ gleich Null Aber wahrend die Intensitat gegen die violette Seite fast plotzlich verschwindet, wegen

der schnellen Abnahme von $e^{-\frac{C}{\Theta\lambda^2}}$, ist die Abnahme gegen Rot eine sehr langsame. Diese Thatsache ist sattsam bekannt.

Bezeichnet μ die Wellenlänge des Intensitätsmaximums, so hat man:

$$\mu = \sqrt{\frac{C}{p+2}} \frac{1}{\sqrt{\Theta}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (214)$$

Das heifst: die Wellenlänge des Maximums hängt nur von der Temperatur ab und ist der Quadratwurzel aus der absoluten Temperatur proportional. Michelson drückt diesen Satz folgendermafsen aus: Welches auch das Ausstrahlungsgesetz sein mag, die Wellenlänge des Intensitätsmaximums ist umgekehrt proportional der Quadratwurzel der absoluten Temperatur.

Aus einigen Beobachtungen Langleys folgt:

$\Theta = 451^0$	$\mu_0 = 0.490$	$\Theta.\mu^2 = 108.28$
603	405	98.91
798	363	105.15
1088	327	116.34

was nicht eben gegen das Gesagte spräche. Leider ist aber die Ausdehnung der Beobachtungen für verschiedene μ_0 zu gering.

Integriert man (213) zwischen den Grenzen 0 und ∞, so erhält man die Totalenergie, die wir ebenfalls mit $\varDelta$ bezeichnen. Sie stellt sich dar unter der Form:

$$\varDelta = \tfrac{1}{2} B\, e^{-(p+\frac{3}{2})} \Gamma(p+\tfrac{3}{2}) f(\Theta) \Theta^p \quad \ldots\ldots\ldots (215)$$

wo Γ das Zeichen der Gammafunktion bedeutet.

Bildet man nun die Maximalintensität L_0, so erhält man hierfür:

$$L_0 = B \left(\frac{p+2}{Ce}\right)^{p+2} f(\Theta) \,.\, \Theta^{p+\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots (216)$$

und diese unterscheidet sich, abgesehen von Konstanten, nur dadurch von der Totalintensität, dafs sie den Faktor $\sqrt{\Theta}$ einmal mehr enthält. Daher vergröfsert sich die Maximalintensität mit der Temperatur viel rascher, als die Totalintensität selbst. Bildet man endlich das Verhältnis

$$\frac{L_0 \mu}{\varDelta} = \frac{2(p+2)^{p+\frac{1}{2}}}{\Gamma(p+\frac{3}{2})} e^{-(p+\frac{1}{2})} e^{-\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (217)$$

so erhält man den Satz, dafs der Flächenraum einer jeden Spektralkurve direkt proportional ist dem Rechtecke aus den Koordinaten des Kulminationspunktes. Das Verhältnis hängt nur von p ab, welches wahrscheinlich für alle Stoffe das gleiche ist, denn in unseren Gleichungen ist das der Wert, welcher aussagt, wie die ponderabelen Atome auf den umgebenden Äther wirken.

Aus Beobachtungen Langleys findet Michelson teilweise durch graphische Reduktion:

$\Theta = 451$	$\mu = 0.490$	$L_0 = 5.2$	$\varDelta = 182$	$\frac{L_0\mu}{\varDelta} = 0.0140$
603	405	21.5	532	0163
798	363	39.7	1074	0134
1088	327	64.9	1730	0123

Bei den Unvollkommenheiten der Methoden wird die Übereinstimmung eine befriedigende genannt werden müssen.

Michelson versucht dann die Temperaturfunktion so zu bestimmen, daſs die Ausstrahlung durch das Stefansche Gesetz dargestellt werde. Für diesen Fall folgt aus (215)

$$p = 1, \; f(O) = KO^3 \tag{218}$$

also auch

$$L = BK\, O^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{C}{O\lambda^2}} \lambda^{-6} \tag{219}$$

Die Schlüsse, welche aus diesem Gesetze wirklich gefolgert werden, sind: Die Intensitäten nehmen nach beiden Seiten rasch ab, rascher aber gegen Violett. Wird die Temperatur höher, so wachsen alle Intensitäten, aber in sehr verschiedenem Maſse, die brechbareren Wellenlängen nehmen rascher an Intensität zu. Daher kommt auch die Beobachtungsthatsache, daſs sich die Wellenlänge des Intensitätsmaximums mit wachsender Temperatur gegen Violett verschiebt. Weder das prismatische, noch das normale Spektrum sind symmetrische Kurven, der gröſsere Flächenteil liegt auf der Seite der längeren Wellen.

Michelson zeichnet noch zur Vergleichung die Kurve des Sonnenspektrums, wir bemerken hierbei bloſs, daſs von der Wellenlänge 0.92 ab die objektive Intensität kleiner ausfällt, als die subjektive.

c) Soweit sind wir durchaus Michelson gefolgt. Jetzt wollen wir die Konstante p noch auf einem anderen Wege bestimmen, um die neue Formel neben der unter (219) gegebenen mit den genaueren Messungen Moutons zu vergleichen, die wir bereits auf ein objektives Spektrum reduzieren konnten, und dann eine Gegeneinanderstellung beider Theorieen zu untersuchen.

Wir setzen voraus — ob dies erlaubt, wird sich später zeigen — daſs die Michelsonsche Emissionsgleichung dem Clausiusschen Gesetze gehorche. Dann muſs $p = -1$ gewählt werden, und die Gleichung wird, wenn die Intensität auf die maximale bezogen wird

$$L_1 = L_0 \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 e^{-\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2} \tag{220a}$$

während (219), ebenfalls auf die Maximalintensität bezogen, giebt

$$L_2 = L_0 \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^6 e^{-3\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2} \tag{220b}$$

wobei die Indizes an den Intensitäten zur Unterscheidung der beiden Formeln gewählt werden.

Die folgende Tabelle giebt für die beigeschriebenen Wellenlängen die Moutonschen Beobachtungen I, das objektive Spektrum L_1 für $p = -1$, das objektive Spektrum L_2 für $p = +1$ und zur Vergleichung das aus unserer Theorie sich ergebende L_3. L_1s, L_2s, L_3s sind die entsprechenden subjektiven[1] Spektra, die mit I harmonieren sollen.

λ	I	L_1	L_2	L_3	L_1s	L_2s	L_3s
0.431	0.030	0.000	0.000	0.272	0.000	0.000	0.045
0.486	050	001	000	333	000	000	074
0.526	072	005	000	378	000	000	098
0.589	125	022	001	450	007	000	140
0.655	201	063	003	524	023	001	190
0.760	314	191	007	635	089	003	295
0.900	471	436	083	764	250	048	438
1.150	739	820	550	923	650	437	733
1.305	896	945	844	975	881	786	908

[1] Über die Bestimmung von s auch für diesen Fall siehe Gleichung (19) des folgenden Abschnittes IV.

λ	I	L_1	L_2	L_3	$L_1 s$	$L_2 s$	$L_3 s$
1.400	0.962	0.983	0.950	0.992	0.963	0.931	0.971
1.500	0.997	1.000	0.999	1.000	999	999	1.000
1.530	1.000	1.000	1.000	1.000	999	999	0.999
1.610	0.975	0.995	0.986	0.997	979	970	980
1.750	849	968	907	982	874	819	887
1.850	751	938	825	965	763	671	784
1.980	607	893	713	936	599	478	628
2.140	408	834	579	895	396	275	425

Man ersieht daraus, daſs die eigentliche Michelsonsche Formel (220b) ganz verwerfliche Werte liefert, daſs dagegen nach unserer Bestimmung von p (220a) die Übereinstimmung in der Nähe des Maximums nicht nur bemerkenswert, sondern sogar besser ist, als in unserer Gleichung. Dagegen bemerken wir ein rasches Zurücktreten der Kurve $L_1 s$ an den Grenzen des Spektrums und bis zu der Wellenlänge 0.9 die kleineren Werte der Kurve L_1 gegenüber der subjektiven Kurve I[1]. Die Summe der Fehlerquadrate ist für $L_1 s$: $\sum v^2 = 0.1627$, für $L_2 s$: $\sum v^2 = 0.3652$, für $L_3 s$: $\sum v^2 = 0.0068$.

Auf Grund unserer Besprechung der Michelsonschen Spektralgleichung können nun als allgemeine Resultate die folgenden hingestellt werden:

Die Intensitätskurve der Michelsonschen Theorie hat trotz des steileren Maximums Ähnlichkeit mit der sich aus unserer Theorie ergebenden; insbesondere stimmen die Sätze überein, daſs die Wellenlänge des Intensitätsmaximums nur Funktion der Temperatur sei; daſs die Intensität mit ihrem ersten Differentialquotienten für die Grenzen des Spektrums verschwinde, und daſs die Fläche der Intensitätskurve proportional sei dem Rechtecke der Kulminationspunktskoordinaten.

Der Satz, daſs die Wellenlänge des Intensitätsmaximums der Quadratwurzel aus der absoluten Temperatur proportional sei, scheint uns aber hauptsächlich deswegen unmotiviert zu sein, weil ja die Gröſse c, die in der betreffenden Formel vorkommt, in ϱ^2 die Amplitude der Bewegung enthält, einer Gröſse, deren Unabhängigkeit von der Temperatur nicht so evident sein dürfte. Nicht zu gedenken des Umstandes, daſs die Einführung der Potenz λ^{2p} die Kleinheit der Wellenlänge bedingte. Allein das Hauptbedenken liegt unserer Ansicht in dem Umstande, daſs die Gleichung des Spektrums schon ihrer Form nach nicht fähig ist, das Clausiussche Gesetz darzustellen. Dieses erfordert zunächst eine algebraische Form der Spektralgleichung; sodann sollen die Parameter nicht auf ein und dieselbe Weise verknüpft vorkommen. Hier ist aber nach (212)

$$B = \frac{16}{\sqrt{\pi}} A N \varrho (Mm)^{\frac{1}{2}} c^{p+1} . C$$

diese Bedingung nicht eingehalten. Endlich aber enthält die Formel nicht eigentlich Wellenlängen, sondern Schwingungsperioden, die von der Natur des umgebenden Mittels bekanntlich unabhängig sind.

Wollte man aber dieses alles nicht berücksichtigen, und das Clausiussche Gesetz, wie wir es gethan, wenigstens formell einführen, so gelangt man allerdings zu einer Formel, welche in der Nähe des Maximums einer ausgezeichneten Darstellung der Spektralverhältnisse fähig ist, während die eigentliche Form Michelsons zu verwerfen ist, die aber nicht mehr derjenigen Bedeutung entspricht, die ihr ihr Urheber zu Grunde

---

[1] Vergl. bezüglich die Kurven $L_1 s$ und $L_3 s$ auf den Tafeln II und I.

gelegt. Ist nämlich $p = -1$, in welchem Falle die gute Übereinstimmung hervorgebracht wurde, so wäre die Intensität eines Strahles umgekehrt proportional seiner lebendigen Kraft, was wohl allgemein als Unmöglichkeit wird anzusehen sein.

Wir müssen daher die Michelsonsche Spektralgleichung als eine in der Nähe des Intensitätsmaximums selbst in der mehrfachen Ausdehnung (nach der vorstehenden Tabelle der zweifachen) des sichtbaren Spektrums ausgezeichneten Interpolationsformel definieren.

Gerade für absolut schwarze Körper sollte Michelsons Gesetz in ausgezeichneter Weise gelten, da ja diese die Spektra der vollkommensten Kontinuität bilden. Man erhielte also, wenn für einen absolut schwarzen Körper J an Stelle von C tritt, als Absorptionsgleichung die folgende

$$A = 1 - \mathfrak{A}\, e^{-\frac{C - J}{\vartheta \lambda^2}},$$

worin $\mathfrak{A}$ eine Konstante ist, die, wie man leicht sieht, die Absorption im Punkte $\lambda = \infty$ darstellt. Da die Absorption mit wachsender Wellenlänge abnehmen muſs, so ist $C < J$ und es wäre somit $A = \infty$ für $\lambda = 0$, während doch in der That A die Grenzen 0 und 1 nicht überschreiten kann. Wir haben auch hierin einen Beweis gegen die allgemeine Zulässigkeit der hier eingehend besprochenen Gleichung.

Ich fürchte nicht, in meinem Urteile vielleicht etwas zu scharf Herrn Michelson gekränkt zu haben. Ich gestehe offen, daſs ich im Monat Oktober des Jahres 1886, da ich noch die Identität von Spektral- und Dispersionsgleichung nicht kannte, mich glücklich geschätzt hätte, neben der Spektralgleichung eine Interpolationsformel dafür zu besitzen. Allerdings war ich auch aus der Maxwellschen Gleichung der wahrscheinlichsten Verteilung durchschnittlich gleicher Amplituden ausgegangen, war aber in meinen Erfolgen so wenig glücklich, daſs ich den Versuch auf sich beruhen lassen muſste. Wir schulden Herrn Michelson daher aufrichtigen Dank, daſs er die zweite Methode einer Ableitung der Spektralgleichung übernahm und glücklich alles entzifferte, was sich aus der Maxwellschen Gleichung für die Spektralanalyse überhaupt gewinnen lieſs.

II. Theorie der diskontinuierlichen Spektra.[1]

Sucht man das Ziel der Spektralanalyse in der Erforschung der Zustandsvariabelen oder auch nur in der Ergründung der Stoffbeschaffenheit der emittierenden Materie, so kann die entwickelte Theorie ohne Betrachtung der Gasspektra nicht bestehen, während für die bloſse Erforschung des Emissionsgesetzes die groſse Allgemeinheit der Gasspektralanalyse eher hindernd wirkt.

Der Unterschied der Gas- und kontinuierlichen Spektra besteht — von Äuſserlichkeiten abgesehen — hauptsächlich darin, daſs erstere mit groſser Energie auf Druckverschiedenheiten und geringe Modifikationen der Stoffbeschaffenheit reagieren, was den Spektra der festen Körper so wenig eigen ist, daſs man gewaltige Fehler beginge, wollte

[1] Vorgelegt der ung. Akad. der Wiss. am 16. Mai 1887 vom Ehrenmitgl. N. v. Konkoly.

man aus deren Emission auf ihren Druck schliefsen, während andrerseits aber auch die allgemein verbreitete Ansicht, als sei ein fester Körper unfähig seiner Natur in seiner Strahlung Ausdruck zu verleihen, auf Irrtum beruht.

Die Grundlagen, auf welche wir uns hier stützen, sind durchaus dieselben, die wir in der Theorie der kontinuierlichen Spektra benutzten. Auch an den Methoden wollen wir nichts ändern und zuerst jene anführen, die bei der Ableitung der Resultate wirklich benutzt wurden, um dann auf die später gefundenen überzugehen, welche uns von den Voraussetzungen über unsere Anschauungen von Äther und Materie unabhängig machen.

Wir beginnen — seiner Wichtigkeit halber bei späteren Untersuchungen — in einigem Widerspruch mit der Überschrift mit den kontinuierlichen Spektra der Gase. Wir werden nach Erledigung dieser Frage den Lauf der Untersuchungen nicht mehr zu unterbrechen brauchen.

17. Das kontinuierliche Spektrum der Gase.

Das charakteristische Linienspektrum der Gase erscheint gewöhnlich auf einem schwach leuchtenden Hintergrunde, der bei vergröfserter Stoffmenge in ein leicht zu beobachtendes kontinuierliches Spektrum übergeht. Dafs ein solches immer — also auch bei tieferen Temperaturen — besteht, beweist die allgemeine stets nachweisbare Absorption der Gase. Wenn wir das Zustandekommen desselben auch nicht gerade dem Einflusse der Molekularbewegung zuschreiben — soviel ist gewifs, dafs dafür dieselben Gesetze bestehen, wie für die kontinuierlichen Spektra überhaupt.

Indem wir bezüglich der Ableitung der Wellenlänge und der Polarisationsrichtung auf die Entwickelungen der Schwingungstheorie verweisen, gehen wir gleich auf die Herleitung der Intensität über. Wir thun dies, indem wir das Gleichungssystem (89) jetzt unter Beibehaltung der Gröfse ε lösen. Da dieses die auf die Masseneinheit bezogene Kraft war, welche man dem Molekularsysteme zuführen mufste, um dasselbe aus dem momentanen Zustande in das Stadium vollständiger Dissoziation zu überführen, so erhalten wir einen absoluten Ausdruck für die Intensität. Aus dem System (89)

$$\left.\begin{array}{l} 0 = -\alpha_1\sigma_1^2 + \alpha_2 p + \alpha_3 p + \cdots + \alpha_n p + \varepsilon \\ 0 = \alpha_1 p - \alpha_2\sigma_2^2 + \alpha_3 p + \cdots + \alpha_n p + \varepsilon \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ 0 = \alpha_1 p + \alpha_2 p + \alpha_3 p + \cdots - \alpha_n\sigma_n^2 + \varepsilon \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (221)$$

folgte durch Subtraktion der m-ten und n-ten Gleichung:

$$\alpha_n(\sigma_n^2 + p) = \alpha_m(\sigma_m^2 + p) \quad \ldots\ldots \quad (222)$$

Schreibt man nun die m-te Gleichung in der Form

$$p\sum_1^n \alpha_n + \varepsilon = \alpha_m(\sigma_m^2 + p) \quad \ldots\ldots \quad (223)$$

die hervorgeht, wenn man auf beiden Seiten $\alpha_m p$ addiert, und substituiert alle α_n durch ihre in α_m und σ_m^2 ausgedrückten Gröfsen, so kommt:

$$\alpha_m(\sigma_m^2 + p)\left[1 - p\sum_1^n \frac{1}{\sigma_m^2 + p}\right] = \varepsilon \quad \ldots\ldots \quad (224a)$$

was man, da n unendlich grofs ist, und alle σ und α stetig aufeinanander folgen, auch in Form eines Integrales schreiben kann:

$$\alpha_m(\sigma_m^2+p)\left[1-p\int_0^\infty \frac{d\sigma}{\sigma_n^2+p}\right] \tag{224b}$$

Druckt man p durch μ aus, und führt wieder Wellenlängen ein, so kommt als Gleichung der Intensität

$$L=\frac{m}{4}\,\frac{\mu^4\lambda}{(\lambda^2+\mu^2)}\,\frac{\varepsilon^2}{\left(2\pi c-\frac{2\pi^3 c}{\mu}\right)^2} \tag{225}$$

wo c die Lichtgeschwindigkeit und m die Masse eines Teilchens mit der mitschwingenden Ätherhülle bedeutet. Zur Bestimmung von ε benutzen wir das Drapersche Gesetz, wir finden so

$$\frac{m}{4}\,\frac{\varepsilon^2}{\left(2\pi c-\frac{2\pi^3 c^2}{\mu}\right)}=\frac{4}{\pi D}\,O^4 \tag{226}$$

so dafs die Kraft, welche den momentanen Zustand in einen Dissoziationszustand verwandelt, abgesehen von dem im Nenner stehenden μ, proportinal dem Quadrate der momentanen Temperatur ist.

Wir haben diese Formel, die ja wegen der Unkenntnis von ε nicht zu verwenden ist, hauptsächlich deshalb abgeleitet, um zeigen zu können, dafs die Spektralgleichung vom Drucke oder der Stoffmenge unabhängig ist. Zu dem Ende bilden wir den Absorptionskoeffizienten, wobei c sich auf einen absolut schwarzen Körper beziehen mag, und nehmen an, derselbe beziehe sich auf die Stoffmenge q. Dann hat man von absoluten Konstanten abgesehen

$$\frac{\mu^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}\right)\left(\frac{1-\frac{\pi^2 c}{m}}{1-\frac{\pi^2 c}{\mu}}\right)^{\frac{\varepsilon}{c}} = 1-\left[1-\frac{\mu^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}\right)^2\right]^q$$

Da ein schwarzer Körper in Bezug auf die Stoffmenge nicht reagiert, ist c konstant zu nehmen und so sieht man, ohne die Gleichung weiter zu entwickeln, dafs sie überhaupt nur bestehen kann, wenn ε zugleich Funktion der Wellenlänge ist. Da das aber ausgeschlossen ist, so ist die Gleichung überhaupt falsch. ε enthält den Druck nicht, und kann ihn nur dann ausdrücken, wenn er, wie es die rechte Seite angiebt, Exponent der Absorptionsfunktion ist.

Für den Fall der Gase, bei welchen der Absorptionskoeffizient stets klein zu sein pflegt, wird es nun angezeigt sein, eine Entwickelung der in (192) mit $f(q)$ bezeichneten Funktion zu geben. Man erhält

$$f(q)=\frac{4}{\pi}\mu\sum_1^\infty{}_r\,(-1)^{r-1}\frac{q(q-1)\ldots(q-r+1)}{r!}\left(\frac{\mu}{m}\right)^{(r-1)}\int_0^\infty\frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu^2)^r}(\lambda^2+m^2)^{2(r-1)}\,d\lambda \tag{227a}$$

und wenn man auch $(\lambda^2+m^2)^{2r-2}$ entwickelt

$$f(q)=\frac{4}{\pi}\mu\sum_1^\infty{}_r\,(-1)^{r-1}\frac{q(q-1)\ldots(q-r+1)}{r!}\left(\frac{\mu}{m}\right)^{4(r-1)}$$

$$\sum_0^{2r-2}{}_s\,\frac{(2r-2)\ldots(2r-2-s+1)}{s!}\,m^{2s}\int_0^\infty\frac{\lambda^{4r-2s}}{(\lambda^2+\mu^2)^{2r}}\,d\lambda \tag{227b}$$

Durch die Substitution

$$\frac{\lambda}{\mu} = \operatorname{tg} \varphi$$

findet man leicht:

$$\int_0^\infty \frac{\lambda^{4r-2s-2}\, d\lambda}{(\lambda^2+\mu^2)^{2r}} = \frac{1}{\mu^{2s+1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2s}\varphi\, d\varphi}{\sin^{2s+2}\varphi}$$

das sich nun nach bekannten Methoden weiterreduzieren läſst. Unter der bei Gasen im allgemeinen gerechtfertigten Annahme, daſs die dritte Potenz des Absorptionsvermögens verschwinde, läſst sich $f(q)$ einfach bestimmen. Das erste Integral ist einfach $\frac{\pi}{4\mu}$, und das zweite nach den Entwickelungen von (187) $\frac{m^4+2m^2\mu^2+5\mu^4}{4.2^3\mu^5}\cdot\pi$, so daſs man erhält:

$$f(q) = q\left\{1 - \frac{1+2\frac{\mu^2}{m^2}+5\frac{\mu^4}{m^4}}{16}(q-1)\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (228)$$

18. Verallgemeinerte Ableitung der Spektralgleichung.

a) In der Lehre von den Schwingungen eines aus diskreten Massenteilchen bestehenden Systemes sahen wir, daſs die lebendige Kraft des ganzen Systems gleich ist der Summe der lebendigen Kräfte der einzelnen Schwingungen. Spektralanalytisch gedeutet besagt das, daſs die vorkommenden n Schwingungen so auf die einzelnen Massenteilchen verteilt werden können, daſs jedem derselben eine, und zwar eben seine charakteristische Schwingung zukomme. So können wir nun auf die Schwingungen unmittelbar das Prinzip der Erhaltung der Körpereigenschaften anwenden.

Legen wir durch den Schwerpunkt der Molekel den Anfangspunkt eines rechtwinkeligen Koordinatensystems, so wird die Kraft, mit welcher ein Atom im Molekularverbande gehalten wird

$$k_n = \sum m f(r) \frac{x}{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (229)$$

Erteilt man nun demselben die unendlich kleine Elongation ξ, η, ζ und setzt wie früher

$$\frac{f(r+\varrho)}{r+\varrho} = \mathfrak{f}(r) + \varrho\, \mathfrak{f}'(r) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (230)$$

so wird die neue Kraft, gegen welche der Rückzug in der Gleichgewichtslage ankämpft

$$\sum m \mathfrak{f}(r)\xi + \sum m \mathfrak{f}'(r) x\varrho = \alpha_n m_n \sigma_n^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (231)$$

wenn, wie es auch in der Theorie der kontinuierlichen Spektra geschah, α_n und σ_n die Amplitude und Schwingungszahl des n-ten Atomes bedeutet. Die als Gleichung hingeschriebene Beziehung ist nun aber in der That nur für einen Augenblick richtig, für den Moment der eintretenden Dissoziation. Sie wird es allgemein, wenn man linkerseits eine im Innern der Molekel unveränderliche und nur von der Gröſse der Disgregation abhängige Kraft addiert, die mit εm bezeichnet sein möge.

Wegen der geringen Zahl der Atome, die in einer Molekel angenommen werden müssen, darf man nun nicht annehmen, daſs

$$\sum m \mathfrak{f}(r) . x\varrho = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (232)$$

sei, auch wenn sonst in der Verteilung der Atome Symmetrie herrschte. Diese Vereinfachung wird aber eine selbstverständliche, wenn wir wieder alle zugleich in dem

Sehkegel enthaltenen Molekeln auf eine zur Axe dieses Kegels senkrechte Ebene projizieren, statt welcher wir wieder eine Schichte von so geringer Dicke einführen, daſs sie in der Tiefenausdehnung durchschnittlich nur eine Molekel enthalte

Schreibt man nun unter Berücksichtigung des Gesagten die Gleichung (231) für die einzelnen Atome in der expliziten Form

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -\alpha_1\sigma_1 + \alpha_2 p_{12} + \alpha_3 p_{13} + \quad + \alpha_n p_{1n} + \varepsilon \\ 0 &= \alpha_1 p_{21} - \alpha_2\sigma_2 + \alpha_3 p_{23} + \quad + \alpha_n p_{2n} + \varepsilon \\ & \\ 0 &= \alpha_1 p_{n1} + \alpha_2 p_{n2} + \alpha_3 p_{n3} + \quad - \alpha_n \sigma_n + \varepsilon \end{aligned}\right\} \quad f(r_{\varepsilon\eta}) = p_{\varepsilon\eta} = p_{\eta\varepsilon} \tag{233}$$

so kann zur Bestimmung der Amplituden geschritten werden Die Gleichung darf jedoch nicht nach dem früheren Vorgehen behandelt werden denn während dort $n = \infty$ war und alle σ kontinuierlich in einander übergingen, ist hier n nicht nur überhaupt endlich, sondern in den meisten Fällen auch sehr klein Die σ sind also Werte, welche von einander durch weite Intervalle getrennt abliegen Es darf daher auch über die Gröſsen p von vorneher keine Annahme gemacht werden

Sei nun Δ die aus den Koeffizienten des Systems gebildete Determinante und Δ_r deren Wert, wenn die r-te Vertikalkolonne durch lauter Einsen ersetzt wird Dann ist allgemein

$$\alpha_r = -\frac{\Delta_r}{\Delta}\,\varepsilon \tag{234}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\sigma_1 & p_{12} & p_{13} & p_{1n} \\ p_{21} & -\sigma_2 & p_{23} & p_{2n} \\ & & & \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & -\sigma_n \end{vmatrix} \tag{235}$$

Die Amplitude werden wir auch jetzt nur durch ihr Verhältnis zu einer andern, etwa der s-ten ausdrücken Man erhält so

$$\frac{\alpha_r}{\alpha_s} = \frac{\Delta_r}{\Delta_s} \tag{236}$$

wo nun allerdings ε eliminiert erscheint Wir würden dasselbe aber ebensowenig bei Gasen in die Rechnung ziehen können, wie bei festen Körpern

Die Determinante Δ_r enthält das Glied σ_r nicht, denn die Reihe, in welcher es stand, wird ja von Einsen eingenommen Auſserdem enthält sie die einzelnen σ_1^2, σ_2^2 nur linear Bezeichnet also das Symbol

$$\mathfrak{C}_r \sigma^2$$

alle möglichen und mit einzelnen Faktoren multiplizierte Kombinationen der nach Entfernung des r-ten Elementes gebliebenen $n-1$ Elemente von der Ordnung 0 bis zur Ordnung $n-1$, so kann man die Amplitude auch so ausdrücken

$$\frac{\alpha_r}{\alpha_s} = \frac{\mathfrak{C}_r \sigma}{\mathfrak{C}_s \sigma^2} \tag{237}$$

und die Intensität wird demnach

$$\frac{L_r}{L_s} = \frac{m_r}{m} \frac{\sigma_r}{\sigma_s^2} \left(\frac{\mathfrak{C}_r \sigma^2}{\mathfrak{C}_s \sigma^2}\right)^2 \tag{238}$$

wo m die Masse des Atomes bezeichnet Diese Gleichung läſst sich nun noch bedeutend transformieren Führt man statt der Schwingungszahl Wellenlängen ein, und multipliziert

unter der Klammer Zähler und Nenner des Bruches mit dem Produkte $\lambda_1{}^2\lambda_2{}^2 \ldots \lambda_n{}^2$, so wird der Zähler in jedem Gliede $\lambda_r{}^2$, der Nenner $\lambda_s{}^2$ enthalten, da ja in dem ersteren das Element $\sigma_r{}^2$, im letzteren $\sigma_s{}^2$ fehlte. Nun fassen wir im Zähler alle Glieder zusammen, welche $\lambda_s{}^2$ enthalten, heben $\lambda_s{}^2$ als gemeinschaftlichen Faktor heraus, und heben darauf den Faktor von $\lambda_s{}^2$, der also weder $\lambda_r{}^2$ noch $\lambda_s{}^2$ enthält, vor die Klammer. Ähnlich verfahren wir im Nenner, mit dem Faktor von $\lambda_r{}^2$. Dann erhält man den folgenden Ausdruck:

$$\frac{L_r}{L_s} = \frac{m_r}{m_s} M \frac{\lambda_r{}^2}{\lambda_s{}^2} \left(\frac{\lambda_s{}^2 + \mu_s{}^2}{\lambda_r{}^2 + \mu_r{}^2} \right)^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (239)$$

wo nun M, μ_r, μ_s weder λ_r noch λ_s enthalten, also rationle gebrochene Funktionen der $n-2$ Wellenlängen und der $\frac{n(n-1)}{2}$ verschiedenen Atomkräfte sind.

b) Trotz der Allgemeinheit dieser Gleichung können wir schon jetzt einige interessante Thatsachen folgern. Wenn auch die Wellenlängen der auftretenden Strahlen für einen gegebenen Stoff konstante Gröfsen sind, so können sie doch, insofern eine jede Spektrallinie endliche Breite besitzt, innerhalb der Breite der Linie als variabel angesehen werden. Man kann also sagen:

Durch jede charakteristische Linie eines Spektrums läfst sich ein und nur ein kontinuierliches Spektrum legen, welches innerhalb der Breite derselben nach Intensität und Intensitätsänderung dieselbe vollkommen deckt.

Wir erinnern wieder an die schon gemachte Unterscheidung von charakteristischen und sekundären Linien, welche erstere dem Atome von vorne eigen, deren letztere erst geweckt sind.

Wir sehen weiter, dafs die Linie nicht mit dem Intensitätsmaximum des durch sie hindurchgehenden Spektrums zusammenfällt, denn es ist μ mit der Temperatur veränderlich, λ aber nicht. Die Koinzidenz kann also nur bei einer gewissen Temperatur stattfinden.

Dafs die den verschiedenen Linien angehörigen μ untereinander formell verschieden sind, ist leicht einzusehen. Die Frage, ob zwischen ihnen ein Zusammenhang bestehe und welcher Natur derselbe etwa sei, läfst sich analytisch nicht behandeln, da weder die Wellenlängen auf theoretischen Grundlagen bekannt noch die Atomkräfte gegeben sind. Letztere könnte man zwar noch durch bekannte Erscheinungen der Dissoziation ausdrücken, doch sind auch diese viel zu lückenhaft erforscht. Wir müssen uns daher an Beobachtungsthatsachen halten.

Es ist allgemein bekannt, dafs durch Veränderungen von Druck und Temperatur ein jedes Linienspektrum sich in ein kontinuierliches verwandelt, wie dies auch das Kirchhoffsche Gesetz erfordert, welches das Spektrum des absolut schwarzen Körpers als die Grenze angiebt, welchem sich alle Stoffe bei zunehmender Dicke nähern. Dieser Übergang kann nun auf eine zweifache Weise vor sich gehen: entweder erbreitert sich eine jede Linie selbständig zu einem kontinuierlichen Spektrum oder aber sie erbreitern sich nur bis zur gegenseitigen Berührung. In beiden Fällen wird sich auch das kontinuierliche (Hintergrunds-) Spektrum der Gase verändern, im Besonderen an Intensität zunehmen.

Zugleich hört der Zustand der Wellenlänge auf, eine Konstante zu bedeuten; sie ist innerhalb der Grenzen des kontinuierlichen Spektrums, welches einer Linie angehört, also allgemein wieder nur in der Breite der Linie veränderlich; im ersten

Falle des Kontinuierlichwerdens werden sich sogar die verschiedenen Linien angehörenden Variabeln superponieren können.

Bei der analytischen Behandlung dieser Vorgänge wäre darauf Rücksicht zu nehmen, daſs die Spektra nun nicht mehr der Einheit der Stoffmenge entsprechen. Wir können von diesem Umstande jedoch vollständig abstrahieren, da es uns nur darauf ankommt, die Nichtexistenz eines Additionstheorems der Spektra zu benutzen, und dies schon für den einfachen Fall einheitlicher Stoffmenge dargethan ist. Indem wir das kontinuierliche Spektrum durch seine Gesamtintensität $\mathfrak{L}$, die Linien durch die Intensität der t-ten Linie ausdrücken, erhalten wir für die Erbreiterung zweier Linien r und s bis zur gegenseitigen Berührung auf dem kontinuierlichen Hintergrunde

$$\begin{aligned} M_{rt}\frac{\lambda_r^2}{\lambda_t}\left(\frac{\lambda_t^2+\mu_t^2}{\lambda_r^2+\mu_r^2}\right)^2 &= M_{st}\frac{\lambda_s^2}{\lambda_t^2}\left(\frac{\lambda_t^2+\mu_t^2}{\lambda_s^2+\mu_s^2}\right)^2 \qquad \lambda_r = \lambda_s \\ M_{rt}\frac{\lambda_r^2}{\lambda_t^2}\left(\frac{\lambda_t^2+\mu_t^2}{\lambda_r^2+\mu_r^2}\right)^2 + \frac{4}{\pi}\mu\,\mathfrak{L}\frac{\lambda_r^2}{(\lambda_r^2+\mu^2)^2} &= \frac{4}{\pi}\mu_0\mathcal{A}\frac{\lambda_r^2}{(\lambda_r^2+\mu_0^2)^2} \end{aligned} \tag{240}$$

in Worten ausgedrückt. Soll das entstehende kontinuierliche Spektrum $(\mathcal{A}, \mu_0)$ wirklich ein kontinuierliches sein, wie es Erfahrung und Theorie fordern, so muſs an der Berührungsstelle zweier Linien gleiche Intensität herrschen, und diese Intensität plus der des Hintergrundes $(\mathfrak{L}, \mu)$ an derselben Stelle muſs der gleichnamigen des entstehenden Spektrums gleich sein.

Entwickelt sich dagegen jede Linie selbständig zu einem kontinuierlichen Spektrum, so hat man

$$\frac{4}{\pi}\mu\,\mathfrak{L}\frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2} + \sum_1^n M_{rt}\frac{\lambda^2}{\lambda_t^2}\left(\frac{\lambda_t^2+\mu_t^2}{\lambda^2+\mu_t^2}\right)^2 = \frac{4}{\pi}\mu_0\mathcal{A}\frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu_0^2)^2} \tag{241}$$

und diese Gleichung soll für jede Wellenlänge gelten. Da aber kontinuierliche Spektra kein Additionstheorem besitzen, so folgt aus allen drei Gleichungen gemeinsam

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_r = \mu_s = \mu_t = \ldots \mu_n = \mu = \mu_0 \tag{242}$$

während aus dem ersten System noch weiter ist

$$\frac{4}{\pi}\mu(\mathcal{A}-\mathfrak{L}) = M_{rt}\frac{(\lambda_t^2+\mu_t^2)^2}{\lambda_t^2} = M_{st}\frac{(\lambda_t^2+\mu^2)^2}{\lambda_t^2} \tag{243}$$

und aus dem zweiten

$$\frac{(\lambda_t^2+\mu^2)^2}{\lambda_t^2}\sum_1^n M_{rt} = \frac{4}{\pi}\mu(\mathcal{A}-\mathfrak{L}) \tag{244}$$

Das gemeinsame Resultat beider Fälle kann man in Worten folgendermaſsen ausdrücken:

Durch alle charakteristischen Linien eines Gasspektrums läſst sich ein und nur ein kontinuierliches Spektrum legen, dessen Intensität bei einer bestimmten Temperatur gleich derjenigen der Linien ist.

Der gefundene Satz kann noch weiter spezialisiert werden, wenn sich entscheiden läſst, wie die Erbreiterung der Linien in der That vor sich geht. Es scheint nun der zuletzt behandelte Fall des Kontinuierlichwerdens ausgeschlossen zu sein, denn es ist die Erbreiterung — wie wir auch später nachweisen — unter anderem eine Funktion der Wellenlänge. Es müſste daher eine Linie schon einen groſsen Teil des Spektrums durchlaufen haben, während eine andere die Erbreiterung eben beginnt. Da nun die μ in allen Fällen dieselben sind, und die Intensitäten endliche Werte besitzen, so müſsten an einzelnen Stellen des entwickelten Spektrums Unterbrechungen der Stetigkeit eintreten,

was der Erfahrung widerspricht. Da auch die Beobachtung geradezu auf den ersteren Fall der Erbreiterung hinweist, so können wir spezieller sagen:

Alle charakteristischen Linien eines Gasspektrums liegen in einem und demselben kontinuierlichen Spektrum, dessen Intensität bei einer bestimmten Temperatur in jedem Punkte nach demselben Faktor der Intensität des kontinuierlichen Hintergrundspektrums proportional ist.

Die Funktionen M_{rt}, in welche, wie man bemerkt haben wird, auch das Verhältnis der schwingenden Massen hineinbezogen wurden, sind nun bestimmt; sie sind einfach der Differenz von Total- und kontinuierlicher Spektralintensität, also der Intensität des Linienspektrums proportional. Bezeichnet man die Totalintensität des ganzen Spektrums mit $\mathfrak{A}$, des kontinuierlichen Hintergrundes mit $\mathfrak{C}$, des Linienspektrums mit $\mathfrak{L}$, so hat man also:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C} + \mathfrak{L} \quad \text{(245)}$$

und die Intensität der Linie schreibt sich einfach in der Form:

$$L_r = \frac{4}{\pi} \mu \mathfrak{L} \frac{\lambda_r^2}{(\lambda_r^2 + \mu^2)^2} \quad \text{(246)}$$

wo man nur zu bedenken hat, dafs die $\lambda_1 \ldots \lambda_r \ldots \lambda_n$ springend veränderliche Gröfsen sind, so dafs für $\mathfrak{L}$ die Beziehung stattfindet:

$$\mathfrak{L} = \frac{4}{\pi} \mu \mathfrak{L} \sum_1^n{}_r \frac{\lambda_r^2}{(\lambda_r^2 + \mu^2)^2} \quad \text{(247)}$$

wobei die Summation nicht durch eine Integration ersetzt werden darf.

c) Schauen wir nun zu, ob es möglich ist neben der Gleichung (245) noch eine andere Beziehung zwischen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{L}$ aufzustellen. Zu diesem Behufe müssen wir die Annahme machen, dafs das kontinuierliche Spektrum der Gase von Bewegungen der Molekeln, das Linienspektrum von Bewegungen der Atome herrührt. Diese Annahme ist in der Gasspektralanalyse überhaupt die gangbare, und gewifs auch die wahrscheinliche. Denn sie fordert nicht, dafs nicht auch den Linien selbst eine Spur kontinuierlichen Spektrums anhafte, die sich durch unvollkommene Freiheit der Atome erklären läfst, sondern nur, dafs neben diesen noch ein anderes — wenn auch noch so schwaches — über das ganze Spektrum verbreitete Kontinuum vorhanden sei. Übrigens ist, wie man sich erinnert, die Existenz von Atombewegungen in dem verschiedenen Verhalten der spezifischen Wärmen ein- und mehratomiger Gase begründet. Bezeichnet A die Atom-, M die Molekularenergie, so ist nach der kinetischen Gastheorie:

$$\frac{A}{M} = \frac{5 - 3k}{3k - 3} \quad \text{(248)}$$

wo k das Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volumen bedeutet. Da nun die ausgestrahlten Intensitäten den innewohnenden proportional sind, so hat man der Reihe nach die Gleichungen:

$$\mathfrak{C} = \frac{3k - 3}{2} \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{L} = \frac{5 - 3k}{2} \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{L} = \frac{5 - 3k}{3k - 3} \mathfrak{C} \quad \text{(249)}$$

je nachdem man die Intensität des kontinuierlichen und Linienspektrums durch die des Totalspektrums oder durcheinander ausdrücken will.

Wir werden daher das Grundgesetz der diskontinuierlichen Spektra in folgender Form ganz präzise aussprechen müssen:

Alle charakteristischen Linien eines diskontinuierlichen Spektrums liegen in ein und demselben kontinuierlichen Spektrum, dessen Intensität in jedem Punkte und bei

jeder Temperatur der Intensitat des kontinuierlichen Hintergrundspektrums nach demselben Faktor proportional ist

Mit Hilfe dieses wichtigen Satzes ist nun die Behandlung der Gasspektra vollkommen auf die der kontinuierlichen zuruckgefuhrt, und es erfordert keiner weiteren Erorterung, dafs alle fur diese gefundenen Satze unmittelbar auch auf Gasspektra anwendbar sind, wenn wir nur nicht vergessen, dafs bei diesen letzteren die Wellenlange eine diskontinuierliche Variabele ist

Wenn wir also bei Gasen von einem Draperschen Gesetze reden, so bezieht sich die Grenzwellenlange immer auf die Strahlen des kontinuierlichen Gases derselben — es ware denn gerade an der betreffenden Stelle eine Linie vorhanden, Differenzieren wir die Spektralgleichung so denken wir ebenfalls an das kontinuierliche Spektrum wir werden also nicht sagen konnen, dafs jene Linie am hellsten ist, deren Wellenlange μ betragt, sondern jene, welche der Wellenlange $\lambda = \mu$ zunachst liegt, usw

19 Diskussion der Gleichung fur diskontinuierliche Spektra

Die Wellenlangen der in einem Gasspektrum auftretenden Strahlen bilden gewissermafsen eine Eigenschaft der Materie, die nur dann erklart werden konnte, wenn wir Hypothesen uber die Art der inneren Schwingungen anstellen wollten Wir werden spater einige Versuche dieser Art kennen lernen, hier aber wollen wir die Wellenlangen einfach als gegebene konstante Grofsen auffassen Man konnte auch durch Umkehren des Verfahrens zu keinem besonderen Resultate gelangen Denn es ist wohl wahr, dafs wir nun die Grofsen μ und M kennen, die rationale Funktionen von je $n-1$ Wellenlangen sind Zwei dieser μ und M sind von einander nicht unabhangig, so dafs $2(n-1)$ Gleichungen bleiben die n Wellenlangen und (wegen der Symmetrie der Determinante) $\frac{n(n-1)}{2}$ Atomkrafte enthalten Die Zahl der Unbekannten betragt also $\frac{n(n+1)}{2}$, so dafs die Aufgabe nicht losbar ist

Bei der Ableitung der Schwingungsgleichungen gingen wir von der Anzahl n der Atome aus, und erhielten zuletzt wieder n Schwingungen Der Schlufs, dafs einem n-atomigen Gase daher allgemein n Spektrallinien entsprechen, ware aber doch falsch da wir bei den Ableitungen solche Vereinfachungen einfuhrten, die die Konstanz gewisser Mittelzustande bedingten Wir werden daher folgerichtig nur sagen konnen Ein n-atomiges Gas besitzt so viele charakteristische Spektrallinien, als die n Atome selbstandig hervortretende Mittelzustande ihrer Bewegung haben Oder etwas freier ausgedruckt Ein n-atomiges Gas hat so viele charakteristische Spektrallinien, als die Bahnen ihrer n Atome ausgezeichnete Punkte

Das u der Spektralgleichung ist auch hier nur eine Funktion der Temperatur allein Nie konnen zwei Linien zugleich im Maximum der Intensitat stehen, und hochstens zwei zugleich dieselbe Intensitat besitzen Durch Veranderungen der Temperatur konnen nach und nach alle Linien zu den hellsten gemacht werden

Da k, das Verhaltnis der spezifischen Warmen, fur alle Gase nahezu konstant ist, so folgt weiter, dafs unter sonst gleichen Verhaltnissen besonders jene Gase ein sehr brillantes Spektrum liefern werden, die die wenigsten Linien besitzen

Die Anderungen der Intensitat mit der Wellenlange sind diskontinuierlich, insofern nach jeder hellen Linie ein dunklerer Raum folgt, dessen Intensitat der der

Linie in Nachbarpunkten proportional ist. Nicht so ist es mit den Intensitätsänderungen infolge Temperaturvariationen. Da μ unabhängig von den speziellen Werten der vorkommenden Wellenlängen stetig mit der Temperatur sich ändert, so folgt dasselbe für einen jeden Strahl.

Tafel III giebt im richtigen Verhältnisse das kontinuierliche und Linienspektrum des Wasserstoffs in der Chromosphäre der Sonne. Zugleich erklärt es deutlich den Begriff des kontinuierlichen Spektrums, das durch ein Linienspektrum hindurch gelegt ist.

20. Einflufs der Molekular- und Atombewegung auf das Spektrum.

Die Gleichungen der Atomschwingungen konnten nur unter der Annahme einfach gelöst werden, dafs die Koeffizienten der Elongationen von der Zeit unabhängige konstante Gröfsen seien. Es ist aber leicht einzusehen, dafs, obwohl die Mittelzustände der Atombewegung es sind, welche auf das Spektrum den dauerndsten Einflufs nehmen, doch auch die extremen Momente derselben nicht spurlos an denselben vorübergehen werden. Ihre nächste Folge ist, dafs die Spektrallinie, welche nach der vereinfachten Theorie eine einzelne Schwingung, eine mathematische Linie wäre, erbreitert erscheint.

Zur analytischen Behandlung der Frage nach der Erbreiterung der Linien bieten sich zwei Wege dar; die Koeffizienten der Gleichungen (233) und (239) sind Funktionen der gegenseitigen Atomentfernungen. Differenziert man dieselben also nach dieser Entfernung, und betrachtet die eintretenden Änderungen als Änderungen der Wellenlängen, so erhalten wir einen Ausdruck für die Breite der Linien. Dadurch treten aber auch die Amplituden in das Problem ein, die wieder eliminiert werden müssen. Der zweite Weg wäre in Bezug auf diesen letzteren Punkt der kürzere. Schreibt man nämlich die n expliziten Gleichungen der μ auf, und setzt sie dem μ des kontinuierlichen Spektrums gleich, so haben wir $n-1$ von einander unabhängige Gleichungen in den Wellenlängen und den Atomkräften, welche nach der Entfernung differenziert wieder die Breite geben werden. Die Breiten von $n-1$ Linien lassen sich also durch Variationen der Bewegungen ausdrücken, eine Erbreiterung bleibt stets willkürlich.

Da jedoch von diesen Methoden für den praktischen Gebrauch nichts zu erwarten steht, müssen wir nach indirekten Mitteln suchen, welche zur Lösung der Aufgabe führen. Dasselbe finden wir in der Gleichung (247):

$$\mathfrak{J} = \frac{4}{\pi}\,\mu\mathfrak{J} \sum_{1}^{n}{}_{r} \frac{\lambda_r^2}{(\lambda_r^2+\mu^2)^2}$$

einer einfachen Identität, welche besagt, dafs die Summe der Intensitäten aller Linien die Totalintensität des Linienspektrums ist. Diese Gleichung gilt ganz allgemein, wenn nur der Charakter der Variabilität von λ nicht über die Breite der Linie hinaus ausgedehnt wird.

a) Nehmen wir nun an, es sei $2\varepsilon_r$ die Breite der r-ten Linie, dann ist ihre Intensität proportional dem Integrale

$$\int_{\lambda_r-\varepsilon_r}^{\lambda_r+\varepsilon_r} \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2}\,d\lambda = \frac{1}{2\mu}\operatorname{arctg}\frac{2\varepsilon_r\mu}{\lambda_r^2+\mu^2-\varepsilon_r^2} - \frac{2\varepsilon_r^2(\mu^2-\lambda_r^2+\varepsilon_r^2)}{[(\lambda_r-\varepsilon)^2+\mu^2][(\lambda_r+\varepsilon_r)^2+\mu^2]} \quad (250)$$

Da nun aber ε_r stets eine sehr kleine Gröfse ist, so empfiehlt es sich, das Integral in eine Reihe, welche nach steigenden Potenzen von ε_r fortschreitet, zu entwickeln. Man erhält:

$$\operatorname{arctg}\frac{2\varepsilon\mu}{\lambda^2+\mu^2-\varepsilon^2}=\frac{2\mu}{\lambda^2+\mu^2}\varepsilon+\frac{2\mu}{(\lambda^2+\mu^2)^2}\varepsilon^3+\frac{2\mu}{(\lambda^2+\mu^2)^3}\varepsilon^5+$$

$$-\tfrac{1}{3}\frac{8\mu^3}{(\lambda^2+\mu^2)^3}\varepsilon^3-\tfrac{3}{3}\frac{8\mu^3}{(\lambda^2+\mu^2)^4}\varepsilon^5-\qquad+\tfrac{1}{5}\frac{32\mu^5}{(\lambda^2+\mu^2)}\varepsilon^5+$$

$$\frac{\varepsilon^2[\mu^2-\lambda^2+\varepsilon^2]}{[(\lambda-\varepsilon)^2+\mu^2][(\lambda+\varepsilon)^2+\mu^2]}=\frac{\mu^2-\lambda^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2}\varepsilon^2+\frac{1}{(\lambda^2+\mu^2)}\varepsilon^4+\qquad-\frac{2(\mu^2-\lambda^2)}{(\lambda^2+\mu^2)^4}\varepsilon^4-$$

und daher wird die Intensitat L der Linie

$$L=\frac{4}{\pi}\mu\mathfrak{L}\left\{\frac{\varepsilon}{\lambda^2+\mu^2}+2\varepsilon\frac{\mu^2-\lambda^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2}+\left[\frac{1}{(\lambda^2+\mu^2)^2}-\tfrac{4}{3}\frac{\mu^2}{(\lambda^2+\mu^2)^3}\right]\varepsilon^3+\cdots\right\}\qquad(251)$$

in welchem Ausdrucke wir jedoch im folgenden nur das erste Glied mitnehmen Die ungewohnlich grofse Breite der zweiten Wasserstofflinie im Sterne α Lyrae betragt etwas mehr als eine Angstromsche Wellenlange, in unseren Einheiten macht das 0 001, das Quadrat dieser Grofse multipliziert mit dem stets kleinen Bruche $2\frac{\mu^2-\lambda^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2}$ ist bereits unmerklich

Die Gleichung (247) wird somit

$$\sum_1^n\frac{\varepsilon_i}{\lambda_i^2+\mu^2}=\frac{\pi}{4\mu}\qquad(252)$$

und zeigt, dafs unter den Erbreiterungen von n Linien durch $n-1$ willkurlich bestimmte Breiten die n-te gegeben ist Diese Gleichung, so unbestimmt sie auch ist, ist das einzige anwendbare Hilfsmittel, welches wir zur Berechnung der Breite einer Linie besitzen Die einfachste und wahrscheinlichste Losung derselben ist

$$\varepsilon_i=\text{konst}\,\frac{\lambda_i^2+\mu^2}{\mu}\qquad(253a)$$

die allgemeiner auch so geschrieben werden kann

$$\varepsilon_i=\varphi(\mu)\frac{\lambda_i^2+\mu^2}{\mu}\qquad(253b)$$

wo $\varphi(\mu)$ eine Funktion von μ allein bedeutet, da die Wellenlange in derselben nicht mehr vorkommen kann Um die Gleichung einer Anwendung fahig zu machen, beziehen wir sie auf die Breite der Linie t und erhalten so

$$\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_t}=\frac{\lambda_i^2+\mu^2}{\lambda_t^2+\mu^2}\qquad(254)$$

Ist die Breite zweier Linien der Beobachtung zuganglich, so kann daraus die Temperatur des emittierenden Gases bestimmt werden, man findet

$$\mu^2=\frac{\varepsilon_t\lambda_i^2-\varepsilon_i\lambda_t^2}{\varepsilon_i-\varepsilon_t}\qquad(255)$$

Die Formel zeigt, dafs die Breite der Linien von den kurzeren gegen die langeren Wellen fortwahrend wachst, und dafs sie vom Drucke direkt nicht abhangt Fur das Sonnenspektrum findet sich z B als Breite der Linien H_β und H_α die Grofsen 0 077 resp 0 125 Die zweite Folgerung bestatigt Fievez[1] durch sorgfaltige Versuche

Zollners Folgerungen aus dem Kirchhoffschen Gesetze widersprechen dem Gesagten nicht, denn sie enthalten den Druck nur in dem Absorptionsvermogen Aufserdem scheint es uns aber, dafs dort die Erbreiterung grofsenteils auch als subjektive Erscheinung aufgefafst wurde

---

[1] Bullet de l Acad roy Belgique Ser 3 T VII p 348

Um die Gleichungen auch für diesen Fall aufzustellen, schreiben wir zuerst:

$$\mathfrak{L}_q = \frac{4}{\pi}\mu\,\mathfrak{L}\sum_1^n{}^r \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2}\left\{\frac{1-(1-A)^q}{A}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (256)$$

Nun ist aber

$$\mathfrak{L}_q = \frac{5-3k}{3k-3}\,\mathfrak{C}_q = \frac{5-3k}{3k-3}\,\mathfrak{C} f(q) \quad \ldots \ldots \quad (257)$$

und damit wird weiter auch

$$f(q) = \frac{4}{\pi}\mu\sum_1^n{}^r \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2}\left\{\frac{1-(1-A)^q}{A}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (258)$$

Da die Breite der Linie stets eine sehr geringe Gröſse ist, so wollen wir die Integration innerhalb der Breite so vornehmen, daſs wir einfach einen Mittelwert der Absorptionsfunktion zwischen den Grenzen $\lambda-\varepsilon$ und $\lambda+\varepsilon$ vor das Integralzeichen herausheben, und statt der mittleren Wellenlänge wieder λ setzen. Dann ist:

$$\varepsilon_r = \text{konst.}\, f(q)\,\frac{\lambda_r^2+\mu^2}{\mu}\,\frac{A}{1-(1-A)^q} \quad \ldots \ldots \quad (259)$$

und entwickelt man bis zu zweiten Potenzen von A, so kommt:

$$\varepsilon_r = \text{konst.}\,\frac{\lambda_r^2+\mu^2}{\mu}\,\frac{1-\frac{1}{3}\left(1+2\frac{\mu^2}{m^2}+5\frac{\mu^4}{m^4}\right)(q-1)}{1-\frac{1}{2}\frac{\mu^4}{m^4}\left(\frac{\lambda_r^2+m^2}{\lambda_r^2+\mu^2}\right)^2(q-1)} \quad \ldots \ldots \quad (260)$$

Die Breite der Linie hängt also jetzt in der That auch vom Drucke ab, und das Vorzeichen von $\frac{d\varepsilon}{dq}$ ist identisch mit dem des Ausdruckes:

$$\frac{1}{2}\frac{\mu^4}{m^4}\left(\frac{\lambda_r^2+m^2}{\lambda_r^2+\mu^2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(1+2\frac{\mu^2}{m^2}+5\frac{\mu^4}{m^4}\right)$$

Da das erste Glied stets zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}\frac{\mu^4}{m^4}$ bleibt, so erkennt man leicht, daſs für Wellenlängen, welche kleiner sind als

$$\lambda^2 = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}\frac{m^2}{\mu^2}}\sqrt{1+2\frac{\mu^2}{m^2}+5\frac{\mu^4}{m^4}} - m^2}{1-\sqrt{\frac{2}{3}\frac{m^2}{\mu^2}}\sqrt{1+2\frac{\mu^2}{m^2}+5\frac{\mu^4}{m^4}}}$$

der besagte Differentialquotient positiv sein kann — aber nicht zu sein braucht. Wir finden daher: Der Druck wirkt nicht auf alle Spektrallinien gleich ein, ja es können sich selbst bei zunehmendem Drucke Verschmälerungen vorfinden. Findet aber Erbreiterung (Verschmälerung) statt, so geschieht das immer vom Ende der kürzeren (längeren) Wellen her. In Bezug auf die Fortschreitung der Erbreiterung besteht bekanntlich die Regel, daſs dieselbe auf der violetten Seite beginne und sich sodann gegen Rot fortpflanze. Ob auch über Verschmälerungen der Linien bei zunehmendem Drucke Beobachtungen vorliegen, ist uns nicht bekannt geworden.

Bei dieser letzten Ableitung muſs noch einmal darauf aufmerksam gemacht werden, daſs sie nur für Gase von sehr geringem Absorptionsvermögen gilt, deren dritte Potenzen schon vernachlässigt werden können. Könnte man sogar bei der ersten Potenz der Absorption stehen bleiben, so würde der Druck oder die Stoffmenge von gar keinem Einflusse sein — wie dies ja auch natürlich ist.

b) Bei der Erbreiterung einer Linie konnen noch zwei Umstande mitwirken, die wir naher untersuchen mussen, um im gegebenen Falle nicht etwa einer Ursache eine Wirkung zuzuschreiben, die sie gar nicht besitzt Wir meinen den Einflufs der Molekeln und Atome in der Gesichtslinie Irren wir nicht, so wurde bereits darauf aufmerksam gemacht, dafs die Erbreiterung einer Linie von der Bewegung der Molekeln in der Sehlinie herruhren konnte, und in diesem Falle geeignet sein, zur Kenntnis der Temperatur der Lichtquelle zu fuhren

Dafs die Behandlung dieser Frage, besonders wo es sich um Atombewegungen handelt, keine strenge sein kann, braucht wohl kaum besonders betont zu werden Wir beschranken uns hier auch nur darauf, nachzuweisen, dafs erstens die Art des Einflusses einem anderen Gesetze gehorcht, und dafs zweitens seine Grofse nicht in Betracht kommen kann

Ist der Beobachter ruhend gedacht, so betragt die Verschiebung der Wellenlange bei Geschwindigkeiten, die gegen die des Lichtes c nicht zu grofs sind

$$\lambda^1 - \lambda = -\lambda \frac{c_1}{c} \tag{261}$$

wo nun c_1 die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung der Molekel im Gesichtsradius bedeuten mag Diese Verschiebung der Wellenlange ist aber gerade die halbe Breite der Linie da es sowohl Molekeln giebt, welche entweder ruhen oder die Gesichtslinie senkrecht schneiden, und solche, welche die grofsten Geschwindigkeiten besitzen Alle Zwischenstufen der Geschwindigkeiten sind vertreten

Nach der kinetischen Gastheorie ist nun

$$c_1 = \frac{8}{\pi} \frac{pO}{\varrho} \tag{262}$$

wo p und ϱ Druck und Dichte des Gases bezeichnen Man hat daher fur die Breite der Linie, welche aus der Bewegung der Molekeln folgt

$$\varepsilon^1 = \frac{\lambda}{c} \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{pO}{\varrho}} \tag{263}$$

Demnach wurde sich die Erbreiterung am ehesten am Ende langer Wellen bemerklich machen

Von der Atombewegung wissen wir so gut wie nichts, und es ist uberhaupt die erste Frage, ob die Geschwindigkeit der Atome die Anwendung des Dopplerschen Prinzipes gestattet Nach Graetz[1] ist die Amplitude der Linie D im Sonnenlichte an der Erdoberflache $\geqq 6\ 10^{-10}$ cm und somit ware die maximale Oszillationsgeschwindigkeit in Teilen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes $\geqq 64\ 10^{-6}$ Sollen aber die Korpereigenschaften unverandert bleiben, so ist leicht einzusehen, dafs zwischen den Geschwindigkeiten der Schwingung und der sonstigen Bewegung der Atome kein grofser Unterschied bestehen darf Es ist somit hochst wahrscheinlich gemacht, dafs das Dopplersche Prinzip selbst bei sehr hohen Temperaturen auch fur die Atombewegungen angewendet werden darf

Die wahrscheinlichste Annahme, die man uber die Geschwindigkeiten machen kann, ist wohl die, dafs die Energie der Atombewegung proportional sei der Intensitat des ausgestrahlten Lichtes Dann hatte man

---

[1] Repert de Phys 21 Bd 8 Heft

$$c_1 = A^2 \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (264)$$

und daraus, die der Atombewegung entsprechende Erbreiterung mit ε'' bezeichnend:

$$\varepsilon'' = \frac{A}{c} \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \mu^2)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (265)$$

Die wahre Breite der Linie ist nun nicht gleich der Summe der abgeleiteten Erbreiterungen, sondern einfach der gröfsten derselben. Bedeuten also ϑ, ϑ', ϑ'' drei Diskontinuitätsfaktoren von der Beschaffenheit, dafs zwei derselben so lange Null sind, als die zugehörigen Erbreiterungen kleiner sind, als die dritte, für welche der entsprechende Diskontinuitätsfaktor den Wert 1 annimmt, so hat man:

$$\varepsilon = \vartheta \varepsilon_0 \frac{\lambda^2 + \mu^2}{\lambda_0^2 + \mu^2} + \vartheta' \varepsilon' + \vartheta'' \varepsilon'' \quad \ldots \ldots \ldots \quad (266)$$

Denken wir uns nun die Form der Linie für irgend eine Lichtquelle, deren verschiedene Punkte verschiedene Temperaturen besitzen mögen, wirklich aufgeschrieben. Dann müfste bis zur Temperatur Θ_1 etwa die Linie durch eine Kurve von dem Gesetze (253) begrenzt sein, während in Θ_1 gerade die Erbreiterung infolge der Molekulargeschwindigkeit vorherrschen könnte. In Θ_2 etwa würde diese Begrenzung wieder durch eine neue ersetzt sein können usf. Die Breite der Linie könnte also in verschiedenen Punkten ganz verschiedene Gesetze befolgen. Da solche Formänderungen unter den wechselvollsten Bedingungen — wir kennen die Spektra der Sonnenphotosphäre, der Kometen, der Nebelflecke, die alle nach der gerade hier mafsgebenden Lockyerschen Methode beobachtet sind — der Beobachtung nicht vorgefunden sind, die Linien stets ein einheitliches Gesetz der Breitenänderung befolgen, so mufs allgemein

$$\vartheta' = \vartheta'' = 0, \quad \vartheta = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (267)$$

sein, und nur diejenige Breite übrig bleiben, welche sich vollständig durch die Schwingungserscheinungen der Atome erklären läfst.

Übrigens ist es klar, dafs die Breite der Spektrallinien kein selbständiges Bestimmungsstück ist, und nur in seltenen Fällen unzweideutigen Aufschlufs über den Zustand des emittierenden Körpers geben kann.

c) Ähnliche Korrektionen, wie an die Breite der Linien wären auch an deren Intensität anzubringen. Ist nach dem Dopplerschen Prinzipe die an die Intensität anzubringende Korrektion

$$\iota = \pm 2 \frac{c_1}{c} L \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (268)$$

so wird sie nach den für die Molekular- und Atomgeschwindigkeit gefundenen Resultaten:

$$\left.\begin{aligned} \iota' &= \pm \frac{2L}{c} \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{p\Theta}{\varrho}} \\ \iota'' &= \pm \frac{2A}{c} \sqrt{L^3} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (269)$$

das untere Zeichen ist an die Korrektion für die brechbarere Seite, das obere an die Korrektion für die weniger brechbare Seite anzubringen. Die Linie müfste daher, wie es die Gleichung versinnlicht, gewissermafsen aus zwei Hälften bestehen, deren brechbarere die schwächere, die weniger brechbare die intensivere ist. Da auch dieser Fall durch die Erfahrung nicht gestützt wird, so brauchen auch die von den inneren Bewegungen herrührenden Korrektionen nicht berücksichtigt zu werden.

21 Die sekundaren Linien des Spektrums

a) Bisher wurde an der Annahme, dafs die Elongationen der um ihre Gleichgewichtslagen schwingenden Atome so klein seien, dafs die hoheren als ersten Potenzen der Ausbiegungen vernachlassigt werden konnen, festgehalten Und diese Vernachlassigung war so lange erlaubt, als die Korpereigenschaften infolge der schwingenden Bewegung nicht merkliche Veranderungen erlitten Doch zeigt die Erfahrung dafs schon das Linienspektrum zweiatomiger Gase so verwickelt ist, dafs man erwarten darf, durch Fallenlassen dieser vereinfachenden Annahme zahlreiche wirklich vorkommende Linien erklaren zu konnen, welche schon auf den ersten Blick als nicht charakteristische erkannt werden Insofern die Existenz dieser Linien in dem emittierenden Korper als solchem ihre Erklarung findet und diese durch Mitschwingen entstehen, mogen sie hier behandelt werden Das Vorkommen solcher Linien, welche mehreren Stoffen gemeinsam sind, und die entweder als basisch oder als Verunreinigungen angesehen werden mussen mag spater untersucht werden

Ist eine charakteristische Schwingung durch $Q \sin(qt + c)$ gegeben, so erregt sie in dem freien Ather des Korpers auch andere Schwingungen, deren Gleichung ist

$$\frac{d^2 s}{dt} = -k^2 s - k' s^2 - \quad - \sum q \; Q \sin(qt + c) \tag{270}$$

Das Integral dieser Schwingungsgleichung haben wir schon bei fruherer Gelegenheit bis zu zweiten Potenzen der Elongation entwickelt, und gefunden, dafs es darstellt Schwingungen, die dem Ather eigen sind, mit der Schwingungszahl k und $2k$, die charakteristischen Schwingungen und deren Oktaven, alle Kombinationen erster Ordnung der charakteristischen Schwingungen untereinander und mit den eigentlichen Atherschwingungen Ware man in der Entwickelung bis zur n-ten Potenz der Elongation vorgeschritten so hatte man alle Kombinationsschwingungen bis zur $(n-1)$ten Ordnung erhalten

Betrachtet man nun die Intensitaten der charakteristischen Schwingungen als Grofsen erster Ordnung, so werden die der Kombination n allgemein Grofsen $2n$-ter Ordnung, also rasch kleiner Indem wir nun aus einem schon in der Theorie der kontinuierlichen Spektra dargelegten Grunde alle jene Kombinationsschwingungen vernachlassigen, welche die eigene Bewegung des Athers enthalten, und deren Intensitat somit als Faktor die Intensitat der Atherbewegung enthalt, haben wir es hauptsachlich mit Linien von der Zusammensetzung

$$s = \frac{k' q_r^2 q_s^2 Q_r Q_s}{[k^2 - (q_r \pm q_s)^2](q_r^2 - k^2)(q_s^2 - k^2)} \cos[(q_r \pm q_s)t + (c_r \pm c_s)] \tag{271}$$

zu thun, deren Intensitat wir nun entwickeln wollen

Indem wir zunachst Wellenlangen einfuhren und Kurze halber

$$\gamma = 2\pi c \tag{272}$$

setzen, wo c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet, haben wir

$$\lambda_r = \frac{\gamma}{q_r}, \quad \lambda_s = \frac{\gamma}{q_s}, \quad \lambda_{r \pm s} = \frac{\gamma}{q_r \pm q_s} = \frac{\lambda_r \lambda_s}{\lambda_s \pm \lambda_r} \tag{273}$$

wo sich das $+$Zeichen auf Summations-, das $-$Zeichen auf Differenzschwingungen bezieht Der Ausdruck der Intensitat wird sonach

$$i_{r \pm s} = \frac{\gamma^2(\lambda_r \pm \lambda_s)^2}{4\lambda_r^2 \lambda_s^2} \; \frac{k'^2 Q_r^2 Q_s^2 q_r^4 q_s^4}{[k^2 - (q_r \pm q_s)^2]^2 (q_s^2 - k^2)^2 (q_r^2 - k^2)^2} \tag{274}$$

Da nun die Amplitude Q_r und Q_s einer charakteristischen Schwingung angehört, so hat man weiter:

$$\frac{\gamma^2 Q_r^2}{4\lambda_r^2} = L_r, \quad \frac{\gamma^2 Q_s^2}{4\lambda_s^2} = L_s \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (275)$$

und damit wird die Gleichung (274) zur folgenden:

$$i_{r\pm s} = \frac{4k'^2 l'^2}{\gamma^6} \frac{\lambda_r^6 \lambda_s^6 (\lambda_r \pm \lambda_s)^2}{(l^2 - \lambda_r^2)^2 (l^2 - \lambda_s^2)^2 [\lambda_r^2 \lambda_s^2 - l^2(\lambda_r \pm \lambda_s)^2]^2} \cdot \frac{16\mu^2}{\pi^2} \frac{A^2}{(\lambda_r^2 + \mu^2)^2 (\lambda_s^2 + \mu^2)^2} \quad (276)$$

in welcher

$$l = \frac{\gamma}{k} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (277)$$

die Wellenlänge der eigentümlichen Ätherschwingung bedeutet. (Nur die Intensität dieser Schwingung ist als verschwindend anzunehmen; die Wellenlänge kann irgend einen endlichen Wert besitzen.)

Aus der hingeschriebenen Intensitätsformel ersehen wir sogleich zwei wichtige Sätze:

Die Intensität einer sekundären Linie kann nicht als Funktion der eigenen Wellenlänge ausgedrückt werden, sondern ist stets eine Funktion der Wellenlängen der beiden sie erzeugenden Linien. Denn es ist offenbar unmöglich, die vorgelegte Gleichung so zu transformieren, dafs sie als Variabele nur die Gröfse $\frac{\lambda_r \lambda_s}{\lambda_r \pm \lambda_s}$ enthalte.

Die sekundären Linien liegen weder unter sich, noch mit den charakteristischen Linien in einem kontinuierlichen Spektrum.

Einfache Beziehungen bestehen nur zwischen den zusammengehörigen Summations- und Differenzlinien, auf die wir hier kurz eingehen wollen. Für dieselben gilt nach (276) die Gleichung:

$$\frac{i_{r-s}}{i_{r+s}} = \frac{(\lambda_r - \lambda_s)^2 [\lambda_r^2 \lambda_s^2 - l^2(\lambda_r + \lambda_s)^2]^2}{(\lambda_r + \lambda_s)^2 [\lambda_r^2 \lambda_s^2 - l^2(\lambda_r - \lambda_s)^2]^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (278)$$

wo in der That die eigene Wellenlänge, die wir kurz mit λ_- und λ_+ bezeichnen wollen, eingeführt werden kann. Man erhält in dieser Weise

$$\frac{i_-}{i_+} = \frac{\lambda_-^2}{\lambda_+^2} \left(\frac{\lambda_+^2 - l^2}{\lambda_-^2 - l^2} \right)^2, \quad \frac{\lambda_-}{\lambda_+} = \frac{\lambda_r + \lambda_s}{\lambda_r - \lambda_s} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (279)$$

und kann die gefundene Beziehung dahin aussprechen, dafs man durch zwei konjugierte sekundäre Linien — so kann man mit Recht zwei von denselben Elementen zusammengesetzte Differenz- und Summationslinien nennen — stets eine Art von kontinuierlichem Spektrum legen kann, das wir kurz mit dem Namen eines quasikontinuierlichen bezeichnen wollen. Da der Parameter l für alle Linien konstant ist, so kann man auch sagen:

Je zwei konjugierte Sekundärlinien liegen in einem und demselben quasikontinuierlichen Spektrum

$$I = I_0 \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} \left(\frac{\lambda_0^2 - l^2}{\lambda^2 - l^2} \right)^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (280)$$

dessen Intensität an den entsprechenden Punkten für alle Temperaturen der Intensität der beiden Linien proportional ist. Der Proportionalitätsfaktor kann jedoch von einem zum andern konjugierten Paar verschieden sein.

Da $\lambda_- > \lambda_+$, d. h. die Wellenlänge der Differenzlinie stets gröfser ist, als die der konjugierten Summationslinie, so folgt nach (279) dieselbe Ungleichung auch für die Intensitäten. Und da l als Eigenschwingung des Äthers von der Temperatur entweder gar nicht, oder nur sehr unbedeutend abhängt, so folgt dasselbe für das Intensitätsverhältnis zweier konjugierter Linien. Es besteht weiter zwischen denselben ein

eigentümliches Reziprozitätsgesetz, denn da die Intensität einer Sekundärlinie bei endlichen Temperaturen nicht unendlich grofs werden kann, so mufs die Summationslinie verschwinden, wenn die konjugierte Differenzlinie mit der Wellenlänge der eigentümlichen Ätherschwingung zusammenfällt, und ebenso die Differenzlinie, wenn die Äther- und Summationsschwingung identisch werden.

b) Da wir es hier zuerst mit einem Spektrum zu thun haben, welches analytisch Ähnlichkeit mit der bisher zu Grunde gelegten Spektralgleichung besitzt, so wird es vielleicht von einigem Interesse sein, dieses Spektrum, als kontinuierlich aufgefafst, näher zu untersuchen.

Dasselbe ist — wie das kontinuierliche Spektrum — eine überall positive und eindeutige Funktion der Wellenlänge, die in den Punkten $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ zugleich mit ihrem ersten Differentialquotienten Null wird. Ein eigentliches Maximum besitzt die Funktion für reelle l nicht, wird dagegen in dem Punkte $\lambda = l$ unendlich. Dieses Unendlichwerden ist, insofern l als von der Temperatur nahezu unabhängig zu betrachten ist, an keine von der Temperatur abhängige Bedingung gebunden. Zu beiden Seiten des Unendlichkeitspunktes der Intensität giebt es stets zwei Wellenlängen λ_1 und λ_2, welche dieselbe Intensität besitzen. Es besteht für sie die Beziehung

$$\lambda_1 \lambda_2 = l^2 \qquad (281)$$

Die Wellenlängen gleicher Intensität liegen also in diesem Falle auf einer gleichseitigen Hyperbel mit imaginärer Halbaxe.

Das allgemeine Integral der Intensität ist von dem des kontinuierlichen Spektrums verschieden, indem es auf Logarithmen führt, wie man auch aus dem uns bekannten Integrale direkt findet, wenn man $\mu = l\sqrt{-1}$ setzt. Es lautet

$$\int \frac{\lambda}{(\lambda^2 - l^2)^2}\, d\lambda = C - \frac{1}{2}\,\frac{\lambda}{\lambda^2 - l^2} + \frac{1}{4l}\,\text{lognat}\,\frac{\lambda - l}{\lambda + l}.$$

Entwickelt man daraus die Totalintensität zwischen den Grenzen $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$, was natürlich nur unter Ausschlufs des Punktes $\lambda = l$ geschehen kann, so erhält man

$$\Lambda = I_0\,\frac{(\lambda_0^2 - l^2)^2}{\lambda_0^2}\left\{\int_0^{l-\delta}\frac{\lambda^2}{(\lambda^2 - l^2)^2}\,d\lambda + \int_{l+\eta}^{\infty}\frac{\lambda^2}{(\lambda^2 - l^2)^2}\,d\lambda\right\}$$

$$= I_0\,\frac{(\lambda_0^2 - l^2)^2}{\lambda_0^2}\left\{\frac{1}{4l}\,\text{lognat}\,\frac{\delta(2l+\eta)}{\eta(2l-\delta)} + \frac{1}{2}\,\frac{l+\eta}{2l\eta+\eta^2} + \frac{1}{2}\,\frac{l-\delta}{2l\delta-\delta^2}\right\},$$

woraus man leicht ersieht, dafs der Hauptwert des Integrals $\Lambda = \infty$ bleibt. In einem quasikontinuierlichen Spektrum kann daher von einer Totalintensität gar nicht gesprochen werden. Aus alledem folgt, dafs ein solches Spektrum als ein kontinuierliches physikalisch gar nicht bestehen kann.

c) Auch die Breite der sekundären Linien kann unschwer aufgeschrieben werden. Wir dürfen nämlich ohne Zweifel annehmen, dafs die sekundäre Erregung des Äthers sich auf keinen gröfseren Unterschied in den Wellenlängen erstreckt, als welcher durch die Breite der charakteristischen Linien gegeben ist. Wäre dem aber auch strenge nicht so, so müfste die eigentümliche Erbreiterung der Sekundärlinie doch mit einer

so geringen Intensität in Verbindung gesetzt werden, daſs sie als unbeträchlich zu vernachlässigen wäre. Wir sind also berechtigt, die Breite der Sekundärlinien als Differentiale der charakteristischen Breiten zu betrachten.

Aus der Gleichung der Wellenlängen λ_{r+s}, die nach λ_r und λ_s differenziert werden muſs, ergiebt sich:

$$d\lambda_{r\pm s} = d\lambda_r\left[\frac{\lambda_s}{\lambda_r \pm \lambda_s} \mp \frac{\lambda_r \lambda_s}{(\lambda_r \pm \lambda_s)^2}\right] + d\lambda_s\left[\frac{\lambda_r}{\lambda_r \pm \lambda_s} \mp \frac{\lambda_r \lambda_s}{(\lambda_r \pm \lambda_s)^2}\right] \quad . \; . \; . \quad (282a)$$

worin $d\lambda_r$ und $d\lambda_s$ als die halben Breiten der charakteristischen Linien zu betrachten sind. Daraus ergiebt sich gesondert für Summations- und Differenzlinien:

$$\varepsilon_{r+s} = \frac{1}{(\lambda_r + \lambda_s)^2}[\lambda_s^2 \varepsilon_r + \lambda_r^2 \varepsilon_s] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (282b)$$

$$\varepsilon_{r-s} = \frac{1}{(\lambda_r - \lambda_s)^2}[(2\lambda_r \lambda_s - \lambda_s^2)\varepsilon_r + \lambda_r^2 \varepsilon_s) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (282c)$$

Die Breite der Summationslinie ist also stets kleiner als die Breite jeder ihr entsprechenden charakteristischen Linie. Dagegen ist die Breite der Differenzlinie nur dann kleiner als die brechbarere ihrer Erzeugenden, wenn die beiden charakteristischen Linien nicht innerhalb einer Schwingungsoktave $\left(\lambda_s > \frac{\lambda_r}{\sqrt{2}}\right)$ stehen, und kleiner als die weniger brechbare, wenn sie nicht innerhalb einer Septe (1.7071) stehen.

22. Zusammenfassung des kontinuierlichen und diskontinuierlichen Spektrums.

a) Bei manchen Untersuchungen wird es störend sein, die Wellenlängen der diskontinuierlichen Spektra als springende Veränderliche betrachten zu müssen. Man kann sie aber leicht zu stetigen Variabelen machen, wenn man die Intensitäten mit einem Faktor multipliziert, der innerhalb der Breite der Linie den konstanten Wert 1, auſserhalb derselben aber den Wert Null annimmt. Ein solcher Diskontinuitätsfaktor, der gerade unseren Zwecken entspricht, ist der folgende Ausdruck:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos xu\, du \int_a^b \cos ut . dt$$

der 1 wird, wenn $a < x < b$ ist, 0 ist, wenn $a > x > b$ wird, und $\frac{1}{2}$, wenn $x = a$, $x = b$ wird.

Setzen wir also:

$$x = \lambda, \quad a = \lambda_r - \varepsilon_r, \quad b = \lambda_r + \varepsilon_r$$

so wird der Diskontinuitätsfaktor:

$$\frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos \lambda u}{u} \sin \varepsilon_r u \cos \lambda_r u . du \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (283)$$

wo nun λ die laufende Wellenlänge bezeichnet. In dieser Form — und das ist eben der Zweck der Einführung eines stetig veränderlichen Elementes — läſst sich das diskontinuierliche Spektrum mit dem kontinuierlichen vereinen. Bezieht man die Intensitäten auf die Totalintensität des vollständigen Gasspektrums, und setzt Kürze halber:

$$\frac{3k - 3}{2} = \mathfrak{k}, \quad \frac{5 - 3k}{2} = 1 - \mathfrak{k} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (284)$$

so ist:

$$L = \frac{4}{\pi}\,\mu A\,\frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2}\left[1 - \mathfrak{k} + \frac{4}{\pi}\,\mathfrak{k}\int\limits_0^\infty \frac{\cos\lambda u}{u}\,\sin\varepsilon_1 u\,\cos\lambda_1 u\,du\right] \tag{285}$$

Hier ist nun λ eine durchaus stetige Variabele, und $\mathfrak{k}$ für vollständige Gase eine absolute Konstante. Ihre eigentlichste Bedeutung würde die vorliegende Gleichung gewinnen, wenn man statt λ_1 eine Funktion einer Variabelen einführen könnte, welche die einzelnen Wellenlängenwerte der auftretenden Linien gäbe, d. h. wenn man die diskontinuierlichen Wellenlängen selbst in Form eines analytischen Ausdruckes darstellen könnte. Wir werden später noch auf diese Frage zurückkommen.

Die zusammenfassende Gleichung der kontinuierlichen und diskontinuierlichen Spektra ist noch einer Verallgemeinerung fähig, die uns von der Betrachtung des Aggregatzustandes bei der Spektralanalyse überhaupt unabhängig macht. Analytisch werden also dann die Spektra der festen und gasförmigen Körper ganz identisch.

Betrachtet man nämlich das Verhältnis von molekularer und Atomenergie, welches bei absoluten Gasen genau konstant ist, allgemein als Funktion des Aggregatzustandes und zwar — wie es die Erscheinungen der Dissoziation, der Schmelzung, des Siedens zeigen, an denen nicht die ganze Masse des Körpers gleichzeitig teilnimmt — als stetige Funktion des Aggregatzustandes, so ist das aufgeschriebene $\mathfrak{k}$ allgemein eine vom Zustande des emittierenden Körpers abhängige Funktion, und die aufgeschriebene Gleichung überhaupt das Spektrum irgend eines festen, flüssigen oder gasförmigen Körpers. Allgemein besagt die Gleichung, daſs jedem Körper ein superponiertes kontinuierliches und Linienspektrum zukomme, die nach Maſsgabe des Verhältnisses von Atom- und Molekularenergie wirksam sind. Statt also Erbium und Didym z. B. als Ausnahmen von dem Kirchhoffschen Gesetze zu betrachten, finden wir darin nur einen spezifisch groſsen Wert des Koeffizienten des diskontinuierlichen Spektrums, und einen Beweis für die Zulässigung unserer Anschauung.

Man kann aber auch die Funktion $\mathfrak{k}$ ganz allgemein, und ohne neuere Hypothese bestimmen. Unsere dritte Parametergleichung besagt nämlich, daſs die totale innere Energie eines Körpers gegeben ist, durch

$$U = KA + \frac{k}{\mu} \tag{286}$$

wo K wahrscheinlich eine absolute, k aber eine von stofflichen Beschaffenheiten abhängige Konstante bedeutet. Wir teilen nun diese Energie in die zwei Teile M und A, die bezüglich der vollen Molekular- und Atomenergie entsprechen. Die Molekularenergie ist aber durch die vierte Parametergleichung gegeben, denn es war ganz allgemein

$$M = pv = \frac{R}{\mu} \tag{287}$$

die geleistete äuſsere Arbeit, in dem Falle, daſs die Atome innerhalb der Molekeln keine Arbeit verrichten. R ist eine, der Dichte des Stoffes verkehrt proportionale Konstante. Daraus folgt also

$$\frac{M}{U} = \frac{R}{KA\mu + k}, \quad \frac{A}{U} = \frac{KA\mu + k - R}{KA\mu + k} \tag{288}$$

b) Will man die Konstanten eliminieren, und statt derselben bloſs Gröſsen haben, welche den Zustand des emittierenden Körpers charakterisieren, während dessen stoffliche Beschaffenheit nur in den unmittelbar zugänglichen Spektralelementen ausgesprochen gewünscht werden, so sei p der Druck, v das Volumen des Körpers, Θ seine

absolute Temperatur und Q die gesamte ihm innewohnende Wärme, dann ist nach unseren Parametergleichungen:

$$\left.\begin{aligned} k &= A\,\frac{Q}{\Theta}\,(\mu\Theta) + \frac{K}{D}\,(\mu\Theta)^4 \\ R &= \mu \int_0^v p\,dv \end{aligned}\right\} \qquad (289)$$

die allgemeinste Spektralgleichung die folgende:

$$L = \frac{4}{\pi}\,\mu\varDelta\,\frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2}\left[1 - \frac{\int_0^v p\,dv}{AQ}\left(1 - \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\lambda u}{u}\,\sin\varepsilon_r u\,\cos\lambda_r u\,du\right)\right] \qquad (290)$$

Die Gleichung enthält allgemein die zwei Elemente des Spektrums und drei Zustandsvariabeln. Die letzteren allerdings in einer nicht trennbaren Weise, doch kann die Einzelberechnung mit Hilfe der Parametergleichungen vorgenommen werden.

Ganz analog wird die Gleichung, welche die vereinte allgemeine und elektive Absorption ausdrückt, lauten:

$$A = \frac{\mu^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}\right)^2\left[1 - \frac{\int_0^v p\,dv}{AQ}\left(1 - \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\lambda u}{u}\,\sin\varepsilon_r u\,.\,\cos\lambda_r u\,du\right)\right] \qquad (291)$$

Die Gleichungen können, was wohl kaum besonders erwähnt zu werden braucht, auch unmittelbar für den weniger einfachen Fall einer von der Einheit verschiedenen Stoffmenge aufgeschrieben werden. Man braucht nur an Stelle von $\varDelta$ zu setzen $\varDelta f(q)$ und die Intensität noch mit dem Faktor

$$\frac{1 - \left[1 - \frac{\mu^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}\right)\right]^q}{1 - \frac{\mu^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}\right)^2}$$

zu multiplizieren.

Für manche, besonders analytische Zwecke mag es angezeigt sein, die Intensität der einzelnen Wellenlängen eines Spektrums als bestimmtes Integral zu kennen. Man hat zu diesem Zwecke für das kontinuierliche Spektrum:

$$L = \frac{4}{\pi}\,\mu\varDelta\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty e^{-\lambda(x+y)}\,.\,\cos\mu x\cos\mu y\,dx\,dy \qquad (292a)$$

und für das diskontinuierliche

$$L = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \mu\mathfrak{L}\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{z}\cos\mu x\cos\mu y\cos\lambda z\,.\,\sin\varepsilon_r z\cos\lambda_r z\,dx\,dy\,dz \qquad (292b)$$

Es hat sich uns jedoch noch keine Gelegenheit geboten, diese Resultate zu verwerten.

23. Die Lockyersche Spektralmethode.

Das Wesentlichste über diese Methode, die ihre volle Berechtigung erst in der Theorie der Gasspektra finden kann, wurde schon bei den kontinuierlichen Spektra erwähnt, so dafs wir hier sogleich auf den theoretischen Teil der Frage übergehen

können. Ihre eminente Wichtigkeit dürfte sie dem Umstande verdanken, dafs sie die Intensitätsmessungen entbehrlich macht, und diese durch Längenmessungen ersetzt. Ist man also im Stande, eine Licht- oder Wärmequelle herzustellen, die in ihrer Temperatur von Punkt zu Punkt nur langsam aber stetig sich verändert, so bietet die Methode weitaus gröfsere Genauigkeit als photometrische Methoden irgend einer Art.

Zu bemerken ist hier noch, dafs wir der Einfachheit halber stets ein kontinuierlich gedachtes Gasspektrum voraussetzen. Es wird dies zu keinerlei Irrtümern Anlafs geben.

a) Wir schreiben also

$$L = \frac{1}{\pi D}\mu^4\Theta^4\frac{\lambda}{(\lambda^2+\mu^2)^2} \tag{293}$$

indem wir vorerst Einheit der Stoffmenge in der Gesichtslinie voraussetzen, und definieren

$$c_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi i D}} \tag{294}$$

als absolute Konstante, wenn i die minimale und konstante Intensität bedeutet, welche den Beginn der Emission charakterisiert. Da weiter $\mu\Theta$ für alle vollkommenen Gase konstant ist, so schreiben wir

$$\mu^2\Theta^2 c = 1 \tag{295}$$

wobei c nach einer früheren Entwickelung

$$c_2 = \left(\frac{k}{ADc_1}\right)^{\frac{2}{3}} \tag{296}$$

der $\frac{2}{3}$ Potenz der spezifischen Wärme bei konstantem Volumen umgekehrt proportional ist.

Setzt man nun an Stelle von L die Intensität i, bei welcher der Strahl gerade verschwindet, und bezeichnet die Länge der Linie mit Θ^{-2}, so kommt

$$\Theta^{-2} = c_1\lambda - c_2\lambda^2 \tag{297a}$$

In dieser einfachen Gleichung liegt eine überraschende Menge von Thatsachen.

Legen wir durch den der Temperatur Θ entsprechenden Punkt des Spektrums ein der Längsrichtung desselben parallelles Band von der Breite $d\Theta$, wo $d\Theta$ nur in Bezug auf die Temperatur, nicht die absolute Breite des Bandes unendlich klein zu sein braucht. Ändert sich z. B. die Temperatur mit der Höhe des Spektrums sehr langsam, so kann der erwähnte Streifen die volle Höhe des Gesichtsfeldes erfüllen. In diesen Streifen werden nun alle Linien hineinragen, deren Länge gröfser ist als Θ^{-2}, oder diese Gröfse noch erreichen. Die Zahl der Linien, welche dieser Ungleichung genügen, ist die Zahl der Linien, die in dem Spektrum des betreffenden Stoffes bei der Temperatur Θ überhaupt sichtbar sind. Schreibt man

$$z = c_1\lambda - c_2\lambda^2 - \Theta^{-2} \tag{297b}$$

so ist eine Linie sichtbar oder nicht sichtbar, je nachdem für ihre Wellenlänge λ und die herrschende Temperatur Θ, z positiv oder negativ ist. Man kann daher die Zahl der Linien, ist nur die absolute Zahl n derselben bekannt, durch ein bestimmtes Integral ausdrücken.

Bekanntlich ist

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin \alpha y}{y}\,dy = 1,\quad 0,\quad -1$$

je nachdem

$$\alpha > 0, \quad \alpha = 0, \quad \alpha < 0$$

ist. Es wird daher das Integral

$$\tfrac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin ay}{y}\, dy \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (298)$$

unter denselben Bedingungen resp. 1, $\tfrac{1}{2}$ und 0. Die Zahl n der bei der Temperatur Θ sichtbaren Linien ist also:

$$\nu = \tfrac{1}{2}n + \frac{1}{\pi}\sum_1^n {}_r \int_0^\infty \sin\left(c_1\lambda_r - c_2\lambda_r^2 - \Theta^{-2}\right) y \cdot \frac{dy}{y} \quad \ldots \ldots \quad (299)$$

Dafs die Hälfte der den Streifen von unten berührenden Linien auch als sichtbar mitgezählt ist, ist hier von keinem Belange. Will man darüber aber ganz klar sein, so braucht man nur die Rechnung zu wiederholen, nachdem man den Streifen wieder um eine unendlich kleine Strecke verschoben hat.

Untersuchen wir nun die Längenkurve der Linien (unter Voraussetzung stetig variabeler Wellenlängen).

Sie beginnt bei $\lambda = 0$ mit dem Werte $\Theta^{-2} = 0$, erreicht in dem Punkte

$$\lambda_0 = \frac{c_1}{2c_2}, \quad \Theta_0^{-2} = \frac{c_1^2}{4c_2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (300)$$

ein Maximum von der angegebenen Gröfse, und verschwindet wieder im Punkte $\lambda = \frac{c_1}{c_2}$.

Was die Sichtbarkeit der Linien bei gegebenen Temperaturen anbelangt, so finden wir aus (297b): z beginnt bei dem Werte $\lambda = 0$ mit $-\Theta^{-2}$ und bleibt negativ bis zur Wellenlänge:

$$\lambda_1 = \frac{c_1}{2c_2} - \sqrt{\frac{c_1^2}{4c_2^2} - \frac{\Theta^{-2}}{c_2}} \quad \ldots \quad (301)$$

tritt dort ins Positive über, durchwandert das angegebene Maximum, um bei

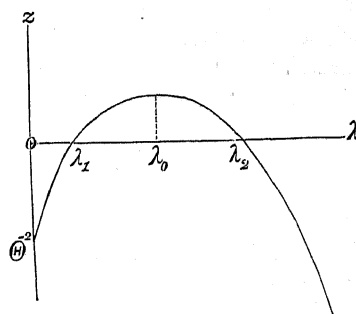
$$\lambda_2 = \frac{c_1}{2c_2} + \sqrt{\frac{c_1^2}{4c_2^2} - \frac{\Theta^{-2}}{c_2}} \quad \ldots \quad (302)$$

wieder negativ zu werden und im Punkte $\lambda = \infty$ den Wert $-\infty$ anzunehmen. Das Gebiet, innerhalb dessen allein sichtbare Linien vorkommen, ist zwischen λ_1 und λ_2 gelegen, und seine Ausdehnung hängt gröfstenteils von der Temperatur allein ab. Vergröfsert sich diese, so geschieht dasselbe mit dem linienreichen Raum, indem λ_1 gegen das Ende der kurzen, λ_2 gegen das der langen Wellen anrückt. Bemerkenswert ist, dafs sich der Raum der sichtbaren Linien (nicht aber die Intensität derselben) nach beiden Seiten symmetrisch verändert, während das Maximum der Lage und Gröfse nach unverändert bleibt. Wird die Temperatur kleiner als

Fig. 20.

$$\Theta = \frac{2\sqrt{c_2}}{c_1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (303)$$

so hat die Kurve der z gar keinen positiven Zweig mehr, alle Linien verschwinden. Die zuletzt übrig bleibende Linie ist aber gerade die längste — so dafs man sagen kann:

Ein jedes Gasspektrum besitzt in der Nähe der Linie $\lambda = \frac{c_1}{2c_2}$ eine und nur eine längste Linie, auf welche sich das Spektrum bei abnehmender Temperatur und konstanter Dichte endlich reduziert. Zöllner findet denselben Satz für Druckveränderungen des Spektrums, und Frankland und Lockyer ist es thatsächlich gelungen, das Spektrum

von Hydrogen und Nitrogen auf eine Linie zu reduzieren Die Lage derselben hangt nur von der Beschaffenheit des Gases ab

b) Viel verwickelter werden die Verhaltnisse, wenn die emittierende Stoffmenge eine andere als die Einheit ist Zunachst andert sich der analytische Ausdruck des Draperschen Gesetzes selbst Denn bezeichnet λ die Grenzwellenlange des Spektrums auf der Seite des Violetts, so hatten wir

$$\lambda^2 = \frac{1}{4}\frac{\mu^3}{A}\pi\iota + \frac{1}{8}\frac{\mu^4}{A^2}\pi\iota + \ldots \tag{304}$$

Ist nun aber die Stoffmenge grofser als Eins, so wird auch A die Totalintensitat grofser da sie sich ja fur wachsende Stoffmenge der Intensitat eines gleich temperierten schwarzen Korpers nahern soll, und mithin wird die unendlich kleine, aber sonst konstante Intensitat ι schon bei einer kleineren Wellenlange eintreten Wir haben diese Wellenlange aus der Gleichung

$$\iota = \frac{4}{\pi}\mu A \frac{\lambda}{(\lambda^2+m^2)^2}\left\{1-\left[1-\frac{\mu^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}\right)^2\right]^q\right\} \tag{305a}$$

oder der ihr gleichbedeutenden

$$\pi\iota m^{4q}(\lambda^2+m^2)^2(\lambda^2+\mu^2)^{2q}$$
$$= 4\mu m^{4q}A\lambda^2(\lambda^2+\mu^2)^{2q} - 4\mu A\lambda^2\left[m^4(\lambda^2+\mu^2)^2 - \mu^4(\lambda^2+m^2)^2\right]^q \tag{305b}$$

zu berechnen Es darf jedoch stets vorausgesetzt werden, dafs ι so klein ist, dafs hohere als die erste Potenz durchaus unmerklich sind Wollte man aber dieses Problem nach der Methode der Umkehrung der Funktionen behandeln, so gelangte man zu ganz unabsehbaren Resultaten Wir wollen daher annehmen, dafs, da λ schon an und fur sich sehr klein ist, so dafs bei dem in diesem Falle schon der Einheit nahe Absorptionskoeffizient eine beliebige Potenz desselben ebenfalls nahe gleich Eins bleibt, die hinzutretende Stoffmenge einfach so berucksichtigt werden kann, dafs in der Gleichung

$$\iota = \frac{4}{\pi D}\mu^4 O^4 \frac{\lambda}{(\lambda^2+\mu^2)^2}\;\frac{1-(1-A)^q}{A}$$

an Stelle der Wellenlange, die in A enthalten ist, $\lambda^2 = \frac{1}{4}\frac{\mu^3}{A}\pi\iota$ oder auch $\lambda^2 = \frac{m^3}{H}\pi\iota$ gesetzt wird Das Absorptionsvermogen wird dann

$$A = \frac{\mu^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}\right)^2 = \left(\frac{1+\frac{1}{4}\pi\iota\frac{m}{H}}{1+\frac{1}{4}\pi\iota\frac{\mu}{A}}\right)^2 = 1-\frac{1}{2}\pi\iota\left(\frac{\mu}{A}-\frac{m}{H}\right) \tag{306}$$

und damit erhalt man als Ausdruck des Draperschen Gesetzes

$$\lambda^2 = \iota\frac{\pi}{4}\frac{\mu^3}{A}\;\frac{1-\frac{1}{2}\pi\iota\left(\frac{\mu}{A}-\frac{m}{H}\right)}{1-\left[\frac{1}{2}\pi\iota\left(\frac{\mu}{A}-\frac{m}{H}\right)\right]^q}$$

oder in der ublichen Form

$$\frac{\mu^3}{A}O^4\;\frac{1-\frac{\pi\iota}{2}\left(\frac{\mu}{A}-\frac{m}{H}\right)}{1-\left[\frac{\pi\iota}{2}\left(\frac{\mu}{A}-\frac{m}{H}\right)\right]^q} = D \tag{307}$$

die fur $q = 1$ in die schon bekannte Formel ubergeht

Die Längengleichung der Linie wird nun:

$$\Theta_q^{-2} = c_1 \left\{ \frac{1 - \frac{\pi\iota}{2}\left(\frac{\mu}{A} - \frac{m}{H}\right)}{1 - \left[\frac{\pi\iota}{2}\left(\frac{\mu}{A} - \frac{m}{H}\right)\right]^q} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \frac{1 - \left[1 - \frac{\mu^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}\right)^2\right]^q}{\frac{\mu^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}\right)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \lambda - c_2\lambda^2 \quad . \quad . \quad (308)$$

wo c_1 die frühere Bedeutung hat, und λ die Wellenlänge der Linie ist. Hier läfst sich eine Reihenentwickelung nach steigenden Potenzen von q leicht vornehmen. Wir führen sie für den Fall durch, dafs die q Potenz des Nenners aufser Acht gelassen werden kann. Es ist:

$$\sqrt{1-(1-A)^q} = 1 - \sum_1^\infty{}_n \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n n!}(1-A)^{nq}$$

und der nach q genommene Differentialquotient:

$$\frac{d^\varrho\sqrt{1-(1-A)^q}}{dq^\varrho} = -\sum_1^\infty{}_n \frac{1.3.5..(2n-3)}{2^n n!} n^\varrho (\log(1-A))^\varrho (1-A)^{nq}$$

Entwickelt man nach einer Mac-Laurinschen Reihe um den Punkt $q = 1$, so kommt:

$$\Theta_q^{-2} = \Theta_1^{-2} - c_1 \frac{m^2}{\mu^2}\left(\frac{\lambda^2+\mu^2}{\lambda^2+m^2}\right) \left\{ \frac{1 - \frac{\pi i}{2}\left(\frac{\mu}{A} - \frac{m}{H}\right)}{1 - \left[\frac{\pi\iota}{2}\left(\frac{\mu}{A} - \frac{m}{H}\right)\right]^q} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\left[\frac{(q-1)}{1!}\sum_1^\infty \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2^n.n!} n \lg.(1-A).(1-A)^n\right.$$

$$\left. + \frac{(q-1)^2}{2!}\sum_1^\infty \frac{1.3..(2n-3)}{2^n n!} n^2 (\log(1-A))^2 (1-A)^n + \cdots \right.$$

oder endlich

$$\Theta_q^{-2} = c_1\lambda - c_2\lambda^2 - \frac{m^2}{\mu^2}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}\right) \left\{ \frac{1 - \frac{\pi\iota}{2}\left(\frac{\mu}{A} - \frac{m}{H}\right)}{1 - \left[\frac{\pi\iota}{2}\left(\frac{\mu}{A} - \frac{m}{H}\right)\right]^q} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\sum_1^\infty{}_r \frac{(q-1)^r}{r!} \left\{\log\left[1 - \frac{\mu^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}\right)^2\right]\right\}^r \sum_1^\infty{}_n \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2^n n!} n^r \left[1 - \frac{\mu^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}\right)^2\right]^n \quad (309)$$

Statt des hier benutzten Absorptionskoeffizienten kann man natürlich auch jenen einführen, der sich auf das vorkommende μ bei einheitlicher Stoffmenge bezieht. Man hat nämlich:

$$\mu^2 = \frac{c_1}{c_2}\lambda - \lambda^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (310)$$

zu setzen, und damit wird:

$$\frac{\mu^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}\right)^2 = \frac{(c_1 - c_2\lambda)^2(\lambda^2+m^2)^2}{c_1^2 m^4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (311)$$

Obwohl diese Resultate verhältnismäfsig einfach sind, lassen sie sich doch schwer überblicken, und es wird daher nicht überflüssig sein, dieselben für den leichteren Fall eines unendlich geringen Absorptionsvermögen aufzuschreiben. Dieses trifft allgemein bei Gasen zu, und zwar umsomehr, je tiefer ihre Temperatur ist. Dann können wir, da der erste Faktor von c_1 in (308) sich unendlich der Einheit nähert, kurz schreiben:

$$\Theta^{-2} = c_1\sqrt{q}.\lambda - c_2\lambda^2$$

und folgendermafsen in Worten aussprechen:

Mit Vergrofserung der Stoffmenge des emittierenden Korpers verlangern sich seine Linien, der Raum innerhalb welcher diese sichtbar sind, und deshalb auch die Zahl derselben Die Temperatur innerhalb welcher die letzte Linie verschwindet tritt um so eher ein je grofser die Stoffmenge ist Diese bestimmt auch die jeweilige langste Linie des Spektrums je grofser der Druck oder die Dichte des Gases ist, eine desto brechbarere Linie wird die Rolle der langsten ubernehmen Ist endlich die Stoffmenge kleiner als

$$q = \frac{4c}{c_1^2 O} \tag{312}$$

so tritt bei der Temperatur O keine einzige Linie mehr auf Diese Grenze der Stoffmenge ist um so eher erreicht, je hoher die Temperatur des Gases ist

Alle diese Satze sind von der Erfahrung bestatigt teils durch unmittelbar angestellte Beobachtungen, teils aus Abstraktionen, die nun als Regeln der praktischen Spektralanalyse bekannt sind Bunsens[1] Satz Diejenigen Stoffe, deren Spektra schon bei niederen Temperaturen zum Vorschein kommen, werden immer am zweckmafsigsten in der Gasflamme und nicht im Funken beobachtet, findet in unsern letzten Folgerungen seinen theoretischen Grund Auch Lockyers Beobachtungen stimmen ausnahmslos mit unseren Folgerungen uberein Die letzte Gleichung kann als analytischer Ausdruck der Empfindlichkeit der Spektralanalyse angesehen werden uber welche zahlreiche Beobachtungen vorliegen

Wir haben nun gesehen, dafs es im allgemeinen auf zwei Arten moglich ist, ein Spektrum zu vereinfachen durch Verminderung der Stoffmenge und durch Erniedrigung der Temperatur Die einfachen Spektra der Kometen, Nebelflecke, der aufsersten Sonnenhullen, des Nord- und Zodiakallichtes finden gewifs hierin ihre Erklarung

24 Lange der sekundaren Linien

In diesem Abschnitte wollen wir unter diesem Namen nicht nur jene Linien begreifen, welche durch Kombinationsschwingungen der charakteristischen Linien entstehen, sondern auch jene, die ihr Auftreten der Beimengung geringer anderer Stoffmengen, als die der Untersuchung vorliegenden verdanken

Schreibt man die Intensitat der Kombinationslinie in der Form

$$i = C L_1 L_2 \tag{313}$$

wo mit C der aus (276) entnommene und von der Temperatur nahezu unabhangige Faktor bezeichnet ist, so stellt sich die Langengleichung der sekundaren Linien in der Form dar

$$O^{-4} + c\, O^{-2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) = Cc_1 \sqrt{i}\, \lambda_1 \lambda_2 - c_2\, \lambda_1^2 \lambda_2 \tag{314}$$

welche, obzwar der Gleichung fur die Hauptlinien ganz analog, sich doch schwer mit dieser vergleichen lafst Das bemerkenswerte ist, dafs rechterseits der sehr kleine Faktor $\sqrt{i}$ vorkommt, woraus man schon schliefsen mufs, dafs O^{-2} selbst klein sein mufs Nehmen wir den einfachen Fall, dafs die sekundare Linie eine Oktave von λ betrage dann wird

$$O^{-2} = \sqrt[4]{i}\,\sqrt{C}\, c_1 \lambda - c_2 \lambda \tag{315}$$

Da nun C eine endliche Zahl ist, so ist das erste Glied rechter Hand immer sehr klein,

[1] Pogg Ann CLV 367

mithin auch Θ^{-2} selbst. Wäre $\lambda = \frac{c_1}{2c_2}$ also gerade der günstigste Fall, so ist $2\sqrt[4]{C} - 1$ das Verhältnis der Längen der sekundären zur primären Linie.

Übersichtlicher gestaltet sich die Sache, wenn man die Intensität i einer Linie, die sich auf die Temperatur Θ beziehen mag, auf die Intensität i_0 derselben Linie bei der Temperatur Θ_0 bezieht. Man erhält dann:

$$\frac{i}{i_0} = \frac{\mu^8 \Theta^8}{\mu_0^8 \Theta_0^8} \frac{(\lambda_r^2 + \mu_0^2)^2 (\lambda_s^2 + \mu_0^2)^2}{(\lambda_r^2 + \mu^2)^2 (\lambda_s^2 + \mu^2)^2} \quad \ldots \ldots \quad (316)$$

Hier substituieren wir nun dasjenige μ, welches die charakteristische Linie der λ_r gerade auf die Intensität ι herabdrückt. d. h.

$$\mu = \frac{c_1}{c_2} \lambda_r - \lambda_r^2$$

und suchen die entsprechende Intensität ι_1 der sekundären Linie. Mit anderen Worten: wir suchen die Intensität der sekundären Linie in der Höhe, in welcher die charakteristische gerade verschwindet. Man erhält dafür:

$$\sqrt{\frac{\iota_1}{i_0}} = \frac{(\lambda_r^2 + \mu_0^2)(\lambda_s^2 + \mu_0^2)}{\frac{c_1}{c_2} \lambda_r \left(\frac{c_1}{c_2} \lambda_r + \lambda_s^2 - \lambda_r^2 \right)} \quad \ldots \ldots \quad (317)$$

während sich dasselbe Verhältnis bei der charakteristischen Linie zu

$$\sqrt{\frac{\iota}{L_0}} = \frac{\lambda_r^2 + \mu_0^2}{\frac{c_1}{c_2} \lambda_r} \quad \ldots \ldots \quad (318)$$

ergiebt. Vergleichen wir die beiden, so haben wir rechter Hand einen endlichen Ausdruck von 0-ter Ordnung. Früher fanden wir, dafs die Intensitäten der sekundären Linien um eine Ordnung kleiner sind als die der primären; dann mufs aber auch ι um eine Ordnung höher sein als ι_1. Mit Worten: In gleicher Höhe mit einer charakteristischen Linie ist die Intensität einer sekundären um eine volle Gröfsenordnung kleiner. Daraus folgt aber, dafs bei gleicher Intensität der beiden (im besonderen bei der Schwellenintensität ι) die sekundäre um eine Längenordnung kürzer sein mufs.

Auf die Klasse der beigemengten Linien übergehend, machen wir im Vorhinein die in der Natur der Sache gelegene Annahme, dafs die Beimengung eine unendlich kleine sei. Entwickelt man dann die Gleichung (308) nach Potenzen von q, wobei bei der ersten stehen geblieben werden kann, so kommt:

$$\Theta^{-2} = -c_1 q \frac{\lg.(1-A)}{A} \lambda - c_2 \lambda^2 \quad \ldots \ldots \quad (319)$$

wobei das erste Glied, da $1 - A$ ein echter Bruch ist, immer positiv ist. Wir haben nun schon vorher gesehen, dafs der Einflufs der Stoffmenge ein maximaler wird, wenn A unendlich klein ist. Man hat dann, wie früher:

$$\Theta^{-2} = c_1 q \lambda - c_2 \lambda^2 \quad \ldots \ldots \quad (320)$$

Da es uns hier nicht auf die Natur des beigemengten Stoffes ankommt, sondern auf die maximale Länge der beigemengten Linien überhaupt, so mufste man natürlich von einem speziellen Absorptionsvermögen unabhängig werden. Daraus folgt sogleich der Satz:

Die Längen der beigemengten Linien verhalten sich zu den charakteristischen nahezu wie die prozentischen Beimengungen selbst.

Da man nicht voraussehen kann, ob das Auge, oder überhaupt irgend ein spektroskopisches Reagens, das für verschiedene Farben bekanntlich ganz verschiedene

Empfindlichkeiten besitzt, eine sekundäre Linie mit einem Blicke erkennt, so erforderte es fast in jedem gegebenen Falle einer besonderen nicht eben einfachen Untersuchung Lockyers Methode dagegen trennt die beigemengten und die Kombinationslinien mit einem Blicke, und thatsächlich hat sie Lockyer zu diesem Zwecke benutzt, indem er von der Voraussetzung ausging, daſs die längsten Linien eines Stoffes als geringe Beimengungen eines anderen Stoffes als kurze Linien des neuen Spektrums erscheinen

25 Breitenbestimmung der Linien

Da die Spektrallinien nicht geometrische Linien, sondern ausgedehnte Streifen sind, deren Breite hauptsächlich von Wellenlänge und Temperatur abhängt, so folgt daſs nach der Lockyerschen Methode beobachtet, auch die Breite ein- und derselben Linie in derselben Lichtquelle Veränderungen unterworfen sein muſs In der That finden wir diese Erscheinung überall da, wo wir mit Fernrohr und Spektroskop (Fernrohrbeobachtungen entsprechen ausnahmslos der Lockyerschen Methode) Lichtquellen von nicht gleichmäſsiger Temperatur beobachten Man denke nur an die eigentümliche — konvexlinsendurchschnittartige Form der Kometenlinien

Wenn sich nun die Breite der Linie ändert, und beispielshalber stets schmäler wird, so wird es einen Punkt geben, wo sie wirklich zur geometrischen Linie wird und verschwindet Diesem Punkte entspricht ein ganz bestimmtes μ Da nun eben dieses μ des Verschwindungspunktes auch aus der Intensität der Linie gefolgert werden kann, so haben wir ein Mittel gewonnen, die Konstanten der Breitengleichung zu bestimmen Es ergiebt sich für diesen Punkt

$$\mu = \frac{\varepsilon_1\lambda_1 - \varepsilon_2\lambda_2^2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = \frac{c_1}{c}\,\lambda_1 - \lambda_2 \tag{321}$$

was wieder ein Beweis dafür ist, daſs die Breite der Linien nicht als selbständiges spektroskopisches Element aufgefaſst werden kann

26 Spektralverwandtschaften

Insoweit bisher von theoretischer Spektralanalyse gesprochen werden konnte, ging ihr hauptsächliches Streben auf die Darstellung der Wellenlängen hinaus, die in den Spektra verschiedener Stoffe vorkommen Zumeist war die Grundlage eine akustische Schwingungsanalogie, zum Teil wohl auch nur empirische Formeln, die sogar nicht einmal auf Wellenlängenangaben basierten

a) Einen der schönsten Erfolge auf diesem Gebiete hat Stoney[1] zu verzeichnen, der die Linien $H\alpha$, β γ des Wasserstoffs als Oberschwingungen der Welle 13 127714 (unserer Einheit) darstellt Wegen der Vergleichung mit einem späteren Resultate mögen die Daten hier folgen

Beobachtete Wellenlänge	Berechnete Wellenlänge	als Oberton
0 410237	0 410241	32
0 486211	0 486212	27
0 656393	0 656386	20

[1] Phil Mag 1871 April

Wir finden hauptsächlich zwei Gründe, die die Behandlung der Frage nach den Spektralverwandtschaften zu einer sehr schwierigen macht. Erstens ist unsere Kenntnis der qualitativen Eigenschaften der Spektra eine viel beschränktere, als man gewöhnlich anzunehmen geneigt wäre. Aber man vergleiche die existierenden Spektraltafeln, und wolle nur die charakteristischen Linien der Stoffe ohne Lücken aufzuschreiben versuchen. Da ist z. B. Balmers vortreffliche Formel, welche mit erstaunlicher Genauigkeit die Beobachtungen des Wasserstoffspektrums wiedergiebt, und welche für jedes Element anzuwenden wäre, wenn man nur die Wellenlängen von drei Strahlen kennt, deren laufende Zahl (natürlich auf irgend einen Ausgangspunkt bezogen) angebbar ist. Es genügten also auch drei aufeinander folgende Linien. Man versuche diese einfache Aufgabe zu lösen: kaum ein Elementenspektrum, welches man zu Grunde zu legen wagte. Lockyer scheint diesen Mangel zuerst am tiefsten empfunden zu haben, denn er wiederholte nicht bloſs die Beobachtungen der Spektra, er wiederholte sie mit einer neuen dazu ersonnenen Methode.

Die zweite Schwierigkeit ist, daſs die gesetzmäſsige Bestimmung der ausgestrahlten Wellen eine Erklärung einer Eigenschaft der Materie involviert; schwierige Fragen der Physik. Daher ist auch an eine Analogie von Licht und Ton nicht zu denken, denn letzterer ist ein zufälliger Zustand des Körpers, ersteres (auch in der weiteren Bedeutung der Wärme natürlich) eine notwendige Folge seiner Existenz.

b) Bevor wir auf den Versuch einer mathematischen Behandlung des Gegenstandes, die nur auf den bislang benutzten Entwickelungen, ohne Hinzuziehung neuer beruht, eingehen, teilen wir die Ergebnisse J. Balmers mit, die Prof. E. Hagenbach[1] in ausgedehnterer Weise verwertete.

Für die vier Linien des Wasserstoffs stellte Balmer die empirische Formel auf:

$$\lambda = h\frac{m^2}{m^2-4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (322)$$

in welcher h eine Konstante, und m die laufende Zahl von $m=3$ angefangen bedeutet. Die Formel wurde bald auf die von Huggins photographierten Hydrogenspektra der weiſsen Sterne, auf Photographieen der ultravioletten Partieen von H. W. Vogel usw. angedeutet. Für die ersten 13 Linien des Wasserstoffs ergiebt sich:

Hydrogenlinie	m	λ berechnet	λ nach Cornu.	λ berechnet	λ nach Müller u. Kempf.
α	3	0.656 18	0.656 21	0.656 317	0.656 314
β	4	486 06	486 07	486 161	486 164
γ	5	433 98	433 95	434 072	434 071
δ	6	410 11	410 12	410 198	410 198
ε	7	396 95	396 92	397 031 (396 879) für den dunkelsten Teil von H_1.	
ζ	8	388 84	388 81		
η	9	383 48	383 49		
Θ	10	379 73	379 73		
ι	11	377 00	376 99		
$\varkappa$	12	374 96	375 02		
λ	13	373 38	373 41		
μ	14	372 14	372 11		
ν	15	371 14	371 12		

$H\varepsilon$ liegt, wie schon H. W. Vogel bemerkt hat, vor dem dunkelsten Teil von H_1.

[1] Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft. Basel. September 1886.

Für die Messungen Cornus ist $h = 0{,}364542$, für die von Müller und Kempf $h = 0{,}3646205$ angenommen worden. Für andere Elemente scheint sich die Formel ebenfalls zu bewähren, doch ist hierüber noch nichts näheres bekannt geworden. Die Bedeutung der Konstanten h ist hier vor der Hand, wie Balmer selbst angiebt, noch dunkel.

c) Um nun die Spektralverwandtschaften theoretisch zu untersuchen, gehen wir wieder von dem Gleichungssysteme der Amplituden diskontinuierlicher Spektra aus (23)

$$\left.\begin{array}{l} 0 = -\alpha_1\sigma_1 + \alpha_2 p_{12} + \alpha_3 p_{13} + \cdots + \alpha_n p_{1n} + \varepsilon \\ 0 = \alpha_1 p_{21} - \alpha_2 \sigma_2 + \alpha_3 p_{23} + \cdots + \alpha_n p_{2n} + \varepsilon \\ \cdots \\ 0 = \alpha_1 p_{n1} + \alpha_2 p_{n2} + \alpha_3 p_{n3} + \cdots - \alpha_n \sigma_n + \varepsilon \end{array}\right\} \qquad (323)$$

was umsomehr erlaubt ist, als ja alle Folgerungen aus diesen Gleichungen auch auf anderem Wege ableitbar waren. Wir setzen nun für die Amplitude ihren Wert

$$\alpha_n = C \frac{\lambda_n^2}{\lambda_n^2 + \mu^2}, \quad \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon \qquad (324)$$

und stellen uns die Aufgabe λ zu berechnen. Ist kürze halber

$$\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \mu^2} = x, \quad \lambda^2 = \mu^2 \frac{x}{1-x} \qquad (325)$$

gesetzt, so wird

$$\sigma = \frac{\varrho}{x} - \varrho, \quad \varrho = \frac{4\pi^2 c^2}{\mu^2} \qquad (326)$$

wo c wieder die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Strahlung bedeutet. Dadurch wird unser Gleichungssystem zum folgenden

$$\left.\begin{array}{l} \varrho x_1 + p_{12} x_2 + p_{13} x_3 + \cdots + p_{1n} x_n = \varrho - \varepsilon \\ p_{21} x_1 + \varrho x_2 + p_{23} x_3 + \cdots + p_{2n} x_n = \varrho - \varepsilon \\ \cdots \\ p_{n1} x_1 + p_{n2} x_2 + p_{n3} x_3 + \cdots + \varrho x_n = \varrho - \varepsilon \end{array}\right\} \qquad (327)$$

Ist nun Δ die Determinante dieses Systems, also

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varrho & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & \varrho & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & \varrho \end{vmatrix} \qquad (328)$$

und Δ_r deren Wert, wenn die $r$te Vertikalreihe durch lauter Einsen ersetzt wird, so ist allgemein

$$x_r = \frac{\Delta_r}{\Delta} (\varrho - \varepsilon) \qquad (329)$$

und hieraus kraft der Bedeutung von x

$$\lambda_r = \mu \sqrt{\frac{\Delta_r (\varrho - \varepsilon)}{\Delta - \Delta_r (\varrho - \varepsilon)}} \qquad (330)$$

Für ein und denselben Stoff kann nun Δ als konstant angesehen werden, und da, je nachdem man r die Zahlenreihe von 1 bis n durchlaufen läfst, Δ_r stets andere Werte annimmt, so kann man Δ_r überhaupt als Funktion der laufenden Zahlen betrachten. $\varrho - \varepsilon$ ist offenbar eine Gröfse, die nur von der Beschaffenheit und dem Zustande des Körpers abhängt, während die erwähnte Funktion der laufenden ganzen Zahlen nur von stofflichen, nicht auch von zuständlichen Beschaffenheiten abhängige Konstante enthalten kann. Bezeichnet man diese Funktion

$$\frac{\varDelta}{\varDelta_r(\varrho-\varepsilon)}=\varphi(r) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (331)$$

mit $\varphi(r)$, so hat man ganz allgemein:

$$\lambda_r^2=\mu^2\frac{1}{\varphi(r)-1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (332)$$

wo nun allerdings die Theorie keine weiteren Mittel zur Bestimmung dieser Funktion liefert. Ist sie aber einmal auf empirischem Wege bestimmt, so gestattet sie manchen Rückschlufs auf die Atomkräfte, indem dann das folgende — allerdings sehr allgemeine — Problem vorliegt:

Gegeben ist eine symmetrische Determinante von n^2 Elementen mit bekannter hauptdiametraler Reihe. Ersetzt man die n-ten Vertikalreihen durch lauter Konstante, so erhält man für das Verhältnis der Hauptdeterminante zu der abgeleiteten eine bekannte Funktion der laufenden Zahlen 1 bis n. Was folgt daraus für die $\frac{n(n-1)}{2}$ unbekannten Elemente?

Denkt man sich nun unsere Determinante so verallgemeinert, dafs sie nicht den mittleren Zustand einer Molekel darstellt, sondern die gleichzeitigen Schwingungszustände einer ganzen Anzahl von Molekeln, oder analytisch ausgedrückt: interpolieren wir zwischen die n^2 Elemente beliebige viel Übergangselemente, so entfällt aus der Determinante gewifs derjenige Einflufs der Stoffbeschaffenheit, der von der Anzahl der Glieder abhängt. Die Funktion $\varphi(r)$ wird, wenn man jetzt der Variabilität von r keine Grenze setzt, höchst wahrscheinlich für alle Körper dieselbe Form besitzen. Diese gemeinsame Form ist aber dann durch die Balmersche Gleichung bestimmbar. Man beachte die Analogie beider Gleichungen, wenn man die Balmersche in die Form bringt:

$$\lambda^2=h^2\frac{1}{1-\frac{k^2}{m^4}(2m^2-k^2)}$$

Durch Vergleichung findet man sogleich:

$$h^2=-\mu^2,\ \varphi(r)=\frac{k^2}{r^2}(2r^2-k^2) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (333)$$

Nun besteht in diesem Resultate ein scheinbarer Widerspruch. Nach Balmers Formel ist h eine Konstante, unser μ hängt aber von der Temperatur ab. Ebenso die Funktion $\varphi(r)$, die noch aufserdem in ε die Amplitude der Schwingung in sich fafst. Nach allen Erfahrungen ist aber die Wellenlänge des ausgestrahlten Lichtes von der Temperatur und der Intensität unabhängig. Es mufs also sein:

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\frac{\mu^2}{\varphi(r)-1}\right]=0,\ \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[\frac{\mu^2}{\varphi(r)-1}\right]=0\ , \quad \ldots \ldots \ldots \quad (334)$$

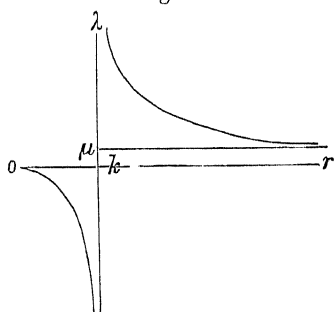
Da der eingeklammerte Ausdruck μ enthält, wie wir eben erwähnt, so fordert die Gleichung, dafs in der Balmerschen Gleichung dasjenige μ vorkomme, welches bei wachsender Temperatur nicht mehr kleiner gemacht werden könne. Dafs die Gleichung nun gerade ein Minimum fordere, kann man unserer Ansicht nach so erhärten: Nimmt die Temperatur eines Körpers stetig ab, so bleibt er identisch derselbe Körper, bis seine Temperatur $\Theta=0$, $\mu=\infty$ wird. Anders dagegen bei zunehmender Temperatur, wo er nicht unbedingt den Wert $\mu=\infty$ zu erreichen braucht, da wie wir mit ziemlicher Sicherheit voraussetzen, ein jeder Körper schon bei niedrigeren Temperaturen dissoziiert wird, in einfachere Bestandteile zerfällt. μ wäre mithin die Temperaturfunktion μ im

Augenblicke der Dissoziation In diesem Augenblicke wird aber die Kraft ε mithin auch $\frac{\varepsilon}{c}$ gleich Null — denn sie war es ja, die zur Anziehung der Molekeln hinzugelegt, das System aus dem gegenwärtigen Zustande in den der vollständigen Dissoziation überführte Es befriedigt daher μ = Minimum zugleich die beiden hingeschriebenen Gleichungen Ein Beispiel wird sogleich zeigen, dafs diese Definition nichts Ungereimtes enthalt Nach der Balmerschen Formel ist fur Hydrogen $\mu = 0\,3646$ während wir fur das μ des Wasserstoffs in der Sonnenchromosphäre den Wert $\mu = 0\,5561$ fanden Da nun bei (vollkommenen) Gasen die μ der Temperatur invert proportional sind, so folgt daraus, dafs die Temperatur der Chromosphäre noch etwa $\frac{3}{2}$ mal so grofs sein mufste, um dissoziiertes Hydrogen zu enthalten Das Vorkommen desselben ist also in tieferen Schichten der Photosphäre theoretisch wahrscheinlich gemacht Ist man also im Stande, die Balmersche Gleichung fur irgend einen Korper zu entwickeln, wozu es nur der genauen Kenntnis der Wellenlangen seines diskontinuierlichen Spektrums bedarf, so ist somit auch seine Dissoziationstemperatur gegeben

Die Konstante h läfst sich a priori nicht bestimmen und hat eine verschiedene Bedeutung, je nachdem die Gleichung

$$\mu = h \quad \text{oder} \quad \mu = -h'$$

bestunde Nehmen wir an, h der Balmerschen Formel wäre eine ganze Zahl Dann bedeutet sie im ersten Falle die Anzahl der Linien, welche ein Stoff wirklich emittiert, im zweiten Falle dagegen die Ordnungszahl der unendlich langen Welle Liefse sich nun beweisen, dafs die unendlich lange Welle allen Stoffen gemeinsam ist so wäre damit (die allgemeine Giltigkeit der Balmerschen Formel naturlich vorausgesetzt) auch die Ganzzahligkeit von h bewiesen Wahrscheinlich zum mindesten ist es, dafs in dem Gewirre unzähliger Molekeln auch solche von zeitweiliger Ruhe vorkommen, wie denn auch in der That das Maxwellsche Gesetz erst fur die ruhenden Molekeln die wahrscheinliche Anzahl Null ergiebt Eine ruhende Molekel emittiert aber Strahlen von unendlich grofser Wellenlange

Fig 21

Die Kurve der Balmerschen Gleichung (Fig 21) besteht aus zwei Asten, deren erster im Punkte $r = 0$ mit $\lambda = 0$ beginnt, und in $r = h$, $\lambda = -\infty$ wird Hier erfolgt ein Sprung auf $\lambda = +\infty$, und assymtotische Annaherung an die der Abszissenaxe parallele Gerade $\lambda = \mu$

Um die Balmerschen Konstanten fur ein Spektrum zu berechnen, braucht man drei Wellenlangen λ_1, λ_2, λ_3 deren Ordnungszahlen — auf einen beliebigen Anfangspunkt bezogen — man kennt Sind diese n_1, n_2, n_3, so sind die wahren Ordnungszahlen $r+n_1$, $r+n_2$, $r+n_3$ Unbekannt sind also r, μ, h

Man erhalt dafur die folgenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
&2r^3[(n_2-n_1)\lambda_1\lambda_2+(n_1-n_3)\lambda_1\lambda_3+(n_3-n_2)\lambda_2\lambda_3]\\
&+r^2[(n_2^2-n_1^2+4n_2n_3-4n_1n_3)\lambda_1\lambda_2+(n_1^2-n_3^2+4n_1n_2-4n_2n_3)\lambda_1\lambda_3\\
&\qquad\qquad+(n_3^2-n_2^2+4n_1n_3-4n_1n_2)\lambda_2\lambda_3]\\
&+2r[(n_2n_3^2-n_1^2n_3+n_2^2n_3-n_3^2n_1)\lambda_1\lambda_2+(n_1^2n_2-n_3n_2^2+n_1n_2^2-n_3^2n_2)\lambda_1\lambda_3\\
&\qquad\qquad+(n_3n_1^2-n_2n_1^2+n_3^2n_1-n_1n_2^2)\lambda_2\lambda_3]\\
&+[(n_2^2n_3^2-n_1^2n_3^2)\lambda_1\lambda_2+(n_1^2n_2^2-n_2^2n_3^2)\lambda_1\lambda_3+(n_1^2n_3^2-n_1^2n_2^2)\lambda_2\lambda_3]=0
\end{aligned}\right\} \tag{335}$$

$$k^2[(n_2+r)^2\lambda_1 - (n_1+r)^2\lambda_2] = (n_1+r)^2(n_2+r)^2(\lambda_1 - \lambda_2)$$
$$\mu(n_1+r)^2 = \lambda_1 k^2 - \lambda_1(n_1+r)^2$$

μ wird man am besten nach der Methode der kleinsten Quadrate rechnen, indem man zunächst alle Wellenlängen des Spektrums berechnet, und sie mit den beobachteten vergleicht.

Sind die drei bekannten Linien drei unmittelbar aufeinanderfolgende, so dafs ihre Ordnungszahlen 0, 1, 2 gesetzt werden können, so wird einfacher:

$$2r^3[\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3] + r^2[9\lambda_1\lambda_2 - 12\lambda_1\lambda_3 + 3\lambda_2\lambda_3] + 12r[\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3] + 4(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (336)$$

Berechnet man z. B. r aus den drei Hygrogenlinien $H\alpha$, $H\beta$, $H\gamma$, die der Reihe nach die Ordnungszahlen 0, 1, 2 bekommen, so ist die Gleichung in r:

$$-0.07938r^3 + 0.08583r^2 + 0.40980r + 0.13660 = 0$$

Setzt man $r = 3$, wie es die Balmersche Formel für Hydrogen fordert, so läfst das Polynom den Rest -0.00479.

Das Schwierige bei der Aufgabe bleibt nur stets, drei Wellenlängen zu finden, deren Ordnungszahlen man wirklich angeben kann.

Die Frage, ob die beiden Konstanten der Balmerschen Formel, oder die Konstanten der allgemeineren Gleichung

$$\lambda^2 = \mu^2 \frac{1}{\varphi(r) - 1}$$

von einander unabhängig sind, oder aber eine Verbindung aufweisen, ist heute noch schwer zu beantworten, da nur Anzeichen einer Abhängigkeit gefunden werden können; namentlich:

Fallen zwei charakteristische Linien zweier Körper zusammen, so sind die Körper nach dem Ausdrucke (297) des Draperschen Gesetzes identisch. Nach der Balmerschen Formel besteht dann erst eine Gleichung zwischen μ und k, die noch unendlich viele Lösungen hat, d. h. die beiden Körper brauchen nicht identisch zu sein. Nimmt man also als experimentell bewiesen an, dafs verschiedene Stoffe keine gemeinsamen charakteristischen Linien besitzen, so mufs ein Zusammenhang zwischen μ und k allerdings bestehen.

27. Bandenspektra.

Man wird unschwer bemerkt haben, dafs in den Ableitungen des vorangehenden Abschnittes eigentlich ein Cirkelschlufs enthalten ist: es wird nämlich dasselbe Gleichungssystem, das uns zuerst bei bekannt vorausgesetzten Wellenlängen die Amplituden lieferte, nun dazu benutzt, um aus den aus demselben errechneten Amplituden die Wellenlängen zu finden. Es ist daher ganz klar, dafs die gefundene Beziehung

$$\lambda^2 = \mu^2 \frac{1}{\varphi(r) - 1}$$

durchaus nichts neues bietet, und überhaupt gar nichts weiter aussagt, als dafs man die Wellenlängen eines Linienspektrums stets als Funktionen der laufenden Zahlen betrachten kann. Es ist aber jedenfalls ein Verdienst der Ableitung, dafs sie auf ganz natürlichem Wege, ohne Hypothesen oder Transformationen gerade die Form der Abhängigkeit giebt, welche im speziellen Falle die Balmersche Gleichung erfordert, und dafs sie eine solche Bestimmung der Konstanten fordert, neben welcher die Amplitude aus den Wellenlängengleichungen verschwindet.

Da wir die Funktion aber allgemein nicht näher auf theoretischem Wege angeben können, so haben wir für die Kenntnis der Wellenlängen — für welche wir anfangs auch gar nichts voraussetzten, nichts näheres gewonnen. Daher kommt es, dafs wir bislang von Erscheinungen, die sich rein auf die Wellenlänge bezogen, gar nicht sprachen. Eine solche Erscheinung ist aber das Banden- und das Gruppenspektrum. Wir verstehen unter ersterem ein Spektrum, das an Stelle mancher oder aller Linien ganze Büschel von enggedrängten Linien aufweist, die innerhalb einer Gruppe sehr rasch an Intensität abnehmen, und den Eindruck von einseitig begrenzten Banden machen. Ein ausgezeichnetes Beispiel derselben ist das Spektrum der Kohlenverbindungen. Gruppenspektra sollen jene genannt werden, in welchen einzelne Gruppen von Linien — deren einzelne Strahlen weniger beträchtliche Intensitätsverschiedenheiten aufweisen, wie diejenigen der Bandenspektra, rythmisch wiederkehren. Ein solches Spektrum liefert z. B. Natrium.

Es ist ohne weiteres klar, dafs weder die eine, noch die andere Art der angeführten Spektra durch die Balmersche Gleichung ausdrückbar sind, da diese bei einigermafsen einfachem Bau der Funktion $\varphi(r)$ für die laufenden Zahlen nicht benachbarte und wieder getrennte Werte der λ annehmen kann. Zudem ist es bei den Bandenspektra noch augenscheinlich, dafs die Linien derselben Gruppe nicht ein- und demselben kontinuierlichen Spektrum angehören können, wogegen die korrespondierenden Linien derselben Gruppe wohl dieser Bedingung genügen können. Es wird nun von Interesse sein, zu untersuchen, ob die allgemeinere Gleichung im Stande ist, diese Verhältnisse darzustellen, und was sich daraus überhaupt folgern läfst.

Soviel ist von vornherein klar, dafs die Funktion $\varphi(r)$ nur für ganzzahlige Argumente physikalische Bedeutung besitzt. Sie kann daher innerhalb solcher Argumente einen beliebigen stetigen oder diskontinuierlichen Lauf haben, und eine ganz willkürliche Verteilung der Linien im Spektrum strenge darstellen. Allein die Annahme unbeschränkter Willkürlichkeit der Funktion $\varphi(r)$ führt uns einem Verständnis der Sache nicht näher, und so wollen wir nun den naheliegenden Gedanken verfolgen, die Gruppen- und Bandenspektra als Liniensuperpositionen zu betrachten.

Es bestehe ein Gruppenspektrum aus zwei superponierten Spektra, deren Wellenlängen durch die beiden Gleichungen

$$\lambda = \frac{\mu}{\sqrt{\varphi(r) - 1}} \quad \text{und} \quad \lambda_1 = \frac{\mu_1}{\sqrt{\varphi_1(r) - 1}} \tag{337}$$

gegeben sind, wo sich die Funktionen φ nur durch etwas andere Werte der Konstanten unterscheiden mögen. Sind diese Unterschiede klein, so erhält man eine stets wiederkehrende Gruppe von zwei Linien, die um so gedrängter wird, je mehr sie sich dem violetten Ende nähert. Dieses Engerwerden der Gruppen lehrt die Beobachtung in der That sowohl beim Spektrum der Kohle, als des Natriums oder Magnesiums. Darf man aus den Verhältnissen einiger Spektra allgemeinere Schlüsse ziehen, so mufs man folgern, was an und für sich das wahrscheinlichste ist, dafs die Weite der Gruppe nur durch Änderungen der Konstanten μ bedingt sind. Das würde aber besagen:

Gruppen- und besonders Bandenspektra lassen sich als Superpositionen optisch sehr ähnlicher Substanzen auffassen, welche nahe bei derselben Temperatur dissoziieren. Die Dissoziationstemperatur der weniger brechbaren Linie der Gruppe ist stets die niedrigere.

Es ist jedenfalls kein bloſser Zufall, daſs es gerade zum gröſsten Teile Verbindungen oder solche Elemente sind, die auch auf andere Weise auf ihre Dissoziierbarkeit schlieſsen lassen, welche Banden- und Gruppenspektra liefern.[1]

Die Gleichung (332) weist also allgemein auf die Dissoziierbarkeit der Stoffe hin, und dieses so lange, als nicht durch fortgesetzte Zersetzungen ein Stoff hervorgeht, für welchen die Gleichungen (334) auch anders als durch Annahme der Dissoziationstemperatur bestehen können. Dieses trifft ein, wenn ε', die Differenz der bindenden und lösenden Schwingungskräfte unendlich nahe der Null wird, und es für alle Temperaturen bleibt.

Wie wir schon früher bemerkten, gilt Kettelers Dispersionsformel in der einfachen Art, in welcher sie sich mit der Spektralgleichung identisch erweist, nur für optisch einfache Stoffe. Es ist daher sogleich klar, daſs die Erklärung der Banden- und Gruppenspektra, die wir vorhin gaben, die wirklich zutreffende ist, was noch mehr aus den nachfolgenden Untersuchungen Prof. A. Grünwalds hervorgeht.

Ob damit allgemein auch die Dissoziierbarkeit der Elemente ausgesprochen ist, läſst sich nicht absehen, da wir die Gleichung (332) für die chemischen Elemente nicht explizite kennen. Die wenigen Beispiele, für welche Balmers Gleichung angewendet wurde, also Hydrogen, Kadmium, Magnesium, lassen das allerdings vermuten.

In jedem Falle ist es höchst wahrscheinlich, daſs alle Stoffe, welche in irgend einem Zustande ein Gruppen- oder gar ein Bandenspektrum besitzen, in spektralanalytisch einfachere Stoffe zerlegbar sind.

Dem Hydrogen wird bekanntlich ein Bandenspektrum ebenfalls zugesprochen: und so vereinigen sich hier unsere Resultate mit denen Balmers und Grünwalds für die Dissoziierbarkeit desselben (diese stets im spektralen Sinne genommen), obwohl die Chemiker an der (chemischen) Dissoziierbarkeit des Hydrogens, das mitunter selbst als der Urstoff auftauchte, gewiſs zweifeln werden.

Durch sekundäre Linien lassen sich natürlich die Gruppen nicht erklären, da wir ja sahen, daſs sich diese gar nicht als Funktionen der eigenen Wellenlängen ausdrücken lassen, wie man auch direkt nachweisen kann, wenn man die Balmersche Gleichung auf die Wellenlänge dieser Linien anwendet.

28. Lockyers basische Linien.

a) Unter den zahlreichen Linien, welche Lockyer nach einheitlichem Plane photographisch registrierte, um das Sonnenspektrum mit dem Spektrum verschiedener Elemente vergleichen zu können, fanden sich viele, die mehreren verschiedenen Stoffen gemeinsam waren. Solche Koinzidenzen, die der allgemeinen Annahme, ein jeder Körper besitze ein ganz individuelles Spektrum, widersprechen, können nun in drei Ursachen begründet sein: erstlich ist die Übereinstimmung eine nur scheinbare, hervorgebracht durch die geringe optische Kraft des benutzten Instrumentes, oder es waren die untersuchten Substanzen nicht rein, und enthielten Beimischungen desselben fremden Stoffes, oder endlich die Koinzidenzen haben thatsächlich physikalischen Grund. Die beiden ersten Ursachen konnten ziemlich leicht eliminiert werden: erstens durch Benutzung

[1] Vergl. hierzu Tafel VI.

stärkerer Apparate und durch Einführung der Lockyerschen Spektralmethode, nach welcher die längsten Linien des beigemischten Stoffes in dem Spektrum des Gemenges als kurze Linien vorkommen mufsten Als auch jetzt noch gemeinsame Linien blieben, mussen diese als in der Natur begründet betrachtet werden Lockyer nennt sie basische Linien, indem er von der Annahme ausgeht, dafs alle oder mindestens ein grofser Teil unserer Elemente dissoziierbar seien und dafs Stoffe mit gleichen basischen Linien auch gleiche Dissoziationsprodukte liefern

Ohne für oder gegen die Zulässigkeit einer allgemein giltigen Dissoziationstheorie der Elemente eintreten zu wollen, untersuchen wir hier nur, unter welchen Bedingungen Linienkoinzidenzen überhaupt vorkommen können, wenn wir charakteristische Linien zu Grunde legen

Nehmen wir nun an, unsere $\varphi(r)$ Funktion besitze (von dem Anfangspunkt der Ordnungszahlen der Linien abgesehen) n unabhängige Konstanten, dann hat die Wellenlängengleichung, die noch μ enthält, deren $n+1$ Es ist somit klar, dafs n verschiedene Linien zweier Stoffe miteinander koinzidieren können, ohne deswegen noch bestimmte Bedingungsgleichungen für die Konstanten der Balmerschen Gleichung zu liefern Legen wir nun aber die einfache Balmersche Gleichung zu Grunde, welche für zwei Stoffe (μ, k) und (μ', k') die Koinzidenz der m_1, m und resp der m_1, m Linien ergiebt Dann bestehen die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} m_1 m (\mu - \mu) &= \mu m\ k - \mu m_1\ k \\ m m\ (\mu - \mu) &= \mu m'\ k - \mu m\ k \end{aligned}\right\} \qquad (338)$$

Irgend eine einzelne derselben kann, wie man sieht ohne besondere Bedingungen bestehen, zwei hingegen nur dann, wenn zwischen μ und k schon ganz bestimmte Relationen bestehen, die auch fordern, dafs sich k als Quadrat einer ganzen Zahl darstelle Man hat also

$$k = \frac{k\ m_1\ m\ (m - m)}{k\ (m_1\ m - m^2 m)- m\ m\ (m_1 - m)} = \text{Quadrat einer ganzen Zahl} \qquad (339a)$$

Setzt man also den Zähler gleich $r^2 q^2$, den Nenner gleich q, wo r irgend eine ganze Zahl bedeutet, so hat man einfacher

$$\left.\begin{aligned} m_1 m\ k - m_1 m\ m &= \frac{\alpha+\beta}{2} \\ m m' k - m^2 m\ m^2 &= \frac{\beta-\alpha}{2} \\ m_1^2 m_2\ m\ k'^2 &= r^2 \frac{\alpha+\beta}{2} \\ m_1\ m^2 m^2 k &= r \frac{\beta-\alpha}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (339b)$$

wo α und β die zwei gleichzeitig paare oder unpaare Faktoren einer vollständigen Quadratzahl bezeichnen Einfacher kann man diese Bedingungen auch so schreiben

$$\left.\begin{aligned} k^2 - m^2 = p^2, \quad k^2 - m^2 = p \\ \frac{m_2}{m_1} = \frac{p}{p} \end{aligned}\right\} \qquad (340)$$

wo p und p ganze Zahlen bedeuten Da für die beiden ersten dieser Bedingungen erforderlich ist, dafs sich k in die halbe Summe zweier gleichzeitig positiven oder negativen Faktoren einer Quadratzahl zerlegen lasse so sieht man sogleich, dafs nicht

ein jeder Stoff befähigt ist, doppelte Linienkoinzidenzen einzugehen. So ist z. B. k' des Hydrogens 2, befriedigt also die Bedingung nicht. Es giebt daher (immer die explizite Balmersche Gleichung zu Grunde gelegt) keine Substanz, in deren Spektrum zwei beliebige Linien mit zwei Linien des Wasserstoffs koinzidieren können.

Man bemerkt, wie die Frage der Linienkoinzidenzen mathematisch auf den rein chemischen oder gnostischen Teil der Spektralanalyse hinüberführt.

Wären nun zwischen zwei Substanzen n Linienkoinzidenzen vorhanden, so müfsten die folgenden Gleichungen befriedigt sein:

$$\left.\begin{array}{c} k'^2 - m'^2 = p'^2,\; k'^2 - m''^2 = p''^2 \ldots\; k'^2 - m^{(n)2} = p^{(n)2} \\ \dfrac{m_2}{m_1} = \dfrac{p'}{p''},\; \dfrac{m_3}{m_2} = \dfrac{p''}{p'''} \ldots\; \dfrac{m_1}{m^{(n)}} = \dfrac{p^{(n)}}{p'} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (341)$$

denen man um so leichter Genüge leisten kann, je gröfser k ist. Dabei ist aber stets $\mu' = \mu$.

Berechnet man auf Grund der vorstehenden Gleichungen die zusammengehörigen Werte von k und μ, so erhält man die folgende Reihe:

$$k' = 5,\ 13,\ 25 \ldots;\quad 5,\ 10,\ 17 \ldots;\quad 15,\ 39,\ 75 \ldots;\quad 10,\ 20,\ 34 \ldots;\ \ldots$$
$$m' = 4,\ 12,\ 24 \ldots;\quad 3,\ 8,\ 15 \ldots;\quad 12,\ 36,\ 72 \ldots;\quad 6,\ 16,\ 30 \ldots;\ \ldots$$

Da hier $k' = 5$ zweimal vorkommt, so ersehen wir, dafs ein Stoff mit der Balmerschen Konstanten $k' = 5$ nur zwei Linienkoinzidenzen mit einem anderen Stoffe besitzen kann, und zwar sind die koinzidierenden Linien die dritte und vierte, während die Ordnungszahl der Linien des anderen Stoffes in dem Verhältnisse von 4 zu 3 stehen müssen.

Würden also die Linien m_n des anderen Stoffes koinzidieren

$$m_n = 3 \text{ und } 4,\ 6 \text{ und } 8,\ 9 \text{ und } 12,\ 12 \text{ und } 16 \ldots$$

so wäre die Balmersche Konstante k für diese Substanz

$$k = 5 \qquad 10 \qquad 15 \qquad 20 \quad \ldots$$

während die μ für beide gleich blieben. Da nun die Gleichheit der μ noch nicht die Identität der Substanzen fordert, sondern nur voraussetzt, dafs zwischen der stofflichen Beschaffenheit und der Dissoziationstemperatur eine ganz bestimmte Relation bestehe, so ist die Existenz basischer Linien theoretisch wenigstens als wahrscheinlich und möglich dargestellt.

Wir können als Resultat dieser (auf der Balmerschen Gleichung beruhenden) Untersuchung also aussprechen:

Eine basische Linie kann beliebig vielen Stoffen angehören; die Ordnungszahl dieser basischen Linie (oder deren Brechbarkeit) ist um so höher, je gröfser die Ordnungszahl der ersten Linie des Spektrums ist, und zwar wächst die Brechbarkeit der basischen Linie rascher, als der Anfangspunkt der Linienzählung.

n basische Linien können in einem Stoffe nur dann vorkommen, wenn die Ordnungszahl der ersten Linie seines Spektrums in die halbe Summe der gleichzeitig paaren und unpaaren Faktoren von n ganzen Quadratzahlen zerlegbar ist. Die basischen Linien des andern Stoffes besitzen dann Ordnungszahlen, welche den Basen dieser vollständigen Quadratzahlen invert proportional sind.

b) Soweit reichen die Untersuchungen, welche sich auf Grund der Balmerschen Gleichung oder der allgemeineren auch von der Theorie geforderten Linienbeziehung ableiten lassen. Es ist demnach sicher, dafs — da μ die Wellenlänge der maximalen Intensität im Augenblicke der Dissoziation bedeutet, alle unsere Untersuchungen sich

nur bis zu diesem Punkte erstrecken können, wie wir ja schon in der Theorie der kontinuierlichen Spektra von vornherein diese Beschränkung aufnahmen. Nach eingetretener Dissoziation haben wir es mit einem neuen Körper zu thun, der spektralanalytisch natürlich ebenso behandelt werden kann, wie die Körper vor dem Dissoziationspunkte. Es konnte nun aber die Frage entstehen, ob die Spektralelemente der Stoffe vor oder nach der Dissoziation eine gegenseitige Beziehung aufweisen, und wenn ja, welcher Art diese sei? Da die Dissoziationsprodukte ursprünglich dem ersten Körper angehören, so ist die Wahrscheinlichkeit einer Relation überhaupt schon vorhanden.

Diese Relation wenigstens für die Wellenlängen der vor und nach der Dissoziation ausgestrahlten Linien zu finden, hat Prof. A. Grünwald[1] gelöst. Wir geben seine Abhandlung in den wesentlichsten Punkten wieder, ohne jedoch auf eine Begründung, die sich dieser Gelehrte später zu veröffentlichen vorbehält, eingehen zu können.

Das Fundamentaltheorem lautet:

Es sei a ein primäres chemisches Element, welches in einer gasförmigen Substanz A mit andern Elementen chemisch verbunden ist, und in einer Volumeneinheit von A das Volumen $[a]$ einnimmt. Der Körper A verbinde sich chemisch mit einem andern gasförmigen Körper B zu einem dritten C. Bei dieser Verbindung gehe das Element a in einen andern chemischen Zustand a' über, indem es zur Ermöglichung der neuen Verbindung eine gewisse Wärmemenge abgiebt (in Ausnahmefällen eine solche aufnimmt) und sich infolgedessen chemisch kondensiert (eventuell dilatiert). Das Volumen, welches von ihm in dem Körper C nach Herstellung des neuen chemischen beweglichen Gleichgewichtes erfüllt werde, sei $[a']$, wobei der Quotient $[a']:[a]$ nach einem bekannten chemischen Grundgesetze eine meist sehr einfache rationale Zahl ist. Dies vorausgesetzt verhalten sich die Wellenlängen sämtlicher Strahlen, welche dem Elemente a in dem Linienspektrum der freien Substanz A angehören, also von demselben ausgesendet werden, zu den Wellenlängen λ' der entsprechenden Strahlen, welche dasselbe Element in dem neuen chemischen Zustande a', in welchem es sich in der nunmehr gebundenen Substanz A innerhalb der neugebildeten Verbindung C befindet, emittiert, wie die entsprechenden Volumina $[a]$ und $[a']$.

Dieser Satz gilt nur, wenn die in Rede stehenden Substanzen Gase sind, welche von dem kritischen Punkte ihrer Verflüssigung ziemlich weit entfernt sind und sich nicht unter zu starkem Drucke befinden.

Aus dem obigen Satze folgt insbesondere, daſs für $[a'] = [a]$, d. h. wenn das Volumen des Elementes a in der neuen Verbindung C dasselbe ist, wie in der ursprünglichen A, auch die Wellenlängen λ' der von a' ausgesandten Strahlen den früher von a erzeugten Wellenlängen λ gleich sein müssen. Der einzige Unterschied wird nur in einer verschiedenen Änderung der Amplituden, also der Intensitäten der einzelnen Strahlen bestehen, wobei es geschehen kann, daſs die Helligkeit einer ganzen Reihe von Strahlen bis zum Verschwinden derselben geschwächt, die anderer hingegen verstärkt wird. So bestehen z. B. die Spektra der ohne chemische Kondensation erfolgenden Verbindungen des Hydrogens mit den Halogenen nur aus den Spektra des Hydrogens und der bezüglichen halogenen Elemente, jedoch mit charakteristischen Intensitätsänderungen der verschiedenen Strahlen ihrer Komponenten.

---

[1] Astr. Nachr. 2797. Später dann: Sitzber. d. k. Ak. d. Wiss. Wien. Bd. XCVI. II. Abt. Dez.-Heft 1887 und Bd. XCVII. Abt. IIa. Oktober 1888.

Die Beschränkung auf den gasförmigen Zustand ist notwendig, weil, wie überhaupt in der Chemie, so auch hier nur für Gase einfache leicht übersehbare gesetzmäfsige Beziehungen bestehen. Wächst nämlich der Druck, oder nähern sich die gasförmigen Substanzen infolge einer Erniedrigung der Temperatur (eventuell auch unter gleichzeitiger Erhöhung des Druckes) ihrer Verflüssigung, so wird die Zahl der Stöfse zwischen zwei verschiedenen Molekeln unter sonst gleichen Umständen entsprechend vermehrt, und die Schwingungszahlen von äquivalenten kleinsten Teilchen der verschiedenen gleichartigen Molekeln derselben Substanz werden durch verschiedene Stöfse in verschiedener Weise abgeändert. Während im ersteren Falle äquivalente entsprechende Teilchen von verschiedenen gleichartigen Molekeln derselben Substanz aufserordentlich schwache Strahlen gleicher Wellenlängen aussenden, welche im Spektrum übereinanderfallen, und durch Summierung ihrer an sich ungemein kleinen Intensitäten einen einzigen Strahl von bemerkbarer Helligkeit liefern, senden in dem eben besprochenen Falle die äquivalenten Teilchen von verschiedenen gleichartigen Molekeln neben Strahlen von normaler Periode auch Strahlen von mehr oder weniger davon abweichenden Perioden aus, welche den verschiedenartigen Zusammenstöfsen ihre Entstehung verdanken. Neben die normalmäfsige Linie fallen nunmehr sehr nahe Strahlen der letzteren Art. Die ursprünglich scharfe Linie verbreitert sich. Wächst der Druck und nähern sich die Gase ihrer Verflüssigung, so wächst auch die Verbreiterung der betrachteten Linie, und es kann geschehen, dafs die entstehende bandförmige Linie in den Bereich von Linien hinübergreift, welche heterogenen Teilchen der verschiedenen Molekeln derselben Substanz entsprechen. Die Linien des Spektrums fliefsen zusammen und es entsteht ein mehr oder weniger kontinuierliches Spektrum, in welchem allenfalls noch einzelne Lichtmaxima die Lage der ehemaligen normalen Hauptstrahlen verraten.

Prof. Grünwald gelang es mit Hilfe des Fundamentaltheorems aus den zusammengesetzten Linienspektrum des Hydrogens (dem sogenannten II. Spektrum) eine Reihe von bisher unbekannten Strahlen des Wasserdampfspektrums vorauszusagen, die durch Beobachtungen von Prof. G. D. Liveing später vollauf bestätigt wurden. Hier möge, um ein Beispiel für die Anwendung des Fundamentaltheorems zu geben, die Behandlung des Hydrogenspektrums wiedergegeben werden.

Prof. Grünwald findet, dafs sich das Hydrogenspektrum in zwei Gruppen (a) und (b) von Linien zerlegen läfst, deren erste mit dem Faktor $\frac{19}{30}$, die zweite mit $\frac{4}{5}$ multipliziert in entsprechende Wellenlängen des Wasserdampfspektrums übergeht. Daraus folgte, dafs die Substanz A, hier Hydrogen, aus zwei primären Elementen a und b bestünde. Unter Mitwirkung des Körpers B, hier Oxygen, entsteht die Verbindung $C = H_2 O$, in welcher das Element H das Volumen $\frac{2}{3}$ einnimmt. Ist $[a]$ und $[a']$ das Volumen des primären Elementes im Hydrogen und Wasser, λ und λ' die entsprechenden Wellenlängen der Spektra beider Substanzen, so hat man zur Bestimmung von $[a]$ und $[b]$ die Gleichungen:

$$[a] + [b] = 1, \quad \lambda' = \tfrac{19}{30} \lambda \text{ und } \lambda' = \tfrac{4}{5} \lambda$$

oder nach dem Fundamentaltheorem:

$$[a] + [b] = 1, \quad \tfrac{19}{30} [a] + \tfrac{4}{5} [b] = [a'] + [b'] = \tfrac{2}{3} \quad .$$

woraus folgt:

$$[a] = \tfrac{4}{5}, \ [b] = \tfrac{1}{5}$$

Der Wasserstoff ist hiernach eine Verbindung von einem Volumen der primären Substanz b mit vier Volumen der andern primären Substanz a. Es wäre also das Hydrogen als eine zum Typus des Ammoniaks, $H = a_4 b$ gehörige Verbindung zu betrachten.

Stellt man hiernach die Spektra der Elemente a und b her, so erhält man Strahlen, die zum gröfsten Teil im Sonnenspektrum vorhanden sind. Als besonders wichtig ist hervorzuheben, dafs das Element b die Heliumlinie $D_3 = 0{,}58749$ und mehrere Strahlen der Chromosphäre darstellt.

Obzwar der Fundalmentalsatz ursprünglich nur für Verbindungen primärer Elemente abgeleitet wurde, gilt derselbe, was sehr wichtig ist, mit grofser Annäherung auch für Verbindungen von zusammengesetzten Radikalen, sofern sich diese wirklich wie Atome verhalten. Ein Beweis dafür und zugleich eine sehr interessante und schwerwiegende Bestätigung der vorliegenden Theorie ist die Thatsache, dafs sich die Wellenlängen fast aller Hydrogen- und Oxygenstrahlen, wenn sie mit [illegible]$_3$ (dem mittleren Kondensationsfaktor des Hydrogens und Oxygens bei deren Verbindung zu Wasser) multipliziert werden, in Wellenlängen entsprechender Wasserdampfstrahlen verwandeln, wenigstens soweit, als diese selbst bekannt sind und zur Vergleichung herangezogen werden können.

Nach alledem, was über die Übereinstimmung des Sonnenspektrums mit den Spektra der Elemente a und b des Hydrogens gesagt wurde, folgert Prof. Grünwald, dafs sich auf der Sonne dissoziierter Wasserstoff befinde, er hält das Element b für das Helium, a für das Koronium, den wesentlichen Bestandteil der Korona.

Vergleicht man diese Ergebnisse mit der Balmerschen Formel speziell für Wasserstoff, so finden sich offenbar keine Gegensprüche. Denn die Balmersche Formel fordert nur, dafs der Wasserstoff in seinem uns bekannten Zustande keine Linie emittiert, deren Wellenlänge kürzer ist als 0,36462. Nach erfolgter Dissoziation mufs μ sehr rasch, vielleicht sogar sprungweise abnehmen, so dafs die Wellenlängen des neu entstandenen Dissoziationsproduktes nun einen viel gröfseren Spielraum im Spektrum einnehmen. Da nun aber die Länge der kürzesten Welle offenbar bei einem Stoffe, der nicht weiter dissoziierbar ist, an keine untere Grenze gebunden sein kann, so müfste das μ der Balmerschen Formel für nicht dissoziierbare Stoffe gleich Null sein. Mit andern Worten: die Balmersche Gleichung ist für nicht dissoziierbare Stoffe überhaupt ungiltig.

29. Molekularstruktur.

Bevor wir diesen Abschnitt abschliefsen, sei es noch erlaubt darauf hinzuweisen, wie ein gegebenes Wellenlängengesetz stets zur Untersuchung der Molekularstruktur benutzt werden kann. Denken wir uns die Wellenlängen eines Spektrums ganz allgemein durch die Beziehung

$$\lambda_r = \frac{\mu}{\sqrt{\varphi(r) - 1}}$$

dargestellt, wo r die laufenden ganzen Zahlen bedeutet, so besteht die Gleichung

$$\varphi(r) = \frac{\Delta}{\varrho \Delta_r}$$

wo Δ die aus den Atomkräften gebildete Determinante bezeichnet. In einem schon früher angeregten Sinne wollen wir nun die Determinante nicht den mittleren Zustand einer Molekel darstellen lassen, sondern den mittleren Zustand einer grofsen Zahl von Molekeln. Dann erweitert sich die Determinante, indem zwischen die n^2 Glieder noch eine grofse Zahl anderer Elemente hinzutritt, welche einen möglichst genau stetigen

Übergang zwischen den einzelnen Gliedern vermittelt. Da es nun Niemandem einfallen wird, den momentanen Bewegungszustand einer Molekel zu suchen, sondern man sich begnügen wird, den mittleren Zustand aller Molekeln zu kennen, so kann man aus der Determinante nach denselben Schlüssen, wie dies bei der Integralrechnung geschieht, eine mittlere Atomkraft als Faktor herausheben, so dafs ist:

$$C\varrho f(e_r)\varDelta_r = \varDelta$$

Dies ist offenbar schon deshalb möglich, weil der Bildung von $\varDelta_r$ nach diese Determinante in jedem ihrer Posten die Atomkraft $f(e_r)$ nicht enthält. e_r ist dann die mittlere Distanz des r-ten Atomes in Bezug auf die ganze Gasmasse. Man hat somit die Beziehung:

$$f(e_r) = \frac{\varphi(r)}{C}$$

Schreibt man

$$f(e_r) = \frac{\varepsilon}{C\, e_r^{\nu}}$$

und setzt statt $\varphi(r)$ speziell für Wasserstoff die Balmersche Formel ein, so kommt:

$$\frac{\varepsilon}{e_r^{\nu}} = \frac{8}{r^2}(r^2 - 2)$$

Da mit wachsendem r sowohl λ als e abnimmt, so sehen wir, dafs die Atome, welche die kleinsten Schwingungen hervorbringen, nahe zur Mitte der Molekel stehen. Je weiter entfernt ein Atom vom Mittelpunkte der Molekel sich befindet, desto längere Wellen erzeugt es. Die Mitte der Molekel ist bis auf eine Entfernung von $e_{\infty}^{\nu} = \frac{\varepsilon}{8}$ frei. Da für $r = 3$ (der Anfangspunkt der Zählung der Hydrogenlinien $e_3{}^{\nu} = \frac{9}{56}\,\varepsilon$ wird, so ist überhaupt die Bewegung der Hydrogenmolekeln so beschaffen, dafs sie stets in der zwischen den Kugeln vom Radius $e = \sqrt[\nu]{\frac{\varepsilon}{8}}$ und $e = \sqrt[\nu]{\frac{9\varepsilon}{56}}$ gelegenen Schale verbleiben müssen; auf eine Ebene projiziert erscheint die Molekel also ringförmig geschlossen.

Diese Untersuchungen sind nun weniger geeignet, eine Dynamik der Atome anzubahnen, als vielmehr über die hauptsächlich den Chemiker intessierende Frage der Atomverkettung Aufschlufs zu geben. Es genügt dabei allgemein ein Absorptionsspektrum zu kennen, und dabei wäre die Methode, die durchaus nicht an den Gaszustand gebunden ist, ganz allgemein giltig. Der Vorgang, den man theoretisch zu befolgen hätte, wäre der folgende:

Man bilde dis vollständige Schwingungsgleichung einer Molekel von N Atomen, die aus n Gruppen, jede zu respektive $\nu_1,\ \nu_2 \ldots \nu_n$ Atomen bestehend, gebildet ist. Indem nun die Atome im allgemeinsten Falle für sich, in Gruppen, und sich gegenseitig beeinflussend schwingen, würde sich die Zahl der möglichen Strahlen zu

$$N + \frac{n(n-1)}{2} + \sum_1^n{}_r \frac{\nu_r(\nu_r - 1)}{2}$$

ergeben. Daraus liefsen sich für die Atomkräfte die nötigen Gleichungen in linearer Form herstellen, die mit Hilfe der bekannten Wellenlängen auch wirklich aufgelöst werden könnten. Es braucht aber wohl kaum erwähnt zu werden, dafs dieser mit Worten so leicht zu schildernde Vorgang in der That technisch unausführbar bleibt, da erstens über die Atomkräfte nichts bekannt ist, und zweitens die mathematischen Hilfsmittel für die Behandlung versagen. Man wird daher stets auf das Experiment angewiesen bleiben,

indem man Verbindungen von bekannter Molekularstruktur spektroskopisch untersucht und aus den Veränderungen des Spektrums, die eine in bekannter Weise zu der Molekel hinzutretende neue Atomgruppe erzeugt, Gesetze zu induzieren strebt

Wirklich ist die Spektralanalyse in diesem Sinne heute schon als Hilfswissenschaft der Chemie zugezogen worden

30 Absorptionsspektra

a) Bei der durch das K i r c h h o f f sche Gesetz erwiesenen Analogie von Emission und Absorption braucht über das Absorptionsspektrum nur mehr wenig gesagt zu werden Gehen die Strahlen einer Lichtquelle (μ, A) durch einen Körper $(\mu' A')$ von der Stoffmenge q, so ist die Intensität L des Absorptionsspektrums für die Wellenlänge λ gegeben durch

$$L = \frac{4}{\pi}\mu' A' \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu'^2)^2}\left\{1-\frac{\mu'^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu'^2}\right)^2\right\}^q + \frac{4}{\pi}\mu A \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2} \cdot \frac{1-\left[1-\frac{\mu'^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu'^2}\right)^2\right]^q}{\frac{\mu'^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu'^2}\right)^2} \qquad (342)$$

wobei wir schon bewiesen hatten, daſs sich nun L nicht durch ein kontinuierliches Spektrum ausdrücken lasse Dabei bezieht sich m auf einen absolut mit dem Körper $(\mu' A')$ gleichtemperierten schwarzen Körper In der hingeschriebenen Allgemeinheit besagt diese Gleichung, daſs auch die Emission des absorbierenden Körpers in Betracht gezogen wird Ist die Temperaturdifferenz der Körpes (μA) und $(\mu' A')$ eine sehr groſse, oder auch nur die Temperatur des absorbierenden Körpers eine sehr niedrige so kann von der Emission desselben vollständig abgesehen werden Es fällt sodann das zweite Glied der rechten Seite fort In dieser Form werden wir die Gleichung meistens benutzen

Das Maximum der Intensität, oder das Minimum der Absorption liegt jetzt bei der Wellenlänge λ_0 welche durch die Gleichung

$$\mu'^4(\lambda^2+m^2)^2(\lambda^2-\mu'^2)-m^4(\lambda^2+\mu'^2)(\lambda^2-\mu'^2)-2\mu'^4(\mu'^2-m^2)q\,\lambda^2(\lambda^2+m^2)=0 \qquad (343)$$

gegeben ist, und hängt nicht allein von der stofflichen Beschaffenheit des emittierenden und absorbierenden Körpers, sondern auch von der Stoffmenge derselben ab Bei $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ wird die Intensität des Spektrums ebenfalls Null

Schreiben wir nun der Einfachheit halber die reine Absorptionsgleichung für die Einheit der Stoffmenge auf, so ist

$$L = \frac{4}{\pi}\mu' A' \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu'^2)^2}\left\{1-\frac{\mu'^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu'^2}\right)^2\right\} + \frac{4}{\pi}\mu A \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2} \qquad (344)$$

Wie wir schon früher besprachen, tritt Umkehrung der betreffenden Spektralregion ein, wenn

$$\frac{4}{\pi}\mu A \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2} < \frac{4}{\pi}\frac{\mu'^4}{m^4}\mu' A' \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu'^2)^2}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu'^2}\right)^2$$

ist, wenn der emittierende Körper höhere Temperatur besitzt, als der absorbierende Diese Bedingung kann einfacher auch so geschrieben werden

$$\frac{4}{\pi} m^4 \Theta'^4 \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+m^2)^2} < \frac{4}{\pi}\mu^4 \Theta^4 \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2} \qquad (345)$$

und da sie allgemein von der Wellenlänge abhängt, so ist die Frage berechtigt, ob es nicht etwa auch unvollkommene Umkehrungen gäbe, der Art, dafs einige Wellenlängen dunkel, andere dagegen noch hell erscheinen — eine Frage, die durch das Kirchhoff-sche Gesetz nicht angeregt wird. Wir schreiben also für zwei Wellenlängen die Ungleichungen:

$$\frac{4}{\pi} m^4 \Theta'^4 \frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1^2+m^2)^2} < \frac{4}{\pi} \mu^4 \Theta^4 \frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1^2+\mu^2)^2} \text{ und } \frac{4}{\pi} m^4 \Theta'^4 \frac{\lambda_2^2}{(\lambda_2^2+m^2)^2} > \frac{4}{\pi} \mu^4 \Theta^4 \frac{\lambda_2^2}{(\lambda_2^2+\mu^2)^2}$$

und erhalten daraus stets eine Bedingung für die Gröfse der Temperatur des absorbierenden Körpers. Diese Bedingung lautet:

$$\mu^2 \Theta^2 \frac{\lambda_1^2+m^2}{\lambda_1^2+\mu^2} > m^2 \Theta'^2 > \mu^2 \Theta^2 \frac{\lambda_2^2+m^2}{\lambda_2^2+\mu^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (346)$$

und kann stets für zwei Wellenlängen befriedigt werden, da erst an den Grenzen des Spektrums eine Gleichung statt der Ungleichung auftritt; für $\lambda = 0$ wird sie $\Theta' = \Theta$, für $\lambda = \infty$: $m\Theta' = \mu\Theta$.

Wir heben diesen Fall hervor, da wir bislang nie von einer ähnlichen Beobachtung hörten. Wir waren am 15. September 1884 in O-Gyalla so glücklich die helle Linie H_α des Sternes γ Cassiopeiae sehr intensiv zu sehen, während H_β anfänglich hell, dann aber entschieden dunkel wurde, und so verblieb.

Welch scharfe Temperaturbestimmungen solche Beobachtungen selbst ohne irgend eine Messung zulassen, mag das folgende Beispiel beweisen. μ des superponierten Spektrums des Sternes γ Cassiopeiae wurde am 14. April 1885 zu 0.464 bestimmt. Der diesem Sterne entsprechende absolute schwarze Körper ist $m = 1.007$. Setzt man $\lambda_1 = H_\alpha = 0.656$ und $\lambda_2 = H_\beta = 0.486$, so wird $\frac{\Theta'}{\Theta}$ die relative Temperatur der Sternphotosphäre gegen die des Kernes durch die Ungleichung bestimmt:

$$0.767 > \frac{\Theta'}{\Theta} > 0.690$$

deren Grenzen für den Umstand, dafs man H_α hell, H_β dunkel sah, sonst aber keine Messungen anstellte, wohl eng genug gezogen sind.

Der Stern β Orionis besitzt die Eigentümlichkeit, die Linie H_β bald als schwarze Linie zu zeigen, bald aber vollständig kontinuierlich zu sein. H_α ist stets unsichtbar, also weder hell, noch dunkel; mithin geht für diesen Fall die Ungleichung in eine Gleichung über. Für denselben ist $\mu = 0.455$, $m = 0.987$. Es folgt also aus dem Verhalten der Linie H_α und H_β:

$$\frac{\Theta'}{\Theta} = 0.684, \quad \frac{\Theta'}{\Theta} \leqq 0.761$$

wo die Grenzen ebenso eng sind. Wird eine Linie eines Stoffes (von dessen Anwesenheit man natürlich Kenntnis haben mufs) unmerklich, so halten sich Absorption und Emission des absorbierenden Körpers gerade das Gleichgewicht. Da aber dieses Gleichgewicht unabhängig von der Wellenlänge nicht darstellbar ist, d. h. nicht durch das ganze Spektrum hindurch bestehen kann, so folgt daraus, dsfs Absorptionsvorgänge, wenn sie auch dem Auge verborgen bleiben, den feineren Beobachtungen nie entgehen werden.

Das Absorptionsspektrum enthält, vorausgesetzt, dafs die Lichtquelle, deren Strahlen absorbiert werden, als bekannt vorausgesetzt werden kann, zwei Elemente μ' und A', die es vollkommen bestimmen. Denn m ist nicht als unabhängig zu betrachten,

da es mit der Temperatur zugleich gegeben ist, diese aber durch μ' und $\mathcal{A}$ kraft des Draperschen Gesetzes berechnet werden kann.[1]

Fügen wir noch hinzu, daſs sich das Absorptionsspektrum sowohl gasförmiger als fester Körper ebenso zusammenfassen läſst, wie das Emissionsspektrum, so bleibt über dasselbe wesentlich nichts Neues mehr zu sagen übrig, so daſs wir uns einer speziellen Art der Absorptionsspektra zuwenden können.

b) Wenn auf einen Körper, dessen kleinste Teilchen ebenfalls die Fähigkeit schwingende Bewegungen auszuführen, besitzen, eine fremde Schwingung fällt, die in dem Körper irgend einen der Oszillationsgeschwindigkeit proportionalen Widerstand antrifft, so sehen wir stets Schwingungen entstehen, welche teils aus den eigenen, teils aus den ankommenden, teils aus Verbindung beider unter sich zusammengesetzt waren. Die Kombinationen der ankommenden Wellen untereinander besitzen nun die Eigentümlichkeit, durch den Widerstand des Mediums am wenigsten verändert zu werden, und diese werden es daher vorzüglich sein, welche nach Aufhören der Schwingungsursache noch weiter andauern, während sowohl die Eigenschwingungen, als deren Kombinationen mit den ankommenden Wellen alsbald vollständig extinguiert werden.

Der explizite Ausdruck für die Intensität eines Kombinationsstrahles der ankommenden Schwingung $\sum P \sin pt$ lautet, wenn man den geringen Einfluſs des Widerstandes vernachlässigt, ganz so wie der für die Intensität der sekundären Linie gefundene

$$I = \frac{\lambda_1^6 \lambda_s^6 (\lambda_1 \pm \lambda_s)^2}{(l^2-\lambda_1^2)^2 (l^2-\lambda_s^2)^2 [\lambda_1^2 \lambda_s^2 - l^2(\lambda_1 \pm \lambda_s)^2]^2} \frac{4 l}{(2\pi c)^6} \frac{16\mu}{\pi} \frac{\mathcal{A}}{(\lambda_1^2+\mu)^2 (\lambda_s^2+\mu)^2} \qquad (347)$$

worin λ_1 und λ_s Strahlen der ankommenden, l der eigentümlichen Wellen sind. Man erinnert sich sogleich, daſs dieses Spektrum kein in unserem Sinne genommenes kontinuierliches ist. Je nachdem nun die Kombination $\lambda_1 + \lambda_s$ oder $\lambda_1 - \lambda_s$ in die Grenzen des sichtbaren Spektrums hineinfällt, wird das erregte Spektrum ein Kaloreszenz- oder ein Fluoreszenzspektrum genannt.

Die hauptsächlichsten Eigenschaften derselben sind:

Für unendlich lange und unendlich kurze Wellen wird die Intensität des Spektrums gleich Null. So oft einer der auffallenden Strahlen mit der eigentümlichen Schwingung des Körpers gleiche Farbe besitzt, wird die Intensität unendlich groſs, in Wirklichkeit kann dieser Fall natürlich nicht eintreten, wie man auch sieht, wenn der Widerstand des Äthers nicht vernachlässigt wird. Dieses Unendlichwerden bedeutet nur, daſs die Intensität der Strahlung als solche ein Maximum erreicht, von welchem ein groſser Teil als Intensität verloren geht und als Molekularbewegung fortbesteht. Es ist also in jedem Fluoreszenzspektrum ein Maximum für jene Strahlen zu erwarten, welche von dem Körper am lebhaftesten absorbiert werden. Die Erfahrung bestätigt zunächst die Existenz eines solchen Maximums, und das Vorhandensein energischer Absorption durch den Umstand, daſs Licht, welches Fluoreszenz erweckt hat, in diesem Körper solche zu wecken nicht mehr im Stande ist.

Ist das erzeugende Licht diskontinuierlich, so zeigt auch das Fluoreszenzspektrum analoge Diskontinuitäten. Wir sagen analoge und nicht dieselben, weil das Fluoreszenzspektrum zugleich von stets zwei Wellenlängen abhängt, daher die Erregung des einen Strahles immer durch die des andern abgeändert werden kann. Endlich kann aber

[1] Vergl. hierzu Tafel VII.

auch das Fluoreszenzspektrum selbst diskontinuierlich sein, insofern der Äther des Körpers nicht notwendig stetig ineinander übergehende Schwingungen zu vollführen braucht.

Obwohl die Intensität des Spektrums eine geringere ist, als die des erregenden Spektrums, so sind im allgemeinen die Veränderungen desselben mit Temperatur und Zustand fast im quadratischen Verhältnis wachsend raschere. Ob auch l, die eigentümliche Schwingung des Äthers Temperatureinflüssen unterworfen ist, darüber fehlt jeder Anhaltspunkt.

Im ganzen ist die theoretische Erklärung der Fluoreszenz- und Kaloreszenzspektra ziemlich schwierig und unsicher. Denn betrachtet man die vollständige Schwingungsgleichung, so müssen diese Spektra als eine grofse Zahl von Superpositionen angesehen werden. Sie werden dem Gesagten nach also jedenfalls geeignet sein, gnostische Beobachtungen sonst unzugänglicher Spektralregionen zu vermitteln, sogar Wellenbestimmungen zu ermöglichen, aber nicht geeignet, auf die näheren Eigenschaften des erregenden Spektrums zuverlässige Schlüsse zu bauen.

31. Zusammenfassung.

Obwohl wir die diskontinuierlichen Spektra in steter Verbindung mit den bereits bekannten kontinuierlichen beliefsen, wird es doch erwünscht sein, in einem kurzen Rückblicke erstens zu zeigen, dafs sie ohne neue Annahmen aus dem kontinuierlichen Spektrum entwickelbar sind, und umgekehrt einen Beweis für die Richtigkeit der allgemeinen Spektralgleichung enthalten. Ist das geschehen, so haben wir noch die wesentlichen neuen Annahmen zu besprechen, die diesem zweiten Teile der entwickelten Theorie hinzugefügt wurden.

Für die Identitätserweisung der beiden Theorieen ziehen wir das Drapersche Gesetz heran, welches als Forderung des Kirchhoffschen so lange gilt, wie dieses selbst; für Gase also innerhalb der Eingangs aufgezählten Grenzen ebenfalls. Wir wählen nun einen beliebigen festen Körper und ein n-liniges Gas, die wir beide auf dieselbe Temperatur erwärmen, wo die violette Begrenzung gerade bis zur Linie λ_k reiche. Dann mufs die unendlich kleine aber konstante Intensität an der Stelle λ_k beider Spektra die gleiche sein. Eben diese Gleichheit tritt ein für eine Temperatur, wo die brechbare Begrenzung bis zur Linie λ_{k+1} des Gases reicht usw. Daraus folgt aber, dafs in Bezug auf konstante Intensität die Spektralelemente eines Gases und eines festen Körpers sowohl der Wellenlänge als der Temperatur nach sich ganz gleich verändern. Dieses ist aber nicht anders möglich, als wenn die Spektralgleichung für beide Körper dieselbe ist.

Umgekehrt bildet die Lockyersche Beobachtungsmethode einen Beweis für die Richtigkeit dieser Gleichung. Denn die oberflächlichste Betrachtung zeigt, dafs sich für die Längen der Linien stets eine Gleichung hinschreiben läfst.

$$\lambda^p + a_1 \lambda^{p-1} + \cdots + a_{p-1} \lambda + a_p = 0$$

in welcher die reellen Koeffizienten Funktionen der Temperatur und der stofflichen Beschaffenheit sowie der Längen der Linien sind. Setzt man für die Längen der Linien beliebige Werte ein, so berechnet sich daraus die zugehörige Wellenlänge, und es ist klar, dafs sich durch geeignete Wahl der Koeffizienten stets erreichen läfst, dafs eine oder mehrere Linien an einer beliebigen Stelle des Spektrums verschwinden. Mit anderen Worten: Blofs durch Veränderung der Temperatur wären wir im Stande, beliebige

Linien eines Spektrums ohne beträchtliche Änderungen der Nachbarteile zum Verschwinden zu bringen, und Bloſs durch Veränderung der Temperatur konnte irgend eine beliebige Linie als die längste des Spektrums dargestellt werden Diese beiden Sätze sind aber falsch oder richtiger wohl allgemeiner, als sie die Erfahrung bestätigt denn die Lage der längsten Linie eines Spektrums ist nicht willkürlich, und es können durch bloſse Temperaturänderungen nicht Linien aus der Mitte des Spektrums zum Verschwinden gebracht werden Bei reellen Wurzeln der Gleichung für die Wellenlängen drückt sie aber diese beiden Erfahrungssätze nur dann aus wenn $p = 2$, die Gleichung quadratisch ist Da sie aber in der That nur eine Inversion der Spektralgleichung ist, in welcher die Intensität unendlich klein und konstant gesetzt wurde, so ist auch hiermit die Richtigkeit der Spektralgleichung bewiesen

Auf die Anschauungen näher einzugehen, welche wir uns von der Gestaltung einer Gasmolekel bildeten ist wohl überflüssig, da die Resultate zwar Folgen dieser Anschauungen sind zugleich aber aus viel allgemeineren und fester bestehenden Prinzipien ableitbar waren Wir erwähnen sie also mehr der Balmerschen Gleichung halber, deren Ableitung ein Zurückgehen bis auf den Bau der Molekel erheischt

Wir betrachteten die Molekel als Aggregat von n Atomen, deren jedes als Individuum und Ganzes mit einer gewissen Ätherhülle umgeben ist, welche stetig in den freien intramolekularen Äther übergeht Wäre es möglich, die Bewegungen der Atome innerhalb der Molekel darzustellen, oder auch nur ihre Bahnradien aufzuschreiben so könnten die Wellenlängen aller in dem Spektrum des Körpers auftretenden Linien im Voraus angegeben werden Das ganze Problem ist aber wie wir es mehrmals hervorhoben, bloſs eine Bestrebung Eigenschaften der Materie zu erklären, und gehört daher nicht eigentlich in das Gebiet der theoretischen Spektralanalyse

Die Erklärung der Breite der Linien beruht wesentlich auf dem Umstande, daſs die Atombewegungen zum Teile unfrei sind, zum Teile aber nicht scharf hervortretende Mittelzustände darstellen können Der Umstand daſs für sämtliche n Linien nur eine einzige Breitengleichung gegeben ist, macht natürlich die von uns eingeschlagene Lösung zu einer sehr fraglichen Doch ist dies für die Theorie von keinem Belange, da wir die Resultate nicht weiter benutzten, und übrigens hervorhoben, daſs die Breite der Linien nur als sekundäres Element zu betrachten sei Unsere Abschweifung auf mögliche Einflüsse der Atom- und Molekularbewegung, waren, so unsicher sie auch sind nur dazu bestimmt, diese Einflüsse nicht a priori zu verneinen

Die Theorie der sekundären Linien sowie des Fluoreszenzspektrums sind den üblichen Behandlungen angemessen, unsicher Schon der Umstand, daſs die Intensität der von der ankommenden erregten Welle unendlich werden kann, wenn bloſs die ankommende Welle mit der eigentümlichen gleiche Schwingungsdauer besitzt, muſs Zweifel erregen, denn die Erklärung, daſs das Unendlichwerden der Intensität einfach Absorption bedeutet, ist in der Gleichung nicht begründet Wir sind aber von der bekannten Theorie dieser Erscheinung nicht abgewichen, weil weder die sekundären Linien, noch die Erscheinungen der Phosphoreszenz usw in der Spektralanalyse eine nennenswerte Rolle spielen In Bezug auf beide Erscheinungen wird man übrigens ganz allgemein leicht den Beweis erbringen können, daſs sie sich einem kontinuierlichen Spektrum nicht einfügen lassen, und damit hören für sie alle von uns abgeleiteten allgemeine Gesetze in dieser unmittelbaren Form zu gelten auf

Was nun endlich die Zusammenfassung der kontinuierlichen und diskontinuierlichen Spektra betrifft, so ist darüber das Wichtigste schon mehrmals hervorgehoben und gipfelt in dem Satze, dafs das kontinuierliche Spektrum direkt in das diskontinuierliche übergeht, wenn die unabhängige Variabele zur springend veränderlichen wird. Die zur Elimination der Konstanten benutzten Parametergleichungen sind schon früher besprochen und auf ihre Allgemeinheit untersucht worden.

32. Quantitative Spektralanalyse.

Unter quantitativer Spektralanalyse verstehen wir die Bestimmung der Stoffmenge eines Körpers von gegebenem Zustande aus seiner Strahlung. Die Zuthat „von gegebenem Zustande" ist wesentlich. Denn es wäre ungereimt, von der Spektralanalyse die quantitative Bestimmung z. B. eines festen Körpers zu fordern, während er der Beobachtung nur als Lösung oder als Gas unterworfen werden kann. Wir müssen uns also darauf beschränken, die Untersuchung für jenen Zustand durchzuführen, bei welchem er der Beobachtung unterliegt, die Frage, ob und wie diese Bestimmung auf einen andern als den unmittelbaren gegebenen Zustand zu reduzieren sei, anderen Zweigen der Wissenschaft überlassend.

Vor allen Dingen mufs die Emission eines Gemenges verschiedener Stoffe untersucht werden. Dabei genügt es offenbar nicht, die Spektra der einzelnen Stoffe mit ihren respektiven Mengen und Absorptionskoeffizienten in Rechnung zu ziehen, da ja absorptive Wechselwirkungen vorkommen, und viele absorbierende Teilchen rückwärtigeren Schichten angehören, welchen hierbei eine Absorption auf die vorderen emittierenden Schichten zugeschrieben würde, was ungereimt wäre. Wir verfahren daher folgendermafsen:

Das aus n Stoffen bestehende Gemenge teilen wir in m Schichten von solcher Dünne, dafs in jeder ν_1 Molekeln des ersten, ν_2 Molekeln des zweiten, ν_n Molekeln des n-ten Stoffes enthalten seien. Ist e die Emission eines absolut schwarzen Körpers, so emittiert die erste Schichte vom ersten Stoffe $e[1-(1-\alpha_1)^{\nu_1}]$. Davon absorbieren alle übrigen Molekeln einen Teil, so dafs heraustritt:

$$e[1-(1-\alpha_1)^{\nu_1}](1-\alpha_2)^{\nu_2}(1-\alpha_3)^{\nu_3}\dots(1-\alpha_n)^{\nu_n}$$

Die zweite Schichte emittiert von demselben Stoffe wieder $e[1-(1-\alpha_1)^{\nu_1}]$, und absorbiert davon den Bruchteil $(1-\alpha)^{\nu_2}\dots(1-\alpha_n)^{\nu_n}$, so dafs wieder aus der ersten Schichte die Intensität

$$e[1-(1-\alpha_1)^{\nu_1}](1-\alpha_2)^{2\nu_2}(1-\alpha_3)^{2\nu_3}\dots(1-\alpha_n)^{2\nu_n}.(1-\alpha_1)^{\nu_1}$$

hervorgeht. Die Emission der m-ten Schichte für den ersten Stoff ist also nachdem sie das Gemenge nach der ersten Schichte verlassen:

$$e[1-(1-\alpha_1)^{\nu_1}](1-\alpha_2)^{m\nu_2}(1-\alpha_3)^{m\nu_3}\dots(1-\alpha_n)^{m\nu_n}(1-\alpha_1)^{(m-1)\nu_1}$$

Addiert man diese Glieder der geometrischen Progression bis zum m-ten Gliede, so kommt als Emission des ersten Stoffes:

$$L = e[1-(1-\alpha_1)^{\nu_1}](1-\alpha_2)^{\nu_2}(1-\alpha_3)^{\nu_3}\dots(1-\alpha_n)^{\nu_n} \frac{1-[(1-\alpha_1)^{\nu_1}(1-\alpha_2)^{\nu_2}\dots(1-\alpha_n)^{\nu_n}]^m}{1-(1-\alpha_1)^{\nu_1}(1-\alpha_2)^{\nu_2}\dots(1-\alpha_n)^{\nu_n}} \quad . \quad . \quad . \quad (348)$$

Giebt man nun den vorkommenden Absorptionskoeffizienten α die Bedeutung dieser Gröfsen für die Stoffmenge 1, so ist $m\nu_r = q_r$ die Menge des r-ten Stoffes in einem von

dem Sehkegel aus dem Gemenge herausgeschnittenen Raume. Die Exponenten ν können dann ganz einfach weggelassen werden, und man hat, indem man zunächst mit $\frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_1}$ multipliziert, für den ersten Stoff

$$L = \frac{1-\prod_1^n(1-\alpha_i)^{q_i}}{1-\prod_1^n(1-\alpha_i)}\prod_1^n(1-\alpha_i)\frac{e\alpha_1}{1-\alpha_1} \tag{349}$$

Bedenkt man, daſs $e\alpha_1$ gerade die auf die Einheit der Stoffmenge bezogene Emission des ersten Stoffes ist, so kann man das letzte Glied in der Form schreiben

$$\frac{e\alpha_1}{1-\alpha_1} = \frac{4}{\pi D}m^4O^4\frac{\mu_1^4\lambda^{-5}}{m^4(\lambda^{-5}+\mu_1^4)-\mu_1^4(\lambda^{-5}+m^4)} \tag{350}$$

und erhält so, indem man über alle n Stoffe summiert, als Intensität des Spektrums des ganzen Gemenges

$$I = \frac{4}{\pi D}m^4O^4\frac{1-\prod_1^n(1-\alpha_i)^{q_i}}{1-\prod_1^n(1-\alpha_i)}\prod_1^n(1-\alpha_i)\sum_1^n\frac{\mu_i^4\lambda^{-5}}{m^4(\lambda^{-5}+\mu_i^4)-\mu_i^4(\lambda^{-5}+m^4)} \tag{351}$$

Es bedarf nicht vielen Überlegens, um einsehen zu können, daſs dieses Spektrum nicht mehr identisch ist mit dem eines kontinuierlichen Spektrums bei der Stoffmenge q. Es genügt zu diesem Behufe nachzuweisen, daſs die Übereinstimmung bereits für eine Mischung zweier Stoffe nicht mehr gilt.

Auf dieser Eigenschaft der Mischspektra beruht aber gerade die Möglichkeit einer quantitativen Bestimmung. Denn da die Temperatur des Gemenges für alle Stoffe als dieselbe angenommen wird, so könnte ein kontinuierliches Spektrum nur so zu Stande kommen, wenn zwischen den $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n$ der n verschiedenen Stoffe und dem μ des Summationsspektrums eine von der Stoffmenge abhängige, die Wellenlänge nicht enthaltende Relation bestünde, was ungereimt ist, da μ nur von der Temperatur und der stofflichen Beschaffenheit abhängen sollte.

Diese allgemeine Emissionsgleichung enthält $2n+1$ Unbekannte, nämlich die n Stoffmengen und μ und die Temperatur O oder m. Für Zwecke der Emissionsanalyse nehmen wir aber stets an, daſs die Temperatur, mithin auch m, sowie die Art der glühenden Stoffe, also auch μ bekannt sei. Man erhält somit eine Gleichung mit n Unbekannten q, die durch Beobachtung von je einer Linie aller n Stoffe gelöst werden kann.

Ganz ähnliche Verhältnisse gelten natürlich für das Absorptionsspektrum. Besteht dieses aus n Stoffen, so ist es ebenfalls unmöglich, dasselbe für alle Wellenlängen mit einem Absorptionsspektrum eines „mittleren" Stoffes zu identifizieren und es genügen mithin bei bekanntem Zustande des Körpers und bekannten Eigenschaften der absorbierten Strahlung ebenfalls n Beobachtungen (von jedem Stoffe eine charakteristische Linie) zur vollständigen Ermittelung der vorhandenen Stoffmengen.

Da sich das kompliziertere Spektrum mit der Wellenlänge nicht so verändert, wie ein einfach kontinuierliches, so folgt hieraus, daſs nicht alle Stoffe nach Maſsgabe ihrer Mengen auch intensive Strahlen besitzen werden. Diese Unterschiede werden von der Gröſse der vorhandenen Menge, von stofflichen Beschaffenheiten und hauptsächlich von der Lage ihrer Linien abhängen. Wir müssen also erwarten:

Daſs nicht alle Stoffe mit derselben Genauigkeit bestimmbar sind, und

Daſs das Spektrum eines Gemenges nicht identisch ist mit der einfachen Superposition (hier im Sinne von „Summe") der Bestandteile.

Letzteren Satz rechtfertigen zur Genüge die zahlreichen Versuche von Professor Lengyel.[1] In einem Gemische von z. B. 80 Volumteilen Oxygen und 20 Teilen Hydrogen ist von 77.3 mm bis 10.1 mm Druck keine Spur des Oxygenspektrums zu sehen, während sich das Hydrogenspektrum immer lebhafter entwickelt. Von diesem Drucke an erscheint das Oxygenspektrum Linie für Linie, ist bei 3.7 mm neben dem vollständigen Hydrogenspektrum am intensivsten, und verschwindet wieder bei 1.6 mm Druck, wo das Hydrogen noch deutlich spektral wirkt.

A. Absorptionsanalyse.

Nach einigen vorangegangenen Versuchen war Vierordt der erste, der die quantitative Analyse durch Absorption entwickelte und auch zugleich den ersten brauchbaren Apparat zur Vergleichung und Messung der Spektralintensitäten erdachte. Wir schlieſsen uns hier gedrängt seiner Darstellung an.

a) Für irgend einen Stoff und eine Wellenlänge λ sei der Transmissionskoeffizient $1 - \alpha$. Fällt dann homogenes Licht von der ursprünglichen Intensität L_0 auf eine Schichtendicke x des Körpers, so wird dasselbe nach seinem Durchgange reduziert sein auf

$$L = L_0 (1 - \alpha)^x \quad \text{. . . . .} \quad (352)$$

Will man nun mehrere Stoffe auf ihre absorbierende Kraft untersuchen, so kann als Maſs derselben die Dicke derjenigen Schichte gelten, welche das durchgehende Licht auf einen bestimmten Bruchteil des gegebenen reduziert. Je kleiner nun diese Schichte ist, desto gröſser ist die Absorptionsfähigkeit des betreffenden Stoffes, und deshalb nennt Bunsen den reziproken Wert der Schichtendicke, welche das auffallende Licht auf $\frac{1}{10}$ seiner Intensität herabdrückt, den Extinktionskoeffizienten. Bezeichnen wir denselben mit ε, so erhalten wir für ihn die folgende Definition:

$$x_0 = \frac{1}{\varepsilon}, \text{ wenn } \frac{x}{L_0} = \frac{1}{10} \quad \text{. . . . .} \quad (353)$$

Es ist daher

$$\varepsilon = -\operatorname{logbrigg}(1 - \alpha) \quad \text{. . . . .} \quad (354)$$

und demnach nach Elimination von $(1 - \alpha)$

$$\varepsilon = -\frac{1}{x} \operatorname{logbrigg}\left(\frac{L}{L_0}\right) \quad \text{. . . . .} \quad (355)$$

Der Extinktionskoeffizient ist also der negative Logarithmus der bei der Einheit der Schichtendicke hindurch gegangenen Intensität.

Da der Gehalt an absorbierender Substanz M zur Erreichung derselben Gröſse der Absorption dieselbe Wirkung hat, wie eine proportionale Verringerung der Schichtendicke, so folgt für

$$\frac{L}{L_0} = \text{konst.} \quad \text{. . . . .} \quad (356)$$

aus (355) die Gleichung:

$$M = \text{konst.} \frac{1}{x}$$

oder anders ausgedrückt:

$$\varepsilon = AM \quad \text{. . . . .} \quad (357)$$

---

[1] Spektralanalytische Untersuchung einiger Gasgemenge. Ungar. Akad. d. Wiss. 1878, Okt. 21.

wo A irgend eine von der stofflichen Beschaffenheit der betreffenden Substanz abhängige Konstante ist, die man bestimmen kann, wenn man den Extinktionskoeffizienten einer absorbierenden Lösung desselben Stoffes von genau bekannter Konzentration sucht.

Der Extinktionskoeffizient einer absorbierenden Substanz ist also proportional der Menge derselben, und dieses einfache Gesetz bildet die Grundlage der quantitativen Analyse. Es braucht wohl nicht besonders erwähnt zu werden, daſs die Konstante A für jene Wellenlänge bestimmt werden muſs, für welche sie benutzt wurde. Denn das Gesetz (357) gilt bei derselben Konstante A nur für dieselbe Wellenlänge. Daraus ist auch ersichtlich, warum weiſses (Misch-)Licht für analytische Zwecke unbrauchbar ist; die Integrale $\int L d\lambda$ und $\int L_0 d\lambda$ zwischen denselben Grenzen genommen und wie die einfachen Gröſsen L, L_0 behandelt, führen zu einer viel verwickelteren Gleichung, abgesehen davon, daſs sie das ganze Absorptionsspektrum, und nicht nur einen Teil desselben als bekannt voraussetzen.

Wie man die Analyse auf mehrere in derselben Lösung enthaltene und aufeinander chemisch nicht wirkende Substanzen ausdehnt, ist leicht zu sehen. Der Extinktionskoeffizient setzt sich aus den beiden der einzelnen Stoffe ε_1 und ε_2 so zusammen, daſs wird

$$E = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \tag{358}$$

Stellt man die Messungen an zwei verschiedenen Spektralregionen von der Wellenlänge λ' und λ'' an, so erhält man die beiden Gleichungen

$$E' = \varepsilon_1' + \varepsilon_2' \quad \text{und} \quad E'' = \varepsilon_1'' + \varepsilon_2'' \tag{359}$$

die kraft der Bedeutung von ε in die folgenden übergehen

$$E' = A_1' M_1 + A_2' M_2 \qquad E'' = A_1'' M_1 + A_2'' M_2 \tag{360}$$

woraus sich M_1 und M_2 bestimmen läſst, wenn die Konstante A für beide Stoffe in zwei verschiedenen Spektralregionen bekannt ist.

b) Behandeln wir die Frage nach unseren Gleichungen, so ist ganz allgemein für n Stoffe

$$L = \frac{4}{\pi}\mu A \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2} \prod_1^n \left\{1 - \frac{\mu_r^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu_r^2}\right)^2\right\}^{q_r} \tag{361a}$$

wenn man die Emission derselben vernachlässigen darf. Hier ist es nicht nötig, ein so kompliziertes Gesetz aufzustellen, wie es bei der Emission geschah, da alle Teilchen absorbieren, die Absorption mithin ganz dieselbe ist, ob nun der Strahl zuerst durch die Menge q_r des r-ten Stoffes usw. durchging, oder ob die Stoffe gemengt sind. Logarithmiert man die Gleichung, so kommt

$$\sum_1^n q_r \log\left\{1 - \frac{\mu_r^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu_r^2}\right)^2\right\} = \log\left\{\frac{\pi}{4\mu}\,\frac{L}{A}\,\frac{(\lambda^2+\mu^2)^2}{\lambda^2}\right\} \tag{361b}$$

und liefert, sobald nur die emittierende Lichtquelle (A, μ) und die Temperatur (m) sowie die Natur (μ_r) des absorbierenden Stoffes bekannt sind, durch n Beobachtungen von verschiedenen Spektralregionen die Stoffmengen aller n Stoffen aus einfachen linearen Gleichungen.

Auſserdem ermöglicht aber diese explizite Form der Gleichung auch die Reduktion der Ergebnisse auf verschiedene Temperaturen, indem man einfach

$$K(\mu O)^4 - AD(\mu O)\frac{Q}{O} + \lambda D = 0$$

zu setzen hat. K und k bestimmen sich einfach aus bekannten Lösungen von bekannter Temperatur. Ist aber die Reduktion innerhalb einer Grenze auszuführen, in der die spezifische Wärme nahezu konstant gesetzt werden darf (was meistens in einem Intervalle von selbst 100° erlaubt sein wird), so hat man einfach zu setzen:

$$\mu = \mu_0 \frac{\Theta_0}{\Theta}$$

wo $\mu_0 \Theta_0$ für einen Körper eine Konstante darstellt. Man kann somit die gefundene Stoffmenge auf eine Lösung von gewünschter Temperatur beziehen, oder umgekehrt eine beliebig temperierte Lösung benützen (so lange nur deren eigene Emission nicht in Betracht kommt), wenngleich die Analyse für eine ganz bestimmte Temperatur erfordert ist.

c) Eingedenk der Vorteile, welche die Methode der langen und kurzen Linien mit sich brachte, versuchen wir diesen Fall auch für die Absorptionsanalyse zu verwerten. Dabei ist es nötig zu besitzen: eine Lichtquelle, welche in verschiedenen Punkten verschiedene nach bekanntem Gesetze wechselnde Temperaturen zeigt, oder bei konstant temperierter Lichtquelle ein Gefäſs mit wechselnder Dicke (am einfachsten ein keilförmiges Gefäſs): endlich können beide Umstände vereint sein. Da die Bedingungen dieser Methode doch nur künstlich hergestellt werden, so nehmen wir der Einfachheit halber konstante Lichtquelle (d. h. wir fangen nicht das Bild, sondern das diffuse Licht derselben auf) und prismatische Gefäſse an. Unter dem Endpunkte der Linie ist dann jener Punkt der Linie zu verstehen, für welchen die bei der Dicke δ des Gefäſses transmittierte Intensität bis auf ein unendlich Kleines mit der Intensität des Hintergrundes identisch wird. Man hat also für n Stoffe wieder ganz allgemein die Gleichung (361a), in welcher jetzt aber das Verhältnis

$$L : \frac{4}{\pi} \mu \varDelta \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^2} = \iota_1, \ \log \iota_1 = \iota' \quad \ldots \ldots \quad (362)$$

für alle Farben konstant ist, und so ein für allemal bestimmt werden kann. Die Gleichung der quantitativen Absorptionsanalyse wird also sehr einfach zur folgenden:

$$\sum_1^n {}_r\, q_r \log \left\{ 1 - \frac{\mu_r^4}{m^4} \left(\frac{\lambda^2 + m^2}{\lambda^2 + \mu_r^2} \right)^2 \right\} = \iota' \quad \ldots \ldots \quad (363)$$

die für n Spektralstellen angewendet auf ein System von n linearen Gleichungen in den q führt. Die Messung geschieht hier so, daſs man die Dicke des Glasgefäſses an der Stelle miſst, wo die Absorptionsbande mit dem Hintergrunde gleich wird, d. h. wo die dunkle Linie verschwindet.

Hat man nun nach dieser oder der vorigen Methode q bestimmt, so ist dieses die in der Dicke δ des Gefäſses enthaltene Stoffmenge, woraus sich auch die Stoffmenge, auf die Einheit des Volumens bezogen, berechnen läſst.

Vergleicht man beide Methoden gegeneinander, so besitzen sie gemeinsam den Vorteil, von Subjektivitäten befreit zu sein, denn beidemal vergleicht man die Intensitäten derselben Spektralstellen; nur ist nach der ersten Methode der Quotient besonders zu bestimmen, während er für die zweite ein für allemal festgegeben ist. Auſserdem ist der Vorteil des letzteren, daſs sie nur den Punkt aufsucht, wo zwei Intensitäten gleich werden, während der erstere Vorgang wirklich zwei Intensitätsmessungen erfordert.

B. Emissionsanalyse.

a) Zum Behufe der Quantitätsbestimmung der n Bestandteile eines emittierenden Gemenges, das natürlich ganz allgemein in Gasform vorausgesetzt werden darf, schreiben wir die Gleichung (351) in der Form

$$\prod_1^n \left[1-\frac{\mu_i^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu_i^2}\right)\right]^{q_i} = 1 - \frac{1-\prod\limits_1^n \left[1-\frac{\mu_i^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu_i^2}\right)\right] \frac{\pi D}{4}\,\frac{L}{m^4\Theta^4}}{\prod\limits_1^n \left[1-\frac{\mu_i^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu_i^2}\right)\right] \sum\limits_1^n \frac{\mu_i^4 q_i}{m^4(\lambda^2+\mu_i^2)-\mu_i^4(\lambda^2+m^2)}} \tag{364}$$

die nun durch Logarithmieren einfach in eine lineare Gleichung in q übergeht. Durch n an verschiedenen charakteristischen Linien des Spektrums angestellten Beobachtungen erhält man ein vollständiges lösungsfähiges System. Da hier Intensitäten (nach irgend einem Maße, das aber auch der Konstanten D zu Grunde liegen muß) gemessen werden, so muß auch die Entfernung des Beobachters von der Lichtquelle in Betracht gezogen und auf dasjenige Maß reduziert werden, welches in D angenommen ist. Streng muß die Voraussetzung eingehalten sein, daß sich während der ganzen Messung die Intensität oder Temperatur des Gasgemisches nicht ändere, während bei der Absorptionsanalyse nur vorausgesetzt wird, daß eine Änderung während der Vergleichung desselben Spektralbezirkes nicht vorkomme. Am besten wird man auch hier mit dem diffusen Lichte der Gasmischung arbeiten, da dann anzunehmen ist, daß jeder Strahl durchschnittlich derselben Temperatur zukomme.

b) Benutzt man aber zum Behufe der Analyse das Bild der Lichtquelle, die in verschiedenen Punkten verschiedene Temperaturen besitzen mag, so kann man nach der Lockyerschen Methode verfahren, indem man die Länge der Linien — also direkt die Temperaturen mißt, bei welchen der Lichteindruck einer Linie gerade verschwindet. Dann wird $L = \epsilon$ konstant und unendlich klein, und an Stelle von μ tritt überall

$$\mu_i = c_i \Theta_i$$

wenn c_i eine von Stoff zu Stoff variierende Konstante bedeutet. Wie man direkt die Länge einer Linie als die Temperatur ihres Verschwindens bestimmt, werden wir später besprechen. Hier genügt es hervorzuheben, daß man durch diese Methode von allen Schwankungen der Temperatur frei wird, da ja die Stoffmenge gerade in dem Augenblicke bestimmt ist, in welchem die Temperatur gemessen wird.

Auch hier ist es natürlich möglich, die berechneten Stoffmengen auf beliebige Temperaturen zu reduzieren.

C. Analyse aus der Zahl der Spektrallinien.

Die einfachste quantitative Analyse ist entschieden jene, welche zuerst Lockyer erdachte, indem er einfach die Zahl der Linien eines Stoffes zählt, welche in einem Gemenge bei der Temperatur Θ sichtbar sind. Diese Zahl stellt er für gegebene Prozentgehalte ein für allemal fest und erreicht, indem er noch die Länge der Linien schätzungsweise in Betracht zieht, eine erstaunliche Genauigkeit.

Es ist aber einleuchtend, daß diese Methode um so weniger genau sein kann, je weniger Linien ein Stoff überhaupt besitzt. Denn die Zunahme der Zahl der Linien

ist selbstverständlich eine diskontinuierliche. Daher mufs Lockyer auch noch auf die Längen der Linien Acht haben.

Die theoretische Entwickelung dieser Aufgabe ist äufserst schwierig: man müfste aus der vorher (351) benutzten Emissionsgleichung die Wellenlänge λ_1 und λ_2 entwickeln, bei welcher die Intensität ι wird, also die Grenzen des Spektrums für die Temperatur Θ darstellen. Man erhält so eine Gleichung in λ vom q-ten Grade, die natürlich allgemein gar nicht lösbar ist. Wäre nun aber λ_1 und λ_2 bekannt, so müfste die entsprechende Ordnungszahl r dieser Linien aus den Balmerschen Formeln für den betreffenden Stoff entwickelt werden, indem man hätte:

$$\frac{\lambda_1^2}{\mu_r^2} = \frac{1}{\varphi(r_1) - 1}, \quad \frac{\lambda_2^2}{\mu_r^2} = \frac{1}{\varphi(r_2) - 1}$$

und da allgemein λ_1 und λ_2 in r_1 und r_2 nicht eine ganze Zahl liefern würde, wenn nicht eben λ_1 und λ_2 Linien desselben Stoffes sind, so müfste für r_1 und r_2 jene ganze Zahl genommen werden, welche resp. der nächst kleineren und nächst gröfseren Wellenlänge als λ_1 und λ_2 entspricht. Dann ist $r_2 - r_1$ die Zahl der bei der Temperatur Θ sichtbaren Linien durch Θ_1 und q_1 der Stoffmenge ausgedrückt. Führt man diese Rechnung für alle Stoffe aus, so erhält man alle n Stoffmengen, aber nicht mehr als lineare Gleichungen. Man bemerkt, dafs die praktisch einfachste Methode gerade theoretisch die gröfsten Schwierigkeiten bietet: erstens technische Schwierigkeiten in der Auflösung der Gleichung; theoretische, indem die Kenntnis der Wellenlängengleichung für alle Stoffe gefordert ist.

Freilich kann man die ganze Sache umkehren, indem man zu gegebenen Stoffmengen die Grenzen des Spektrums sucht, und nun aus Spektraltafeln die zwischen diese Grenzen fallende Anzahl von Linien jedes einzelnen Stoffes abzählt, und dann die Resultate tabellarisch anordnet. Doch wird dieser Vorgang nur dann lohnend sein, wenn man stets eine Mischung derselben Stoffe zu untersuchen hat, welcher Fall im praktischen Leben oft häufig genug vorkommen mag.

Um ein Beispiel für die theoretische Behandlung dieses Problems zu geben, berechnen wir hier die Zahl der Linien eines einfachen Gases, für welche die (spezielle) Balmersche Gleichung gilt, und dessen Absorptionsvermögen so klein sei, dafs höhere als die erste Potenz desselben vernachlässigt werden können. Die Längengleichung lautet dann:

$$\Theta^{-2} = c_1\sqrt{q}\,\lambda - c_2\lambda^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (365)$$

Fafst man Θ als gegeben auf, so bedeutet λ die Wellenlänge desjenigen Strahles, welcher soeben verschwindet. Die beiden Geenzen des Spektrums sind somit:

$$\lambda_1 = \frac{c_1\sqrt{q}}{2c_2} - \sqrt{\frac{c_1^2 q}{4c_2^2} - \frac{\Theta^{-2}}{c_2}}, \quad \lambda_2 = \frac{c_1\sqrt{q}}{2c_2} + \sqrt{\frac{c_1^2 q}{4c_2^2} - \frac{\Theta^{-2}}{c_2}} \quad \ldots \quad (366)$$

und diesen entsprechen nach der Balmerschen Gleichung die Ordnungszahlen:

$$n_1 = k\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \mu}}, \quad n_2 = k\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \mu}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (367)$$

Bedeutet n die Zahl der bei der Temperatur Θ und der Stoffmenge q sichtbaren Linien, so hat man:

$$n = k\left[\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \mu}} - \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \mu}}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (368)$$

und indem man λ_1 und λ_2 substituiert und der Symmetrie halber $\mu^2 = \dfrac{\Theta^{-2}}{c_2}$ setzt:

$$n = l \sqrt[4]{\left(\frac{c_1}{2c}\right)^2 q - \mu} \cdot \sqrt[2]{\frac{2\mu_0}{\sqrt{q}\,\frac{c_1}{c}\,\mu_0 - (\mu_0 + \mu)}} \tag{369}$$

womit q aus der quadratischen Gleichung

$$2\mu_0 l \sqrt{\left(\frac{c_1}{2c}\right)^2 q - \mu} = n \frac{c_1}{c} \mu_0 \sqrt{q} - n(\mu_0 + \mu) \tag{370}$$

bestimmt werden kann.

In ähnlicher Weise kann man die Methode der Linienzählung auch auf das Absorptionsspektrum übertragen, wenn man bei konstanter Temperatur und keilförmigem Absorptionsgefäfs (wie wir es früher gethan) eine auf die Dicke des Gefäfses beim Verschwinden der Absorption Bezug habende Definition der Länge der Linie einführt. Doch darf man hierbei nicht vergessen, dafs das Absorptionsspektrum nicht durch zwei Wellenlängen λ_1 und λ, sondern nur durch eine begrenzt ist. Man mufs daher willkürliche Grenzen für die zweite Begrenzung annehmen. Wir erachten es jedoch nicht für nötig, näher auf diesen Gegenstand einzugehen.

Ein Hauptunterschied der Emissionsanalyse vor der Absorptionsmethode besteht in der Notwendigkeit (sozusagen) absoluter Intensitätsbestimmungen, die den grofsen Nachteil mit sich führen, dafs das unmittelbar beobachtete subjektive Spektrum zuerst auf ein objektives reduziert werden mufs, wozu es der Kenntnis der Schwächung der benutzten Apparate als Funktion der Wellenlänge bedarf. Auch bei der Methode der Linienzählung tritt dieser Umstand auf, insofern die Grenzen des subjektiven Spektrums stets zu enge gezogen sind gegenüber den objektiven. Man erhält also die Anzahl der Linien für dieselbe Temperatur subjektiv stets zu klein. Von allen diesen Korrektionen soll der folgende diesem Zwecke gewidmete Abschnitt handeln.

33. Fortpflanzung der Spektra im Raume.

Wenn eine Strahlung von einem Punkte des materieerfüllten Raumes ausgeht, so pflanzt sie sich je nach der Länge der Welle mit verschiedener Geschwindigkeit in Kugelwellen fort. Da hier zwei Elemente, Entfernung und Gröfse der Welle zu betrachten sind, so kann man entweder die Verteilung des Spektrums in einem gegebenen Punkte des Raumes, oder das Spektrum in einem gegebenen Momente betrachten.

Ist das Spektrum, die Wellenlänge stets im Körper gemessen betrachtet, im leeren Raume durch

$$L = \frac{4}{\pi} \mu_2 l \frac{\lambda^2}{(l^2 + \mu^2)} \tag{371}$$

gegeben, so ist die Intensität im materieerfüllten Raume, dessen Brechungsindex n ist, gleich Ln. Im Zeitpunkte t, wo die Wellen mit der relativen Geschwindigkeit $\frac{1}{n}$ den Weg

$$r = \frac{t}{n} \tag{372}$$

zurückgelegt haben, wird sie $\frac{Ln}{r}$. Da nun A durch die Intensität L_0 der Welle λ_0 ausdrückbar ist, so haben wir für das ganze Spektrum den Ausdruck

$$L_n = L_0 \frac{(\lambda_0^2 \nu^2 + \mu^2 n_0^2)^2}{\lambda^2_0} \frac{1}{t^2} \int_0^\infty n^4 \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 \nu^2 + n^2 \mu^2)^2} d\lambda \quad \ldots \quad (373)$$

Beachtet man, dafs

$$n^2 = \frac{l^2 - \lambda^2}{k^2} \quad \ldots \quad (374)$$

gefunden wurde, wo l und k das Medium charakterisierende Gröfsen sind, so wird die Intensität nun in einer Variabeln ausgedrückt.

$$L_n = L_0 \frac{(\lambda_0^2 \nu^2 + \mu^2 n_0^2)^2}{\lambda^2_0} \frac{1}{t^2} \int_0^\infty \frac{\lambda^2 [l^2 - \lambda^2]^2}{[\lambda^2(\nu^2 k^2 - \mu^2) + \mu^2 l^2]^2} d\lambda \quad \ldots \quad (375)$$

Das vollständige Spektrum befindet sich also stets in einer Kugelschale, dessen Dicke

$$\Delta = t\left(\frac{1}{n_{\lambda=\infty}} - \frac{1}{n_{\lambda=0}}\right) = \frac{k}{l}\, t \quad \ldots \quad (376)$$

beträgt, und proportional der Zeit zunimmt. Würde also ein einziger Impuls der Lichtquelle stattfinden, so würde ein entfernter Beobachter die Lichtquelle gar nicht in der ihr eigenen Mischfarbe sehen, sondern sie nacheinander in allen homogenen Farben des Spektrums, von Rot angefangen, erblicken. Der Übergang einer Farbe in die andere wäre um so langsamer, je entfernter der Beobachter stünde, und die Dauer, während welcher er den momentanen Impuls als fortbestehend beobachtete, ist durch die Dicke der Kugelschale gegeben.

Fixsterne, welche in der ihnen eigenen unmefsbaren Entfernung von einem dunklen Körper bedeckt werden, (wie dies mit grofser Wahrscheinlichkeit von einigen, z. B. von Algol wirklich behauptet werden darf) müfsten in violettem Lichte verschwinden, und im roten Lichte wieder erscheinen. Da diese Erscheinung thatsächlichlich nie beobachtet wird, so ist sie ein Beweis für die unendliche Kleinheit der Ätherdispersion.

Im zweiten Falle nehmen wir an, es sei die Verteilung des Spektrums in einem Punkte des Raumes, dessen Entfernung von der Lichtquelle r sei, zu suchen. Zur Zeit t werden dann alle jenen Strahlen auf der Oberfläche einer mit dem Radius r um die Lichtquelle geschlagenen Kugel sich befinden, welche im Zeitpunkte τ ausgingen, und in der Dauer $t - \tau$ den Weg r zurücklegten. Die volle Intensität ist also gegeben, wenn man alle Strahlen summiert, welche zwischen der Zeit τ_0 und τ_∞, der Austrittszeit der kürzesten und längsten Wellen, die Lichtquelle verliefsen. Es ist also:

$$\Delta = L_0 \frac{(\lambda_0^2 \nu^2 + \mu^2 n_0^2)^2}{\lambda^2_0} \frac{1}{r^2} \int_{t - r n_{\lambda=0}}^{t - r n_{\lambda=\infty}} \frac{\lambda^2 [l^2 - \lambda^2]\, d\tau}{[\lambda^2(k^2 \nu^2 - \mu^2) + \mu^2 l^2]^2} \quad \ldots \quad (377a)$$

Setzt man, was gleichgiltig ist, die Beobachtungszeit als Anfangspunkt der Zeitzählung voraus, so ist $t = 0$, und schreibt man noch $\tau = -rn$, so kommt:

$$\Delta = L_0 \frac{(\lambda_0^2 \nu^2 + \mu^2 n_0^2)^2}{\lambda^2_0} \frac{1}{r} \int_{n_{\lambda=\infty}}^{n_{\lambda=0}} \frac{\lambda^2 [l^2 - \lambda^2]\, dn}{[\lambda^2(k^2 \nu^2 - \mu^2) + \mu^2 l^2]^2} \quad \ldots \quad (377b)$$

das heifst aber nichts anderes, als dafs man, um die totale Intensität eines Spektrums zu erhalten, ganz einfach von $\lambda = 0$ bis $\lambda = \infty$ über das ganze Spektrum zu integrieren habe. Anders ausgedrückt: Nach einer endlichen Zeit befinden sich in einem Punkte von endlicher Entfernung von der Lichtquelle alle denkbaren Schwingungen.

III Der ungetrennte Strahlenkomplex

34 Theorie des Mischlichtes

Obwohl wir das Spektrum als Summe aller Schwingungen unabhängig von räumlicher Trennung der einzelnen Strahlen definierten, wohl auch die Trennung nicht voraussetzten, mufsten wir die Intensität in unseren Entwickelungen doch stets als Funktion der Wellenlänge auffassen Wir gehen endlich noch zu dem Falle über wo unmittelbar der ungesonderte Strahlenkomplex auf unser Bewufstsein wirkt Dabei wollen wir aber, wie es die Erfahrung in jedem einzelnen Falle lehrt nicht annehmen dafs das Auge, oder irgend ein Apparat den ganzen von $\lambda = 0$ bis $\lambda = \infty$ sich erstreckenden Komplex umfafst sondern nur den verhältnismäfsig geringen Teil desselben, der zwischen den Wellenlängen λ_1 und λ_2 liegt, wobei z B für das menschliche Auge $\lambda_1 = 0\,39$ und $\lambda_2 = 0\,76$ beträgt

a) Betrachtet man einen solchen Komplex näher, so fallen darin alsbald quantitative und qualitative Unterschiede auf die wir als Intensität und (Misch)-Farbe bezeichnen Der erstere Begriff kann seiner subjektiven Bedeutung entkleidet werden, der letztere nicht Denn Farbe (wir verstehen darunter in diesem ganzen Abschnitte stets Mischfarbe) ist zu definieren als Wirkungs-Unterschied mechanisch gleicher Intensität

Aus der Spektralgleichung folgt als Intensität des Strahlenkomplexes von $\lambda = \lambda_1$ bis $\lambda = \lambda_2$

$$I = \Delta\,\frac{4\mu}{\pi}\left[\frac{1}{2\mu}\operatorname{arctg}\frac{\mu(\lambda_2-\lambda_1)}{\mu+\lambda_1\lambda_2} - \frac{1}{2}\,\frac{(\mu-\lambda_1\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_1)}{(\lambda_1^2+\mu)(\lambda_2^2+\mu)}\right] \tag{378}$$

oder in einer von nun an stets zu gebrauchenden Bezeichnung

$$I = \Delta F(\mu) \tag{379}$$

da der Klammerausdruck bei demselben perzipierenden Agens nur von μ abhängt Δ ist die Totalintensität des Spektrums, I die Intensität zwischen den Grenzen λ_1 und λ_2 des Spektrums $F(\mu)$ die Farbe des glühenden Körpers Können die beiden letztgenannten Variabeln unabhängig von einander bestimmt werden, so ist dadurch Δ und μ, also das ganze Spektrum gegeben Da der Beobachtung aber immer nur zwei Stücke zugänglich sind, nämlich Intensität und Farbe, so kann im allgemeinen daraus nur das auf die Einheit der Stoffmenge bezogene kontinuierliche Spektrum bestimmt werden Sowie ein Spektrum mehr als zwei Elemente μ und Δ enthält, kann immer nur das auf die Einheit der Stoffmenge bezogene kontinuierliche Spektrum dargestellt werden welches ungesondert das gegebene Spektrum vollständig zu ersetzen vermag Wir sagen vollständig denn da jede Beobachtung zwei Daten liefert, und das kontinuierliche Spektrum zwei Parameter besitzt, so kann immer ein solches Spektrum, welches die Beobachtung befriedigt, dargestellt werden Ein Beispiel Wäre glühendes Hydrogen gegeben, und bestimmte man die Intensität I und die Farbe $F(\mu)$ desselben, so wäre dadurch ein kontinuierliches Spektrum vollkommen definiert, welches dem Auge ganz genau die Erscheinung des glühenden Hydrogens bieten würde

Man ersieht daraus, dafs für ein diskontinuierliches Spektrum von n Linien zwischen $\lambda = \lambda_1$ und $\lambda = \lambda_2$ die Gleichung des ungesonderten Komplexes so zu schreiben wäre

$$I = \Delta\,\frac{4}{\pi}\,\mu\sum_{1}^{n}\frac{\varepsilon_r}{\lambda_r^2+\mu}$$

Hier wäre der Faktor von $\varDelta$ als Farbe zu bezeichnen. Kennt man nun auch I und μ, so ist damit noch nichts gethan, da noch immer $2n$ Unbekannte bleiben, nämlich die n Wellenlängen der emittierten Strahlen und die n Breiten ε der Linien, die sich durch Beobachtung nicht bestimmen lassen. Man müſste daher wieder auf das explizite Spektrum zurückgehen und hätte einfach einen Umweg eingeschlagen. Es ist daher naturgemäſs, uns hier nur auf kontinuierliche Spektra zu beschränken.

b) Wir definierten die Farbe als ein rein subjektives Element, den Wirkungsunterschied mechanisch gleicher Intensitäten. Wenn wir gleich darauf im scheinbaren Widerspruche mit dem Gesagten $F(\mu)$ als Farbe definieren, so geschieht das nur Kürze des Ausdrucks halber.

Daſs Farbenempfindung nach unserer Definition jedem spektralanalytischen Reagens zukommt, beweiſst der Umstand, daſs gleiche Intensitäten qualitativen Unterschieds, wie allgemein bekannt, verschieden auf Thermosäulen und auf photographische Platten wirken. Gleich intensive Sterne verschiedener Farben erzeugen durchaus verschieden helle photographische Bilder. Unsere Farbenbestimmung ist also allgemein.

Um nun näher zu untersuchen, ob der Begriff Farbe allgemein analytisch darstellbar ist, gehen wir von der homogenen Farbe irgend eines Lichtstrahles aus. Diese können wir ganz allgemein und unzweideutig als eine reine Funktion $\varphi(\lambda)$ der Wellenlänge definieren. (Eigentlich als Funktion der Schwingungsdauer, doch bleiben wir in demselben Medium, so kann auch λ dafür gewählt werden). Die Funktion muſs rein sein, sie darf keine irgendwie vom Zustande oder der stofflichen Beschaffenheit des Körpers abhängige Gröſse enthalten, da ja Strahlen gleicher Wellenlängen aller Körper beliebigen Zustandes dieselbe Farbe besitzen. Die Mischfarbe zwischen den Grenzen λ_1 und λ_2 des Spektrums geht nun aus der homogenen Farbe dadurch hervor, daſs zwischen den besagten Grenzen eine Operation mit der Funktion $\varphi(\lambda)$ vorgenommen wird, die wir so bezeichnen:

$$F = \left\{\varphi(\lambda)\right\}_{\lambda_1}^{\lambda_2}$$

während die homogene Farbe durch

$$f = \varphi(\lambda)$$

gegeben ist. Welcher Natur diese vorzunehmende Operation ist, läſst sich a priori nicht bestimmen; eine Integration kann sie schwerlich sein, da man wohl nicht zugeben wird, daſs man Farben addieren könne. Wie sie aber auch beschaffen sei, das fertige Resultat stellt jedenfalls einen Ausdruck

$$F = [\lambda_1,\ \lambda_2]$$

dar, der nur von den konstanten Grenzen der Sensibilität des betreffenden Reagens abhängt. Das ist aber unrichtig. Denn die Mischfarbe hängt vom Zustande und von der Natur des glühenden Stoffes ab. Wir folgern daraus: in ihrer unmittelbarsten Bedeutung ist die Farbe eine rein subjektive Erscheinung ohne physikalische Definition.

Anders wird die Sache, wenn wir die Grenzen λ_1 und λ_2 zu objektiven Grenzen des Spektrums machen. Für diese fanden wir die Beziehungen:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2\sqrt{\frac{\varDelta\mu}{\pi\iota}}\,,\quad \lambda_1\lambda_2 = \mu^2$$

wo ι die unendlich kleine Intensität an den Grenzen des Spektrums bedeutete. Da die Farbe ein von der Intensität unabhängiger Begriff sein muſs (solange man mit endlichen

Werten der Intensität zu thun hat) die erste Beziehung aber Δ enthält, und nur diese zwei Beziehungen existieren, so muſs die zweite Anwendung dergestalt stattfinden, daſs die Operation $\left\{\varphi(\lambda)\right\}_{\lambda_1}^{\lambda}$ der folgenden Bedingung genüge

$$\left\{\varphi(\lambda)\right\}_{\lambda_1}^{\lambda_2} = f(\lambda_1 \lambda_2) = f(\mu)$$

und diese Gleichung sagt nun in der That aus, daſs die homogene Farbe eine reine Funktion der Wellenlänge ist, während die Mischfarbe vom Zustand und Stoffe abhängt. Daſs die vorliegende Operation keine Integration ist, können wir nun a posteriori nachweisen. Sie forderte die Gleichung

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varphi(\lambda)\, d\lambda = f(\lambda_2) - f(\lambda_1) = f(\lambda_1 \lambda_2)$$

die nicht zu erfüllen ist. Auſser der hingeschriebenen Bedingung der unbekannten Operation lernen wir nur noch eine, welche erfüllt sein muſs. Die Mischfarbe bleibt unverändert, wenn aus ihr in Bezug auf die Wellenlänge (im sichtbaren Spektrum) wenigstens neun nahezu äquidistante Bündel homogenen Lichtes ausgelöscht werden. Die absolute Lage der extinguierten Wellenlängen ist ohne Einfluſs.[1]

Es gelang uns nicht mit Hilfe jener beiden Sätze neue Eigenschaften der Farbenfunktion zu finden.

c) Ein ganz eigentümliches Verhalten zeigt die Funktion $F(\mu)$, die wir kurze halber als Farbe bezeichnet hatten. Ist μ unendlich klein oder unendlich groſs, so wird $F(\mu)$ Null und erreicht für das Auge bei dem Werte $\mu = 0.309$ ein Maximum. Für die Fixsterne, deren Temperatur wir doch als die höchste zu betrachten gewohnt sind, ist $\mu = 0.45$, 0.55 und 0.60 im Mittel, je nachdem der Stern bläulich-weiſs, gelb (wie unsere Sonne $\mu = 0.520$) oder rot ist. Da zugleich die Sterne in gewissem Sinne als „mittlere Stoffe" betrachtet werden können, insofern sie aus allen unseren bekannten Elementen zusammengesetzt scheinen, so ersieht man, daſs die höchst temperierten Sterne noch um etwa 1½ Typenklassen (so nennt man die Sterne nach Maſsgabe ihres μ-Wertes) heiſser sein müſsten, um den Maximalwert der Farbe annehmen zu können.[2] Da man doch wohl berechtigt ist, zu gleichen Werten der Funktion $F(\mu)$ gleiche Farbenempfindungen vorauszusetzen, wie dies auch die oben abgeleitete, wenn auch unbekannte Funktion $f(\mu^2)$ bestätigt, so folgt daraus, daſs mit stetig wachsender Temperatur (mit stetig abnehmendem μ) die Farbe endlich in verkehrter Richtung zurückschreitet, in welcher sie vor dem Maximum anstieg. Temperaturen, welche z. B. $\mu = 0.750$ und $\mu = 0.096$ entsprechen (die also bei Gasen in dem Verhältnis von etwa 1 : 8 stunden) gehören gleichen Farben an. Es scheint daher, als ob die Angabe der Funktion $F(\mu)$ die Gröſse μ nicht eindeutig bestimmte. Nimmt man aber das kurz vorher für die heiſsesten Sterne Gesagte hinzu, so darf man wohl sagen, daſs alle in der Natur vorkommenden Farben auf dem langsamer ansteigenden Aste der Farbenkurve enthalten sind.

---

[1] Stefan, Interfer. des weissen Lichtes bei groſsen Gangunterschieden. Akademie d. Wissensch. Wien 1864. Dezember 1.

[2] Man erinnert sich, daſs auch Hydrogen im Augenblick der Dissoziation noch diesseits dieses Maximalwertes steht.

μ hängt aber nicht nur von der Temperatur, sondern auch vom Stoffe ab, und zwar in der Weise, daſs sie bei gleicher Temperatur für undurchsichtige Körper gröſsere, für absolut schwarze Körper den gröſsten Wert annimmt. Man hat also den Satz: Bei gleichen Temperaturen ist ganz allgemein die Farbe des Lichtes jenes Körpers die intensiver weiſse, welcher dunkler ist. Und dieser Satz gilt sowohl vom auf- als absteigenden Ast der Farbenkurve.

Solange die Grenzen des Spektrums endlich bleiben, besteht die Zweideutigkeit der Funktion $F(\mu)$ in Bezug auf μ fort; je mehr sich aber die Grenzen dem Werte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \infty$ nähern, desto ähnlicher wird $F(\mu)$ der Funktion $\frac{4\mu}{\pi}$, die nun völlig eindeutig erscheint.

Wollte man in die Spektralgleichung statt der Totalintensität die absolute Temperatur einführen, so hätte man die Gleichung:

$$I = \frac{\mu^3 \Theta^4}{D} F(\mu) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (380)$$

welche durch die Beobachtung des impliziten Spektrums Temperaturbestimmungen erlaubt.

Ein besonders interessanter Fall, der näherer Untersuchung verdient, ist, wenn konstanter Intensität ein veränderliches Spektrum entspricht. Da I von zwei unabhängigen Elementen gebildet ist, so können diese wohl in einer Verbindung miteinander stehen, die $I =$ konst. macht, was auch sonst Θ oder μ sein mag. In der Theorie der expliziten Spektra braucht dieser Fall natürlich nicht erörtert zu werden, da hier Änderungen der Einzelnstrahlen bei konstanter Summationsintensität dem Auge auf einen Blick sich erschlieſsen. Ist also $I = I_0$ konstant, so muſs bei veränderlichem Spektrum die Temperatur so variieren, daſs in jedem Augenblicke ist

$$\Theta = \sqrt[4]{I_0} \sqrt[4]{\frac{D}{\mu^3 F(\mu)}}$$

Nun fanden wir aber, daſs bei allen Körpern bis auf Unterschiede der Temperatureinflüsse auf die spezifische Wärme

$$\mu \Theta = k$$

ist, wo k nur von der stofflichen Beschaffenheit des Körpers abhängt; es muſs also die Gleichung bestehen:

$$\frac{2}{\pi} \frac{k^3}{D} \left[\operatorname{arctg} \frac{k(\lambda_2 - \lambda_1)\Theta}{k^2 + \lambda_1 \lambda_2 \Theta^2} - k \frac{(k^2 - \lambda_1 \lambda_2 \Theta^2)(\lambda_2 - \lambda_1)}{(k^2 + \lambda_1^2 \Theta^2)(k^2 + \lambda_2^2 \Theta^2)} \Theta \right] \Theta = I_0 = \text{konst.}$$

oder kürzer geschrieben:

$$\frac{k^3}{D} F\left(\frac{k}{\Theta}\right) \cdot \Theta = I_0 = \text{konst., oder } \frac{k^4}{D} F(\mu) \cdot \frac{1}{\mu} = I_0 = \text{konst.}$$

Es genügen daher nur jene Temperaturen der vorgeschriebenen Unveränderlichkeit des Spektrums, welche Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind. Betrachtet man aber die etwa aus numerischen Tafelwerten konstruierte Kurve $\frac{F(\mu)}{\mu}$, so wird man sogleich sehen, daſs einem gegebenen Werte stets eine reelle Wurzel entspricht. Ein kontinuierliches Spektrum kann sich also nicht so verändern, daſs die Intensität innerhalb fester Grenzen konstant bliebe. Der Satz ist wichtig, weil er einen Beweis liefert, daſs konstanter Intensität (zwischen festen Grenzen) auch konstantes Spektrum entspricht, was von vorneher nicht behauptet werden dürfte.

Anders stellte sich freilich die Sache, wenn die Temperaturänderungen so durchgreifender Natur waren, daſs infolge derselben auch die brechbarere objektive Grenze des Spektrums in das sichtbare Spektrum hereinfielen Dann wären zugleich O und λ_1 O und λ_1 veränderlich, und es existierte dann immer ein Wertekomplex von O und λ_1 der die Gleichung (380) für $I =$ konst erfüllt Dann kann allerdings das Spektrum veränderlich sein, während die Intensität konstant bleibt Die Beziehung, welche zwischen λ_1 und O stattfinden muſs lautet in ihrem ersten Gliede ausgedruckt

$$\Theta = \frac{\pi I_0 D}{2 J^3}\left\{\frac{h}{h(\lambda - \lambda_1)} - \frac{}{\lambda_1 \lambda} + \quad \right\}$$

Ein solcher Fall wird jedoch wenn überhaupt — nur sehr selten vorkommen

Man könnte nun noch untersuchen, welchen Einfluſs vergröſserte Stoffmenge auf die Intensität hat usw Da jedoch diese Resultate implizite in unseren früheren Ableitungen schon enthalten sind, umgekehrt aber nicht zur Bestimmung des Spektrums ausreichen, so wollen wir uns nicht weiter hiermit beschäftigen

35 Bestimmung des Zustandes aus dem Spektrum

Bisher entwickelten wir stets das Spektrum als Funktion des Zustandes und der stofflichen Natur des emittierenden Körpers, und erst bei der Behandlung der quantitativen Analyse trat uns das Problem entgegen, aus dem gegebenen Spektrum eine Zustandsvariabele zu entwickeln Wir kehren nun den ganzen Vorgang um und stellen die Aufgabe aus dem bekannten Spektrum Zustand und Natur des strahlenden Körpers zu bestimmen

Durch Beobachtungen erhält man unmittelbar nur die Intensitäten homogener Strahlen von bekannter Wellenlänge, wir schreiben daher die Spektralgleichung in der Form

$$L = L_0 \frac{\lambda}{\lambda_0^2}\left(\frac{\lambda \quad + \mu^2}{\lambda \quad 1 + \mu^2}\right)$$

in welcher wir sie jetzt stets benutzen werden Die Totalintensität bezogen auf die Einheit der Stoffmenge ist

$$\Lambda = \frac{\pi}{4\mu}\frac{(\lambda \quad + \mu \quad)^2}{\lambda}$$

Die Parametergleichungen, die wir benutzen werden lauten weiter

$$\text{I} \qquad O^4 = D\frac{J}{\mu^3}r$$

$$\text{III} \qquad \mathfrak{t} = \mu O$$

$$\text{IV} \qquad pv = \frac{MR}{\mu}$$

wobei wir voraussetzen, daſs D sich auf die Einheit der Entfernung beziehe Die (III) Gleichung ist identisch mit unserer III Parametergleichung, wenn darin die spezifische Wärme konstant genommen wird, indem $\mathfrak{t}$ einfach eine Wurzel der Gleichung vierten Grades darstellt Diese Konstanz der spezifischen Wärme wollen wir jetzt annehmen, oder vielmehr nur voraussetzen, daſs die Temperaturintervalle, auf welche sich diese Gröſse bezieht, kleiner seien, als daſs sich innerhalb derselben merkliche Änderungen einstellten Man kann aber, und dieses nun mit voller Strenge, auch annehmen daſs $\mathfrak{t}$ eine Temperaturfunktion

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{k}_1 \Theta + \mathfrak{k}_2 \Theta^2 \ldots$$

sei, in welcher die Koeffizienten $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2 \ldots$ von der Ordnung der Variationen der spezifischen Wärmen mit der Temperatur sind.

Nun wollen wir der Reihe nach die einfachen Fälle betrachten, daſs der ausstrahlende Körper fest oder gasförmig sei, sowie daſs er die Superposition eines festen und gasförmigen Körpers bilde.

A. Feste Körper.

Bei der Stoffmenge q stellt sich das Spektrum unter der Form dar:

$$L = L_0 \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} \left(\frac{\lambda_0^2 + \mu^2}{\lambda^2 + \mu^2}\right)^2 \frac{1 - \left[1 - \frac{\mu^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2 + m^2}{\lambda^2 + \mu^2}\right)^2\right]^q}{1 - \left[1 - \frac{\mu^4}{m^4}\left(\frac{\lambda_0^2 + m^2}{\lambda_0^2 + \mu^2}\right)^2\right]^q} \frac{(\lambda_0^2 + m^2)^2 (\lambda^2 + \mu^2)^2}{(\lambda_0^2 + \mu^2)^2 (\lambda^2 + m^2)^2} \quad (381)$$

Es enthält die Unbekannten: μ, m, q, und mithin genügen drei Beobachtungen zur vollständigen Bestimmung. Wir nehmen Einfachheit halber an, es existierten Tabellen, welche die Spektralelemente des absolut schwarzen Körpers als Funktion der Temperatur geben, ebenso Tabellen, welche für jeden Körper die charakteristischen Spektralkonstanten geben.

Ist vorerst μ, m und q berechnet, so giebt m unmittelbar die Temperatur Θ. Weiter ist $\varDelta$ für die Entfernung r direkt ausrechenbar, indem man hat

$$\varDelta = \frac{\pi}{4\mu} \frac{(\lambda_0^2 + \mu^2)^2}{\lambda_0^2} L_0 \quad \ldots \quad (382)$$

Setzt man dieses in das Drapersche Gesetz ein, so erhält man die Entfernung des Körpers, oder die auf die Einheit der Entfernung reduzierte Intensität. Ebenso erhält man mit μ und Θ die Konstante

$$\mathfrak{k} = \mu \Theta \quad \ldots \quad (383)$$

die man entweder direkt benutzen kann, oder mit deren Hilfe sich μ auf eine gegebene Temperatur reduzieren läſst. Kennt man nun μ und $\varDelta$ für eine feste Temperatur, so ergeben die Tafeln die anderen Konstanten des Körpers, also auch R und die Dichtigkeit s. Ist pv die von der Stoffmenge q geleistete Arbeit, so hat man noch

$$pv = R \frac{q}{\mu} \quad \ldots \quad (384)$$

womit auch die geleistete Arbeit bekannt ist. Kann man die Dichtigkeit s auf die Temperatur des emittierenden Körpers beziehen, so ist

$$v = \frac{q}{s} \quad \ldots \quad (385)$$

womit auch p und v getrennt bestimmt sind. Bei dieser Reduktion wird die Bemerkung von Nutzen sein, daſs für Flüssigkeiten, und vielleicht auch für feste Körper das spezifische Brechungsvermögen

$$\frac{n-1}{s} = \text{konst.} \quad \ldots \quad (386)$$

oder andere ähnliche Ausdrücke nahezu von der Temperatur unabhängig sind. Das n kann aber für die betreffende Temperatur Θ wirklich berechnet werden.

Will man genauer

$$\mu\Theta = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{k}_1 \Theta + \mathfrak{k}_2 \Theta^2 + \quad \ldots \quad (387)$$

annehmen, so erfordert das nur einen Mehraufwand von Rechnung, indem man die

Temperatur O solange abzuändern hat, bis man auf Konstanten t_0, t_1 ... R, ... stöfst, die einesteils einem Körper genügen, anderenteils aber die Beobachtungen darstellen. Damit ist das Problem in voller Schärfe gelöst, indem wir nun die Natur, Temperatur, Druck, Volumen und Entfernung des glühenden Körpers kennen.

Allerdings ist hierbei ganz allgemein vorausgesetzt, dafs man die physikalischen Konstanten ganz beliebiger Körper kennt, oder doch dieselben für Körper berechnen kann, welche auf ganz beliebige Weise aus mehreren Stoffen zusammengesetzt sind.

Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, so kann die vom emittierenden Körper geleistete Arbeit nicht bestimmt werden, ebensowenig natürlich Druck und Volumen gesondert. Es bleibt dann nichts anderes übrig, als die Beobachtungen in verschiedenen Zeiten anzustellen, wobei sich vielleicht Änderungen ergeben, oder aber zu empirischen Formeln zu greifen, wie deren eine die Konstanz des spezifischen Brechungsvermögens ist, mit Hilfe derer p und v bestimmt werden kann.

Übrigens braucht man wohl kaum hervorzuheben, dafs feste Körper überhaupt so wenig auf Druckänderungen reagieren, dafs die Bestimmung von q bei nur einigermafsen grofsem μ naturgemäfs illusorisch wird. Man darf bei festen Körpern stets voraussetzen, dafs sie in der Einheit der Stoffmenge leuchten. Dann genügen aber zwei vollständige Bestimmungen zur Ermittelung von L_0 und μ, womit zunächst A für die Entfernung r gegeben ist. Wäre nun die Natur des Körpers, also auch die Konstanten t_0, t_1 ... bekannt, so könnte man die Temperatur mit Hilfe von (387) berechnen, in die Drapersche Formel einsetzen, um daraus die Entfernung r zu bestimmen. Ist aber die Natur des Körpers unbekannt, so mufs man die Entfernung kennen, um aus (1) O bestimmen zu können. Aus (385) ergiebt sich dann t und mit Hilfe von Tabellen R, womit

$$pv = \frac{R}{\mu}$$

wird, da jetzt die Stoffmenge gleich 1 zu setzen ist. Kann man nun entweder μ, oder den Brechungsexponenten des Körpers in Beziehung zu seiner Dichte bringen, so läfst sich p und v auch getrennt darstellen.

Den komplizierteren Fall, dafs der feste Körper aus mehreren Stoffen bestehe, braucht man nicht anzunehmen, da bei einem undurchsichtigen festen Körper sich ein Mittelwert des μ ergeben wird.

B. Gasförmige Körper

Die Untersuchung gasförmiger Körper ist die leichteste und genaueste, da sich die Natur der vorhandenen Stoffe schon im Spektrum unmittelbar ausspricht. Man wird also vor allem die Stoffe feststellen, die sich im emittierenden Körper vorfinden. Dadurch ist unmittelbar für alle Stoffe t_0 ... R gegeben; t_1, t_2 ... sind für Gase allgemein Null.

1) *Einfache Gase.* Nimmt man nun wieder die Gleichung

$$L = L_0 \frac{\lambda}{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0^2+\mu^2}{\lambda^2+\mu^2}\right) \frac{1-\left[1-\frac{\mu^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}\right)^2\right]^q}{1-\left[1-\frac{\mu^4}{m^4}\left(\frac{\lambda_0^2+m^2}{\lambda_0^2+\mu^2}\right)^2\right]^q} \frac{(\lambda_0^2+m^2)^2(\lambda^2+\mu^2)}{(\lambda_0^2+\mu^2)(\lambda^2+m^2)} \tag{388}$$

so bestimmen drei Beobachtungen der Intensität die Gröfse μ, m, q. Da nun t schon bekannt ist, so ist die Temperatur sowohl durch μ als m gegeben. Setzt man daher

$\mu = \frac{\mathfrak{f}}{\Theta}$ und ähnlich für einen absolut schwarzen Körper $m = \frac{\mathfrak{f}_0}{\Theta}$, wo $\mathfrak{f}_0$ keine Konstante, sondern eine (wenn auch nur tabellarisch) bekannte Funktion der Temperatur darstellt, so braucht man zur Zustandsbestimmung nur zwei vollkommene Beobachtungen. Es ist gleichgiltig, ob diese Beobachtungen an Linien oder am kontinuierlichen Spektrum angestellt sind, nur müssen sie auf Totalintensität reduziert werden, was mit Hilfe des konstanten Verhältnisses der beiden spezifischen Wärmen geschieht.

Hat man eine Linie beobachtet, so muſs sie mit $\frac{2}{5-3k}$, wenn einen Strahl des kontinuierlichen Spektrums, so muſs er mit $\frac{2}{3k-3}$ multipliziert werden, um auf ein kontinuierliches Spektrum reduziert zu werden, welches der Superposition des Linien- und Hintergrundsspektrums äquivalent ist. Ist L ein solch reduzierter Strahl von der Wellenlänge λ, so wird die Totalintensität des ganzen Spektrums in Bezug auf die Entfernung r

$$\varDelta = \frac{\pi}{4\mu} L \frac{(\lambda^2 + \mu^2)^2}{\lambda^2} \quad \text{. . . . .} \quad (389)$$

Das Drapersche Gesetz giebt sodann die Entfernung der strahlenden Masse vom Beobachter.

Da R, q und μ bekannt sind, so kennt man auch das Produkt pv. Die Dichtigkeit s des Gases ist bekannt, und läſst sich auf die Temperatur Θ reduzieren, oder kann direkt aus der Gleichung

$$\frac{n-1}{s} = \text{konst.} \quad \text{. . . . .} \quad (390)$$

des spezifischen Brechungsvermögens berechnet werden. Damit ist aber p und v getrennt dargestellt, also alle Zustandsvariabelen entwickelt.

b) *Gasgemenge.* Sind die n Gase der Mischung ihrer Natur nach durch die Wellenlängen ihrer Strahlen bekannt, so ist dadurch auch $\mathfrak{f}_0^{(1)}, \mathfrak{f}_0^{(2)} \ldots, \mathfrak{f}_0^{(n)} \ldots, R^{(1)}, R^{(2)} \ldots R^{(n)}$ gegeben. Führt man also in der allgemeinen Gleichung, in welcher wir Kürze halber die Absorptionskoeffizienten nicht explizite aufschreiben

$$L = \frac{4}{\pi D} m^4 \Theta^4 \frac{1 - \prod_1^n (1-\alpha_r)^{q_r}}{1 - \prod_1^n (1-\alpha_r)} \cdot \prod_1^n (1-\alpha_r) \sum \frac{\mu_r^4 \lambda^2}{m^4(\lambda^2 + \mu_r^2)^2 - \mu_r^4(\lambda^2 + m^2)^2} \quad (391)$$

$m = \frac{k_0}{\Theta}$, $\mu_r = \frac{k_r}{\Theta}$ ein, wo die Θ alle gleich sind, so hat man eine Gleichung von $n+1$ Unbekannten, die durch $n+1$ vollständige Beobachtungen gelöst werden kann. Ist nun Θ bekannt, und die Totalenergie jedes einzelnen Spektrums berechnet, so erhält man aus irgend einem derselben und der Draperschen Gleichung die Entfernung. Das Produkt pv ist für jedes einzelne Gas gegeben, und kann ganz so wie in dem vorigen einfacheren Falle in seine Faktoren zerlegt werden.

C. Superposition eines festen und gasförmigen Körpers.

Diese Superposition findet spektralanalytisch nur statt, wenn das Gas zwischen dem Beobachter und dem festen Körper steht. Das Spektrum besteht dann aus einem kontinuierlichen, von dunklen oder hellen Linien durchzogenen Hintergrunde, je nachdem die Temperatur des Gases eine niedrigere oder höhere als die des festen Körpers ist.

a) *Einfaches Gas.* Da der feste Körper, wie schon früher erwähnt, als von einheitlicher Stoffmenge betrachtet werden darf, so lautet die Spektralgleichung

$$L = L_0 \frac{\lambda}{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0^2 + \mu}{\lambda^2 + \mu^2}\right)\left\{1 - \frac{\mu_1^4}{\mu^4}\left(\frac{\lambda^2 + m}{\lambda^2 + \mu_1}\right)^2\right\}^q$$

$$+ L_{10}\frac{\lambda}{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0^2 + \mu_1}{\lambda^2 + \mu_1}\right)\frac{1 - \left|1 - \frac{\mu_1^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2 + m}{\lambda^2 + \mu_1}\right)^2\right|^q}{\frac{\mu_1^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2 + m}{\lambda^2 + \mu_1}\right)} \qquad (392)$$

wo sich μ_1 und L_{01} auf das Gas beziehen. m ist das Spektralelement μ eines absolut schwarzen Körpers von derselben Temperatur, wie das Gas. Setzt man $\mu_1 = \frac{\mathfrak{k}_1}{O_1}$, $m = \frac{\mathfrak{k}_0}{O_1}$, da ja $\mathfrak{k}_1$ als von der Natur des Gases abhängig sogleich von vornehere bekannt ist, so hat das Spektrum die Unbekannten μ, O_1, q, L_0, L_{10}. Durch fünf vollständige Beobachtungen sind alle diese Größen gegeben. Wir berechnen nun zuerst die Totalenergie des kontinuierlichen und des Gasspektrums. Aus letzterem findet sich, da O_1 bekannt ist, die Entfernung. Setzt man diese, wenn anders beide Körper in nahezu gleicher Entfernung sich befinden, in die für das kontinuierliche Spektrum geltende Dispersche Gleichung ein, so erhält man auch O, die Temperatur des festen Körpers, und mit O und μ auch $\mathfrak{k}$, dessen stoffliche Beschaffenheit, aus welcher wieder R folgt, R_1 ist auch für das Gas bestimmt, mithin kennt man die Produkte pv und $p_1 v_1$, deren Faktoren man nach dem früher Gesagten sondern kann. Vergl. hierzu Tafel VII die Darstellung des Siriusspektrums.

b) Ist das Gas eine Mischung mehrer, so lautet die Spektralgleichung

$$J = L_0 \frac{\lambda}{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0^2 + \mu}{\lambda^2 + \mu}\right)\prod_1^n\left[1 - \frac{\mu_i^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2 + m}{\lambda^2 + \mu_i}\right)^2\right]^{q_i}$$

$$+ \frac{4}{\pi D} m^4 O^4 \frac{1 - \prod_1^n (1 - \alpha_i)^{q_i}}{1 - \prod_1^n (1 - \alpha_i)} \prod_1^n (1 - \alpha_i) \sum_1^n \frac{\mu_i^4 \lambda}{m^4(\lambda^2 + \mu_i)^2 - \mu_i^4(\lambda^2 + m)^2} \qquad (393)$$

welche nach Einführung der Temperaturen, da die Konstanten $\mathfrak{k}_0^{(1)}$, $\mathfrak{k}^{(\;)}$ [illegible] $\mathfrak{k}^{(n)}$ alle bekannt sind, $n + 4$ Unbekannte enthält (r^2 steckt schon in D). Die Temperatur der n Gase ist wieder konstant genommen. Ganz auf die frühere Weise kann man die n Gasspektra und das kontinuierliche Spektrum einzeln berechnen. Von letzterem braucht man auch, wie im früheren Falle, die Natur des glühenden Stoffes nicht zu kennen, da die Entfernung durch die Gasspektra berechnet werden kann.

Dieses sind die allgemeinen Fälle, die vorkommen können. Manchmal wird man mit weniger Unbekannten zu thun haben, wenn es gelingt, die Temperatur aus der Breite der Linien oder aus speziellen Eigentümlichkeiten der Absorption zu bestimmen.

Eine wirkliche Auflösung dieser Gleichungen glaubten wir umgehen zu können, indem momentan das wichtigere Moment wohl der Gedankengang der Lösung bildet. Allgemein kann sie aber auch nur in dem allereinfachsten Falle aufgeschrieben werden.

Übrigens sind die Probleme der Astrophysik, wo diese Gleichungen hauptsächlich angewendet werden sollen, nicht mit den gegebenen identisch, denn dort kommen nicht konstante Temperaturen, Drucke und Dichtigkeiten vor, sondern Zustandsvariabeln, welche selbst wieder Funktionen der Koordinaten des Raumes sind.

Soll man die gegebenen Gleichungen lösen, so wird man meist zu graphischen Methoden greifen, aus der Spektralkurve das μ und L_0 bestimmen, welches das „mittlere“ der Superposition genannt werden könnte, und aus den Abweichungen der Kurve von einem kontinuierlichen Spektrum die übrigen Spektralelemente schätzen, dann aber lineare Fehlergleichungen aufstellen.

Schlufsbemerkungen.

Es wird vielleicht eigentümlich erscheinen, dafs die Elektrizität weder in ihren Anwendungen auf Geisslersche Röhren noch als Grundlage der elektromagnetischen Lichttheorie Besprechung gefunden hat. Die Herstellung des strahlenden Zustandes durch Elektrizität ist unstreitig die bequemste, und für gnostische Zwecke auch immer hinreichende Methode. Wie aber der Zustand des Gases in einer solchen Röhre während des Glühens beschaffen ist, darüber giebt keine Theorie Aufschlufs. Für Zustandsstudien sind also heute wenigstens die Geisslerschen Röhren völlig wertlos,

Der Gedanke, unsere Theorie an die elektromagnetische Lichttheorie anzuknüpfen. liegt um so näher, als ja die Spektralgleichung identisch mit der Refraktionsformel ist, welche wieder eng mit der Dielektrizitätskonstante verbunden ist. Für ein eigentliches Studium auf diesem Gebiete aber bot sich bislang keine Gelegenheit, erstlich weil für die Spektraltheorie selbst noch vieles zu thun übrig bleibt, zweitens, weil wir durch die verallgemeinerte Abteilung der Spektralgleichung von Hypothesen über die Natur der Materie und des Äthers, ja selbst der erzeugenden Ursache des Spektrums befreit sind. In Hauptsachen kann also weder ein Eingehen auf die Schwingungs- noch auf die elektromagnetische Theorie des Lichtes Bedeutendes leisten.

Und somit haben wir alle Untersuchungen abgeschlossen, welche sich auf das wahre oder objektive Spektrum beziehen. Wir müssen nun noch die Veränderungen besprechen, welche dasselbe erleidet, wenn es der Beobachtung zugänglich wird, das subjektive Spektrum, welches allein uns zu beobachten vergönnt ist.

IV

Theorie der astrophysikalischen Instrumente.

1. Das subjektive Spektrum.

Das subjektive Spektrum (im allgemeinsten Sinne) ist das perzipierte Bild des objektiven Spektrums.

Der Unterschied beider Spektra ist grössser und notwendiger als irgend ein anderer Unterschied zwischen Gegenstand und Bild der Sinneswelt. Denn während Form und Entfernung eines Objektes sich auf der Retina oder der photographischen Platte so wiederspiegeln, dafs der Tastsinn fast in jedem einzelnen Falle empirisch das Verhältnis zwischen Gegenstand und Vorstellung bestimmen kann, befinden wir uns dem objektiven Spektrum gegenüber in einer mifslicheren Lage als der Astronom den entferntesten Lichtpunkten gegenüber, deren Entfernung er als unendlich angeben mufs, ohne jedoch auf die Hoffnung Verzicht leisten zu müssen, sie noch einstens genau kennen zu lernen.

Denn was ist subjektives Spektrum anderes, als ein Teil des objektiven, der nach der Reflexion an dem perzipierenden Agens von diesem absorbiert wird? Da wir nun die Reflexion nie Null, die Absorption nie für alle Wellenlängen gleich Eins machen können, so werden wir durch Erfahrung überhaupt nie und nimmer eine Vorstellung vom subjektiven Spektrum erhalten. Die einzige Methode, das objektive Spektrum aus dem subjektiven herzustellen, ist also jene, verschiedene objektive Spektra zu nehmen, ihre Elemente $(\mu, \mathcal{A})$ beliebig anzunehmen, ein Gesetz der subjektiven Wirkung nach den wahrscheinlichsten Gründen zu wählen, das Gesetz und dessen Konstanten, sowie alle Spektralelemente $(\mu, \mathcal{A})$ so lange abzuändern, bis alle subjektiven Spektra für dasselbe Reagens durch Rechnung vollständig dargestellt werden. Dann ist die Empfindlichkeit für das betreffende Reagens gefunden, und zugleich auch das Gesetz der subjektiven Spektra bekannt.

Was wir über die Gesetze der subjektiven Spektra wissen, ist ziemlich wenig, und für die theoretische Behandlung der Frage sogar ungenügend. Das hierüber Bekannte läfst sich in folgende Sätze zusammenfassen:

Jedes subjektive Spektrum besitzt ein von der Natur des perzipierenden Agens und der Lage der Maximalintensität des beobachteten objektiven Spektrums abhängiges

Intensitätsmaximum. (Für das sichtbare Spektrum liegt dasselbe etwa bei $\lambda = 0.560$). Die Intensität des Spektrums wird unter allen Umständen an den konstanten Grenzen des subjektiven Spektrums gleich Null. Diese beiden Sätze sind strenge giltig. Höchstwahrscheinlich ist dann weiter, dafs auch der erste Differentialquotient der subjektiven Intensität an den subjektiven Spektralgrenzen Null wird. Welche Form der Funktion sich daraus für die subjektive Intensität ergiebt, werden wir bei der Besprechung der Einrichtung des menschlichen Auges näher sehen. Jedenfalls ersehen wir, dafs das subjektive Äquivalent der objektiven Intensität — denn darauf reduziert sich ja gerade die Frage des subjektiven Spektrums — nicht identisch sein kann mit der Kirchhoffschen Absorptionsfunktion (d. h. des nach Abzug der Reflexion gebliebenen Teiles der absorbierten Intensität). Denn diese nimmt von $\lambda = \infty$, mit dem Werte $\frac{\mu^4}{m^4}$ beginnend, bis $\lambda = 0$ zu, wo sie 1 wird, und könnte daher für die subjektiven Grenzen des Spektrums nimmer konstante Werte hervorbringen.

Wir haben daher bei Beobachtungen des Spektrums zwei Ursachen einer Subjektivität zu unterscheiden; die erstere liegt in den Absorptionen und Reflexionen der Instrumente, und diese kann stets ganz strenge bestimmt und in Rechnung gezogen werden, die zweite liegt in dem letzten perzipierenden Medium, dem Auge, der photographischen Platte oder der Thermosäule, und ist jedenfalls nicht blofs in einfachen Absorptionen und Reflexionen begründet. Und in der That: insofern im Auge und der chemischen Platte nachweislich während der Einwirkung der Strahlung chemische Veränderungen vor sich gehen, hören sie auf dem Kirchhoffschen Gesetze unterworfen zu sein, wie das seiner Zeit besonders hervorgehoben wurde.

Mehr daher, als in irgend einem Teile der Beobachtungskunst erfordert die Spektralanalyse eine Theorie der Instrumente, da es sich hier nicht um kleine Fehler handelt, die beliebig klein gemacht werden können, sondern um endliche Einflüsse von ganz beträchtlicher Gröfse, die um so gefährlicher sind, als sie selbst eine Funktion der unabhängigen Variabelen darstellen.

Dieses gilt natürlich nur in Bezug auf die Intensität, und auch da nur, wo absolute und nicht vergleichende Messungen vorkommen. In Bezug auf die Wellenlänge ist eine Fehlertheorie schon längst ausgearbeitet, bezüglich der Intensität jedoch noch gar nichts geschehen. Es hat dies seinen Grund darin, dafs fast alle Apparate der Intensitätsmessungen auf die Vergleichung der Intensität gleicher Spektralstellen basiert sind, und dann ist der Vorgang auch gerechtfertigt, insofern das Verhältnis gleichwelliger Spektralstellen verschiedener Lichtquellen dasselbe ist, ob man nun ein subjektives, oder ein objektives Spektrum betrachte.

Ist es daher überhaupt gelungen, auch nur ein objektives Spektrum darzustellen, so sind damit alle bekannt.

Wie bisher, trennen wir auch in der Theorie der Instrumente das explizite Spektrum von dem ungesonderten Strahlenkomplexe, werden aber die zur Beobachtung des letzteren nötigen Instrumente stets den eigentlich spektralanalytischen Hilfsmitteln zur Seite stellen, da auf diese Weise ihr Zusammenhang viel lebhafter hervortritt. So werden mit dem Spektroskope die Instrumente zur Farbenbestimmung, mit dem Spektralphotometer die Photometer zu verbinden sein. Der Übergang von einer Gruppe zur anderen ist ein geringer: dort betrachten wir einzelne Wellenlängen, hier ein Integralspektrum zwischen stets gegebenen Grenzen.

Bevor wir jedoch die Instrumente im Speziellen besprechen, wollen wir die Theorie der allen Instrumenten gemeinsamen Fehler entwickeln, und deren allgemeinen Einflufs auf das subjektive Spektrum näher ins Auge fassen.

Dem Gesagten nach dürfte schon jetzt klar sein, dafs das subjektive Spektrum eine viel rascher steigende und fallende Kurve darstellt, als das objektive. Bedenkt man nun, dafs das letztere Spektrum, zumal innerhalb enger Grenzen der Wellenlängen, wie sie bei allen Beobachtungen vorkommen, sehr flach ist, so folgt daraus, dafs schon geringe Fehler in der Bestimmung der Intensität eine starke Verschiebung der Gröfse μ zur Folge haben müssen. Man wird also μ stets direkt aus dem subjektiven Spektrum berechnen. Gerade umgekehrt verhält sich die Sache mit der Intensität L_0 für λ_0, aus welcher die Totalintensität berechnet werden soll. Da die objektive Spektralkurve flach ist, so kann L_0 mit grofser Genauigkeit derselben entnommen werden.

Wir nehmen nun an, es sei $\varphi(\lambda)$ die Gesamtschwächung der Intensität durch alle zur Anwendung gekommenen Apparate, mit anderen Worten, das Produkt aller vorkommenden Transmissionskoeffizienten in die Empfindlichkeit des letzten Mediums. Dann ist I die subjektive Intensität

$$I=\frac{4}{\pi}\mu A\frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2}\varphi(\lambda) \tag{1}$$

Wir stellen uns nun die Aufgabe, aus dieser Gleichung μ zu bestimmen, womit man dann A ohne weiteres findet, und nehmen an, es sei μ_0 die Wellenlänge des Intensitätsmaximums für das subjektive Spektrum.

a) Ist μ_0 durch Rechnung oder graphische Interpolation unmittelbar gegeben, so findet man daraus leicht μ. Es mufs nämlich $\frac{dI}{d\lambda}$ für $\lambda=\mu_0$ ein Maximum werden, dies giebt

$$0=\varphi(\mu_0)\frac{2\mu_0(\mu^2-\mu_0^2)}{(\mu^2+\mu_0^2)^3}+\varphi'(\mu_0)\frac{\mu_0^2}{(\mu^2+\mu_0^2)^2} \tag{2}$$

woraus sogleich folgt

$$\mu^2=\mu_0^2\,\frac{1-\mu_0\frac{\varphi'(\mu_0)}{2\varphi(\mu_0)}}{1+\mu_0\frac{\varphi'(\mu_0)}{2\varphi(\mu_0)}} \tag{3}$$

Wie man sieht, braucht man in diesem einfachen Falle nur die Funktion $\varphi(\lambda)$ und $\varphi'(\lambda)$ für den Punkt $\lambda=\mu_0$ zu bilden. Es ist zu dem Zwecke gar nicht nötig, die Funktion $\varphi(\lambda)$ erst analytisch auszudrücken, da ihre Kenntnis als Tabularfunktion völlig hinreicht.

b) Besteht in dem subjektiven Spektrum für zwei Strahlen λ_1 und λ_2 Gleichheit der Intensität, so hat man zugleich die beiden Gleichungen

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\mu^2}\sqrt{\varphi(\lambda_1)}=\frac{\lambda_2}{\lambda_2^2+\mu^2}\sqrt{\varphi(\lambda_2)} \tag{4}$$

aus welcher sogleich folgt

$$\mu^2=\lambda_1\lambda_2\,\frac{\lambda_1\sqrt{\varphi(\lambda_2)}-\lambda_2\sqrt{\varphi(\lambda_1)}}{\lambda_1\sqrt{\varphi(\lambda_1)}-\lambda_2\sqrt{\varphi(\lambda_2)}} \tag{5}$$

Wie man sich erinnert, besteht für objektive Spektra, wo $\varphi(\lambda)=$ konst. $=1$ ist, die Gleichung $\mu^2=\lambda_1\lambda_2$.

c) Die einfache Umkehrung der Gleichung, da ja $\varphi(\lambda)$ μ gar nicht enthalten kann, giebt endlich noch eine dritte Bestimmung.

$$\mu^2 = -\lambda^2 + \lambda \sqrt{\frac{L_0}{I}}\, \varphi(\lambda) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

die nun zwei wirkliche Messungen der Intensitäten erfordert. Diese Methode ist die wenigst einfache. Wie man aber sieht, braucht es auch hier nicht der analytischen Form der Funktion $\varphi(\lambda)$.

2. Theorie des letzten Mediums.

Unter letztem Medium verstehen wir, wie schon kurz angedeutet wurde, dasjenige spektralanalytische Agens, welches die Spektralerscheinungen unmittelbar dem Bewuſstsein übermittelt; bei Augenbeobachtungen also die Retina, bei photographischen Aufnahmen die empfindliche Platte, bei thermoelektrischen Untersuchungen die wirksame Oberfläche des Thermoelementes. Da bei allen diesen Vermittelungsvorgängen nicht bloſs Absorptionen in dem bislang gebrauchten Sinne vorkommen, sondern Absorptionen, welche zugleich das Agens chemisch verändern, so gilt das einfache Kirchhoffsche Gesetz nicht mehr; es genügt nicht die Absorption und daher auch die Intensität der Strahlungswirkung proportional zu setzen dem Verhältnisse der Emissionen des betreffenden Agens und eines mit demselben gleichtemperierten absolut schwarzen Körpers.

a) Wie wir es schon eingangs thaten, setzen wir das subjektive Spektrum I dem objektiven L proportional und nennen den reziproken Wert des Proportionalitätsfaktors die Empfidlichkeit des betreffenden Agens. Man braucht sich also jetzt wegen der Gleichung

$$I = sL \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

nur mit der Gröſse s zu befassen. Wir wissen von dieser Gröſse, wie es schon erwähnt war, daſs sie eine kontinuierliche Funktion der Wellenlänge ist, welche ein Maximum besitzt. Denn wäre dem nicht so, so müſste zwischen der Temperatur des emittierenden Körpers und der Empfindlichkeit des perzipierenden Körpers eine ganz bestimmte, für jede Temperatur wechselnde Beziehung stattfinden, was anzunehmen wohl als ungereimt erachtet werden muſs. Dagegen ist es nur eine Beschränkung, wenn wir annehmen, daſs die Funktion ein und nur ein Maximum besitze. Es giebt in der That Reagentia, z. B. die in Korallin gebadeten photographischen Platten, die deren zwei oder mehrere besitzen. Doch kommt dieser Fall im allgemeinen weder bei dem menschlichen Auge, noch der Thermosäule vor. Für die Grenzen des sichtbaren Spektrums verschwindet s zugleich mit seinem ersten Differentialquotienten $\frac{ds}{d\lambda}$. Denn die subjektiven Spektra sind an den Grenzen nicht etwa bloſs abgeschnitten, sondern die Intensitäten nähern sich in der That so dem Nullwerte, daſs Anfang und Ende der Kurve der Abszissenaxe parallell verläuft. Es folgt das aus allen bislang angestellten Beobachtungen, mögen sie mit dem Auge, der chemisch empfindlichen Schichte, oder der Thermosäule durchgeführt sein.

Im allgemeinen muſs dann noch angenommen werden, daſs s zum geringen Teile auch von der Intensität selbst abhängt, was allerdings erst bei sehr weiten Grenzen derselben bemerkbar sein wird. Diese Abhängigkeit werden wir nur auf experimentellem Wege in Betracht ziehen können.

Wir schreiben nun s in der Form

$$s = \frac{\varphi(\lambda)}{\psi(\lambda)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

wobei $\varphi(\lambda)$ und $\psi(\lambda)$ noch unbestimmte Funktionen der Wellenlängen sind. Es ist keine Beschränkung, wenn wir sie als algebraische Funktionen, d. h. als Anfangsglieder einer unendlichen Reihe betrachten, denn s soll, auch wenn es periodischen Charakters wäre, nicht über eine Periode hinaus (vom Nullwerte durch das Maximum zum zweiten Nullwerte) benutzt werden. Denn es ist weder I noch I' periodisch, daher innerhalb der Grenzen des subjektiven Spektrums auch s nicht.

Sind λ_1 und λ_2 die subjektiven Grenzen des Spektrums, so hat man nach den Bedingungen

$$s = 0,\quad \frac{ds}{d\lambda} = 0 \text{ für } \lambda = \lambda_1 \text{ und } \lambda = \lambda_2$$

die folgende Entwickelung

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1}(\lambda - \lambda_2)^{p_2}\, U \tag{9}$$

wo U eine Funktion der Wellenlänge bedeutet, die weder für λ_1 noch λ_2 gleich Null wird. Differenziert man weiter s und beachtet, daſs nach dem Gesagten der Differentialquotient sowohl für $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$ als auch für $\lambda = \lambda_0$ Null wird, so erhält man

$$\psi(\lambda)\varphi'(\lambda) - \psi'(\lambda)\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{q_1}(\lambda - \lambda_2)^{q_2}\,(\lambda - \lambda_0)^{r}\, V \tag{10}$$

wo V ähnlich wie U eine solche Funktion der Wellenlänge ist, welche für kein zwischen λ_1 und λ_2 gelegenes λ Null werden kann.

Es sind nun die beiden Fälle möglich, daſs $p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = r = 1$ oder daſs diese Gleichheit der Ordnung des Nullwerdens nicht besteht. Wir wollen nur den ersten Fall betrachten, da es sich zeigen wird, daſs gerade dieser mit der Erfahrung übereinstimmt. Die Gleichungen zur Bestimmung von φ und ψ lauten also

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\, U \tag{11}$$

$$\psi(\lambda)\varphi'(\lambda) - \varphi(\lambda)\psi'(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\, V \tag{12}$$

Aus der ersteren Gleichung folgt noch

$$\varphi'(\lambda) = U'(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) + U[(\lambda - \lambda_1) + (\lambda - \lambda_2)] \tag{13}$$

Substituiert man dies in die zweite, so kommt

$$\psi'(\lambda) - \psi(\lambda)\left\{\frac{U'}{U} + \left[\frac{1}{\lambda - \lambda_1} + \frac{1}{\lambda - \lambda_2}\right]\right\} + (\lambda - \lambda_0)\frac{V}{U} = 0 \tag{14}$$

Setzt man der leichteren Behandlung wegen

$$\psi = u\, v$$

wo u und v neue Funktionen der Wellenlänge bedeuten, so erhält man leicht die beiden einfacheren Differentialgleichungen

$$u' - u\left[\frac{U'}{U} + \frac{1}{\lambda - \lambda_1} + \frac{1}{\lambda - \lambda_2}\right] = 0 \qquad v' + (\lambda - \lambda_0)\frac{V}{uU} = 0$$

aus welchen

$$u = c(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\, e^{\int \frac{U'}{U} d\lambda}, \quad v = C - \frac{1}{c}\int \frac{\lambda - \lambda_0}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)}\,\frac{V}{U}\, e^{-\int \frac{U'}{U} d\lambda}\, d\lambda$$

folgt. Das allgemeine Integral von s wird somit

$$\frac{1}{s} = C' - \int \frac{\lambda - \lambda_0}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)}\,\frac{V}{U}\, d\lambda$$

$$= C' - \frac{V}{U}\left\{\frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\,\text{lgnat}\,(\lambda - \lambda_1) + \frac{\lambda_2 - \lambda_0}{\lambda_2 - \lambda_1}\,\text{lgnat}\,(\lambda - \lambda_2)\right\}$$

$$- \int\left\{\frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\,\text{lgnat}\,(\lambda - \lambda_1) + \frac{\lambda_2 - \lambda_0}{\lambda_2 - \lambda_1}\,\text{lgnat}\,(\lambda - \lambda_2)\right\}\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{V}{U}\right] d\lambda \tag{15}$$

oder in leicht erkennlicher Bezeichnung

$$\frac{1}{s} = Xf(\lambda) + Y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

wo X, Y Funktionen der Wellenlängen sind, $f(\lambda)$ aber das ausgerechnete Integral bedeutet. X und Y läfst sich theoretisch nicht bestimmen, da s für $\lambda = \lambda_1$ und $\lambda = \lambda_2$ so Null wird, dafs $f(\lambda)$ unendlich grofs wird. Man ist also nur auf die Erfahrung angewiesen. Wählt man den einfachsten Fall

$$X = \text{konst.}, \; Y = \text{konst.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

und bezeichnet zur Bestimmung von Y (das auch die Integrationskonstante C enthält) mit s_0 den Maximalwert von s im Punkte $\lambda = \lambda_0$, so hätte man:

$$\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s_0}\right) = a\left\{\frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \text{ lgnat } \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_0 - \lambda_1} + \frac{\lambda_2 - \lambda_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \text{ lgnat } \frac{\lambda_2 - \lambda}{\lambda_2 - \lambda_0}\right\} \quad . \quad . \quad (18)$$

und dieses ist in der That die Formel, die sich den Beobachtungen so enge anschliefst, als es die unvermeidlichen Fehler derselben nur erlauben. Wir wollen dies an zwei Beispielen verschiedener Natur nachweisen.

Wir betrachten zuerst den Fall, wo es sich um das subjektive Äquivalent einer Thermosäule handelt, die von Mouton zu seinen Beobachtungen des Platinspektrums benutzt wurde. Setzt man in der Gleichung

$$I = 4s\mu^2 \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

in der also die Maximalintensität als Einheit angenommen ist, entsprechend den Beobachtungen $\mu = 1.53$, berechnet damit L und bestimmt sodann mit Hilfe des bekannten I die Konstanten von s, nämlich λ_0 und a nach der Methode der kleinsten Quadrate, so erhält man:

$$\lambda_0 = 1.512, \quad \frac{1}{a} = 0.3054$$

während als Grenzen des subjektiven Spektrums unmittelbar $\lambda_1 = 0.39$, $\lambda_2 = 2.35$ gegeben sind, und $s_0 = 1$ gesetzt werden kann, da es sich ja nur um relative Werte handelt. Damit erhält man sodann die schon auf Seite 161 benutzte Reihe der 5 Werte, die einen Anschlufs an die Beobachtungen herbeiführen, der bei Zugrundelegung spektralphotometrischer Messungen jedenfalls durchaus befriedigend ist. Die Summe der Fehlerquadrate, welche die Abweichung zwischen Beobachtung und Rechnung lassen, beträgt $\sum v^2 = 0.0068$ und könnte gewifs noch herabgemindert werden, wenn man nicht μ unmittelbar angenommen hätte, sondern auch dieses mit λ_0 und a zugleich mitbestimmt hätte. Erwägt man, dafs das beobachtete Spektrum etwa fünfmal so lang ist, als das sichtbare, so braucht für die Allgemeingiltigkeit der abgeleiteten Formel nicht mehr viel gesagt zu werden.

Um nun aber zu zeigen, dafs andere Formeln von ebenso vielen Konstanten nicht dasselbe zu leisten im Stande sind, setzen wir

$$s = a \sin \alpha(\lambda - \lambda_1) + b \sin 2\alpha(\lambda - \lambda_1)$$
$$\alpha = 9^0.183, \quad a = +0.9752, \quad b = -0.0891$$

und ein anderes Mal

$$s = a(\lambda - \lambda_1) + b(\lambda - \lambda_1)^2$$
$$a = 1.9183, \quad b = -0.9831$$

und erhalten damit die mit $B - R_2$, und $B - R_3$ bezeichneten Abweichungen zwischen Theorie und Erfahrung, während die Abweichungen der Formel (18, 19) mit $B - R_1$ bezeichnet sind.

λ	$E - E_1$	$B - E$	$J - E_3$
0 431	— 0 015	+ 0 016	+ 0 009
486	— 0 024	+ 0 009	— 0 008
526	— 0 026	+ 0 007	— 0 020
589	— 0 015	+ 0 011	— 0 029
655	+ 0 011	+ 0 026	— 0 029
760	+ 0 019	+ 0 020	— 0 051
900	+ 0 033	— 0 004	— 0 081
1 150	+ 0 006	— 0 052	— 0 085
1 305	— 0 012	— 0 032	— 0 016
1 400	— 0 009	— 0 013	+ 0 031
1 500	— 0 003	+ 0 040	+ 0 075
1 530	+ 0 001	+ 0 052	+ 0 086
1 610	— 0 005	+ 0 067	+ 0 094
1 750	— 0 028	+ 0 055	+ 0 066
1 850	— 0 033	+ 0 067	+ 0 062
1 980	— 0 021	+ 0 089	+ 0 068
2 140	— 0 017	+ 0 114	+ 0 086

$\sum v = 0\ 0068 \qquad 0\ 0427 \qquad 0\ 0619$

Nach der Formel (19) wurden die Konstanten von s auch für die Michelsonsche Spektralgleichung bestimmt. Es ergab sich hierbei, da von dem schon gefundenen Werte von a ausgegangen wurde, die Korrektion

$$\varDelta \log a = +0\ 0005$$

die ohne weiteres vernachlässigt werden kann, so daſs beide Spektralgleichungen dieselben Empfindlichkeiten s fordern.

Die Summen der Fehlerquadrate sind bezüglich 6 und 9 Mal gröſser als im Falle unserer Gleichung.

b) Indem wir ein ähnliches Beispiel bei der Untersuchung des Auges vorbringen, gehen wir hier noch auf eine etwas andere Behandlung der Formel ein, indem wir den Differentialquotienten $\frac{ds}{d\lambda}$ diskutieren. Derselbe giebt offenbar die Änderung der Empfindlichkeiten, wenn man von der Wellenlänge λ zu der unendlich benachbarten $\lambda + d\lambda$ übergeht. Umgekehrt kann er auch den Farbenunterschied angeben, welcher von dem spektralanalytischen Reagens noch eben empfunden wird. In diesem Sinne und besonders für das Auge angewendet, kann man ihn die Empfindlichkeit für geringe Farbenunterschiede nennen, und direkt messen, wie dies auch in der That von mehreren Forschern nach verschiedenen Methoden geschehen ist. Sie haben das Gemeinsame, daſs sie den mittleren Fehler bestimmen, welcher gemacht wird, wenn man zwei identische kontinuierliche Spektra so zu superponieren trachtet, daſs sich die Strahlen derselben Wellenlängen decken. Während die Methoden der Messungen später besprochen werden sollen, behandeln wir hier die Beobachtungsreihe von König und Dieterici[1], welche die aus je 50 Einstellungen berechneten mittleren Fehler giebt, deren reziproker Wert als Maſs von $\frac{ds}{d\lambda}$ gelten kann; die erste Zahlenreihe bezieht sich auf starkes, die zweite auf schwaches Licht.

[1] Verh. der phys. Gesellschaft zu Berlin 1884 No. 3 S. S.

λ	$\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^{-1}$		λ	$\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^{-1}$
0.43	0.96	1.06	0.54	0.68
44	62	68	55	65
45	82	44	56	40
46	54	54	57	29
47	43	46	58	27
48	33	28	59	26
49	36	16	60	36
50	41	23	61	56
51	51	40	62	68
52	99	—	63	1.05
53	65	—	64	1.28

Nach unserer Gleichung hat man nun

$$\frac{ds}{d\lambda} = s^2 \frac{\lambda - \lambda_0}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

woraus sich sogleich

$$s = \sqrt{\left(\frac{ds}{d\lambda}\right) \frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)}{\lambda - \lambda_0}}$$

ergiebt. Nimmt man als Grenzen des subjektiven Spektrums die Fraunhoferschen Linien H und A, also $\lambda_1 = 0.39$ und $\lambda_2 = 0.76$ an, setzt man weiter für ein Normalauge $\lambda_0 = 0.56$ (nach den Beobachtungen selbst wäre $\lambda_0 = 0.58$), so erhält man nach der Methode der kleinsten Quadrate $s_0 = 0.428$, $a = 12.192$, welche Werte in (18) und (20) eingesetzt die Beohachtungen recht gut darstellen, trotzdem dieselben zu den schwierigsten gezählt werden müssen.

Man wird unschwer bemerken, dafs die Gleichung

$$I = sL$$

im Grunde nichts weiter ist, als eine Verallgemeinerung des Fechnerschen psychophysischen Gesetzes (allerdings für alle Körper anwendbar, welche innerhalb des ihnen charakteristischen subjektiven Spektrums nur ein Maximum der Empfindlichkeit besitzen) und dafs der zuletzt eingeschlagene Weg der Bestimmung der Empfindlichkeit auf der in der Psychophysik „Methode der unmerklichen Unterschiede“ bekannten Art geschah. Wir haben in dieser Methode wenigstens theoretisch — und bei einer möglichst grofsen Zahl von Einzelbeobachtungen auch praktisch — einen Weg gefunden, der die Kenntnis des objektiven Spektrums, welches, wie schon öfter erwähnt, nie und nimmer darstellbar ist, zur Bestimmung der Empfindlichkeit nicht voraussetzt, sondern statt dessen die leicht zugängliche Wellenlänge unterstellt.

Handelt es sich um photographische Platten, wie sie gewöhnlich benutzt werden, so scheint die Formel die volle Giltigkeit zu behalten, nicht aber in dem Falle, wenn die Platten allgemein gefärbt sind, da entweder mehrere, oder sehr steile Maxima — fast Diskontinuitäten — eintreten. Es ist in diesem Falle stets angezeigt, statt unserer Gleichung eine Fouriersche Reihenentwickelung vorzunehmen, deren Konstanten auf empirischem Wege zu bestimmen sind. Eine solche Reihenentwickelung ist auch dann nicht zu umgehen, wenn man die subjektive Intensität $\mathfrak{J}$ zwischen den Grenzen λ_1 und λ_2 sucht, da man auf ein Integral der schwierigsten Art stofst; es lautet nämlich:

$$\frac{4}{\pi}\mu A\int_{\lambda_1}^{\lambda}\frac{\lambda^2}{(\lambda + u)}\,\frac{d\lambda}{\frac{1}{s_0}+a\left\{\frac{\lambda_0-\lambda_1}{\lambda-\lambda_1}\operatorname{lognat}\frac{\lambda-\lambda_1}{\lambda_0-\lambda_1}+\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda-\lambda_1}\operatorname{lognat}\frac{\lambda-\lambda}{\lambda-\lambda_0}\right\}} \tag{21}$$

und kann nur durch mechanische Quadratur bestimmt werden da es sich weder auf einen Integrallogarithmus noch auf eine loglog (ψ) Funktion zurückführen läfst

c) Als einen speziellen und am häufigsten vorkommenden Fall des letzten Mediums betrachten wir die menschliche Retina, das empfindlichste Reagens für spektralanalytische Erscheinungen In den meisten Fällen der Beobachtung tritt dasselbe nur als sekundärer Apparat ein, indem es entweder auf die Bestimmung örtlicher Unterschiede ankommt, oder aber auf Herstellung gleicher Eindrücke während die beiden zu vergleichenden Objekte gleichzeitig ein Bild auf der Netzhaut entwerfen Unter solchen Umständen werden Fehler des Auges, — und hier kann nur von Formfehlern desselben und von der an verschiedenen Stellen der Retina verschiedenen Empfindlichkeit die Rede sein — entweder an und für sich unschädlich, oder können leicht eliminiert werden, indem man entweder die beiden Objekte gegeneinander vertauscht, oder einfacher, durch Anbringung von Reflexionsvorrichtungen die beiden Bilder auswechselt Dieser Vorgang wird bei genaueren Doppelsternmessungen in der That benutzt und sollte auch bei photometrischen Vergleichungen zweier Lichtquellen nie außer Acht gelassen werden Neuerdings wird aber das Auge häufig als selbständiger Apparat für Intensitätsmessungen herbeigezogen die auf der Methode der unmerklichen Unterschiede beruhen, und da wird es notwendig alle Veränderungen zu kennen, welche durch diesen Vorgang in den gemessenen Größen hervorgebracht werden

Noch mehr gilt dies, wenn wir etwas weitergreifen und nach dem Maße fragen in welchem eine so gemessene Intensität auszudrücken ist Auch wenn die nicht ungerechtfertigte Vermutung, daß sich das Auge und dessen Empfindlichkeit für verschiedene Farben im Laufe der Zeit beträchtlich ändere, nicht zutreffen sollte ist nach allem was wir über das subjektive Spektrum sagten, schon klar daß alle unsere besonders aber die mit Augen angestellten Spektralbeobachtungen nie den Charakter der Subjektivität abzulegen sich versucht fühlten

Aus diesem Grunde halten wir dafür daß es Pflicht jedes Spektralanalytikers besonders aber jedes Astrophysikers ist, sein Auge ebenso rigoros zu untersuchen wie er dies mit seinem Spektroskope thut Den Bau dieses Organs zu kennen dürfte den Vorgang nicht unwesentlich erleichtern

Das Auge besteht aus einem aplanatischen optischen Apparate der auf einer empfindlichen Platte, der Netzhaut, ein Bild des Gegenstandes entwirft Während nun der erstere Apparat unter Einwirkung einer Strahlung als gänzlich unverändert betrachtet werden darf, erleidet der letztere Veränderungen, welche eben das Sehen bedingen Die Netzhaut besteht nämlich aus palisadenartig aneinandergereihten Stäbchen und Zapfen, deren alleräußerste Teile das Außenglied des Stäbchens aus sehr feinen Scheibchen zusammengesetzt ist Die Dicke dieser Plättchen wurde der Länge der Lichtwellen gleichgefunden An diesen Scheibchen muß also der Lichtstrahl vielfache Reflexionen und Absorptionen erleiden und es wird somit wahrscheinlich den Übertragungsort von Bewegung in Nerventhätigkeit hier zu suchen, umsomehr als diese Art von Struktur allen mit Augen versehenen Tieren zukommt Es wäre also der

Nachweis zu liefern, dafs zu den Aufsengliedern der Stäbchen die Änderung des Sehnervens in eine bestimmte Beziehung tritt. Und wirklich liegen die feinsten Endfasern des Sehnervens an der Oberfläche der geschichteten Stäbchen, die ihrerseits dem Lichte stets zugänglich bleiben und nie mit Pigmentstoff bedeckt oder durchsetzt sind. Andrerseits sind aber die Nervenfasern von diesem dunklen Pigment umkleidet, was jedenfalls für die Absorption des überflüssigen Lichtes von Wichtigkeit ist. Endlich findet sich bei den Kephalopoden der Sehnerv ganz von dunklem Pigment umgeben, so dafs das Licht nicht durch den Glaskörper direkt, sondern nur durch die geschichtete Substanz der Augen auf den Nerv wirken kann. Die Frage nach den Veränderungen des Sehnervens infolge Lichteinwirkung reduziert sich sohin auf die Frage nach der Veränderung der geschichteten Substanz.

Der Durchmesser der erwähnten Zapfen entspricht ebenfalls etwa der Wellenlänge, und sie sind um einen Zwischenraum von einander getrennt, der etwa $\frac{1}{10}$ der eigenen Dicke ausmacht. Direktem Sonnenlichte ausgesetzt schwellen diese Stäbchen bis zur gegenseitigen Berührung an, wozu jedoch eine sehr lange Zeit (bei Retinen von Fröschen etwa eine Stunde) erforderlich ist; zugleich bleicht sich auch der Sehpurpur. Direkt nach gerade vollendeter Ausbleichung des Sehpurpurs ist jedoch keine Veränderung wahrzunehmnn. In beiläufig derselben Zeit erfolgt im Dunkeln die Abnahme der Stäbchen auf das gewöhnliche Mafs, und es zeigt sich, dafs dabei auch der Sehpurpur wieder vollkommen regeneriert ist.

Durch physiologische Untersuchungen ist es weiter höchst wahrscheinlich gemacht, dafs die Erregung in der Centralstelle einen Widerstand zu überwinden hat, durch welchen ein Verlust ihrer Intensität eintritt, und es zeigt sich, dafs der Widerstand stets invert proportional der Fläche des Empfindungskreises ist, wobei unter diesem Namen derjenige Teil des Nervengebietes verstanden ist, der von zwei räumlich getrennten Einwirkungen in der Centralstelle noch räumlich getrennte Empfindungsbilder hervorruft. Untersucht man nun die Verteilung dieser Empfindungskreise auf der Netzhaut, so findet man sie nicht gleichmäfsig, worauf besonders geachtet werden mufs. Sind nämlich in der That die Zapfen der Retina die eigentlichen Empfindungsorgane, deren jedem ein ihm eigentümliches Lokalzeichen entspricht, so ist die Gesamtzahl der für das Sehen verfügbaren Lokalzeichen offenbar gleich der Anzahl der Zapfen. Andrerseits löst jede sensorische Nervenprimitivfaser bei ihrer Erregung ein ihr eigentümliches für sie charakteristisches Lokalzeichen im Centralorgan aus, so dafs hierdurch die Anzahl der für das Sehen verfügbaren Lokalzeichen durch die Anzahl der Primitivfasern in einem Sehnerven bestimmt würde. Nun entfallen aber nach den Messungen im menschlichen Auge auf je sieben Zapfen eine Nervenfaser, und es stellt sich somit die Schwierigkeit heraus, dafs die Feinheit unserer Gesichtsempfindung, welche durch die Anzahl der Zapfen gegeben ist, wesentlich beeinträchtigt wird durch die unzureichende Zahl der Primitivfasern, und diese Schwierigkeit wird noch vermehrt durch den Umstand, dafs im Centralteile der Retina an der Stelle des deutlichsten Sehens, wo Zapfen an Zapfen gedrängt steht, die experimentell ermittelte Sehschärfe genau der Feinheit der Zapfenmosaik entspricht. Hierdurch wird das Verhältnis zwischen Zapfen und Fasern für die übrige Netzhaut nur noch verschlechtert. Nun zeigt aber die Erfahrung, dafs die Fähigkeit der Retina, Bewegungen wahrzunehmen, gegen deren Peripherie nicht so rasch abnimmt, wie die Sehschärfe selbst, woraus in Verbindung mit dem Früheren zu folgern wäre, dafs in der Netzhautperipherie die von einer Nervenfaser versorgten Zapfen nicht

auch eine anatomische Gruppe bilden, sondern mit Zapfen vermischt stehen, welche von anderen Nervenfasern versorgt werden

Aus dieser kurzen Erörterung des Sehaktes wird es schon klar, dafs wir es in der Retina lediglich mit chemischen und mechanischen Veränderungen zu thun haben welche unter Einwirkung des Lichtes zu Stande kommen und für welche es durchaus nicht ungereimt ist Proportionalität zwischen Ursache und Wirkung zwischen subjektiver und objektiver Intensität anzunehmen und diese wenigstens so lange gelten zu lassen als die Intensitäten zwischen mäfsigen endlichen Grenzen enthalten sind

Dies bestätigt nun auch die Erfahrung, denn wie wir später sehen werden sind thermische Wirkungen der Strahlen noch am leichtesten auf die objektive Intensität zu reduzieren, und in der That ist schon häufig nachgewiesen worden, dafs zwischen Licht- und Wärmewirkung wenigstens innerhalb enger Grenzen Proportionalität von subjektiver Intensität und Wärmewirkung besteht

Wir wollen nun an einem Beispiele eine solche Untersuchung des Auges wirklich durchführen

Der Verfasser beschäftigte sich mit spektralphotometrischen Messungen mit Hilfe eines neutral gefärbten Glaskeiles, dessen Maximaldicke 3.455 mm betrug, und dessen Transmissionskoeffizient für einzelne Wellenlängen genau bestimmt war Als Einheit der Intensität sollte stets jene Lichtmenge der untersuchten Wellenlänge gelten welche durch die (dickste) Schichte von 5.435 mm des neutralen Glases hindurchgedrungen noch eben die Empfindung des Lichteindruckes hinterliefs Mit diesem Keile wurde unter besonderen Vorsichtsmafsregeln das Sonnenspektrum durchmessen, dann aber das Auge durch ein genaues Thermometer ersetzt, dessen Angaben sich auf Kalorien oder auf mechanisches Mafs reduzieren liefsen

Die Mafse sind so gewählt dafs sie sich beziehen auf die Einheit des homogenen Lichtes von der betreffenden Wellenlänge von 0.001 tausendstel Mill Spektralbreite und der Höhe des Spektrums gleich dem mittleren scheinbaren Durchmesser der Sterne erster Gröfse in einem Refraktor von 161 mm Öffnung und 1911 mm Fokalweite welches durch eine 5.435 mm dicke Schichte eines Stoffes von dem Transmissionskoeffizienten

λ	$\log p$	λ	$\log p$
= 0.673	= −0.5521	= 0.484	= −0.5999
633	−0.5267	464	−0.5291
600	−0.5141	444	−0.5100
555	−0.5076	426	−0.5092
515	−0.5708		

gedrungen dem Auge eben noch merklich bleibt, und auf diese Einheit bezogen Milligrammmillimeter pro Sekunde geben

Wir stellen unter B und R die Resultate der Beobachtung und der Rechnung dar wobei die Rechnung ein nach der Methode der kleinsten Quadrate mit Hilfe der Gleichung (18) bestimmter Anschlufs an die Beobachtungen ist

λ	$\frac{1}{s}$ Beob	$\frac{1}{s}$ Rechn	λ	$\frac{1}{s}$ Beob	$\frac{1}{s}$ Rechn
0.673	41.25	20.88	0.484	15.05	12.15
633	11.82	10.92	464	11.37	16.72
600	5.16	6.66	444	18.05	25.59
555	4.90	4.92	426	26.19	37.20
515	9.18	7.25			

Der Anschlufs beider Kurven ist ein genügend guter, und beweist wohl auch, dafs des Verfassers Auge für Rot etwas hyperempfindlieh, für Violett dagegen schwach violettblind im Ganzen aber für Intensitätsmessungen wohl geeignet ist.

Die Empfindungsgrenze des untersuchten Auges liegt bei etwa 0.5 Millim.-milligr. pro Sekunde.

Um nun zu zeigen, dafs dieses Äquivalent in der That von der Intensität selbst abhängt, sobald dieselbe in weiten Grenzen variiert, genügt es darauf hinzuweisen, dafs dasselbe für die Empfindlichkeit gegen Farbenunterschiede der Fall ist, wie schon früher angeführt wurde. Wir haben über diesen Punkt noch keine Studien vorgefunden, und besitzen selbst nur eine Versuchsreihe, welche den wahrscheinlichen mittleren Fehler m und den wahrscheinlichen Fehler des arithmetischen Mittels w von stark variierenden Intensitätsmessungen giebt, welche sämtlich so angestellt sind, dafs die Retina als Mefsapparat dient, also auf dem Extinktionsprinzipe beruhen. Die Daten sind die folgenden:

λ	J	m	w	J	m	w	J	m	w	J	m	w	J	m	w
0.426	6.4	± 8.7	± 1.8	17.9	± 17.5	± 3.7	137.1	± 24.5	± 5.2	7738	± 17.1	± 3.6			
444	7.7	16.7	3.6	19.8	18.2	3.9	166.9	15.0	3.2	1385	29.3	6.3			
464	4.3	16.1	3.4	12.0	20.5	4.4	226.5	17.6	4.2	1581	28.4	6.0			
484	5.0	12.7	2.7	15.2	22.2	4.7	210.8	21.5	4.6	3965	17.9	3.8			
515	4.3	16.1	3.4	7.6	17.3	3.7	12.0	20.5	4.4	2265	17.6	4.2	1581	28.4	6.0
555	5.5	5.3	1.1	27.4	6.0	1.3	196.6	25.9	5.5	101360	74.1	15.8			
600	4.6	17.3	3.7	16.1	26.9	5.7	131.1	14.1	3.0	7376	24.0	5.1	48574	102.6	21.9
633	8.8	9.2	2.0	26.1	5.1	1.1	144.0	15.3	3.3	2068	41.1	8.8			
673	5.4	13.9	3.0	17.0	17.5	3.7	231.3	25.1	5.4	4146	25.9	5.5	19525	60.8	13.0

In aller Kürze möge erwähnt werden, wie diese Reihe erhalten wurde. Vor ein Spektroskop wurden zwei Nikols aufgestellt, und bei einer vorsichtigen links- und rechtsseitigen Annäherung an den Kreuzungspunkt der Winkel abgesehen, bei welchem der Lichteindruck eben verschwand. Die Intensitäten wurden durch verschiedenes Öffnen der Spektroskopspalte erhalten. Die Gröfse des wahrscheinlichen Fehlers rührt grofsenteils von der schlechten optischen Beschaffenheit der angewandtem Nikols her, ist aber hier, wo es auf Vergleichungen ankommt, von geringem Belange.

Trägt man die wahrscheinlichen Fehler der Messungen als Ordinaten über den Logarithmen der Intensitäten als Abszissen auf, und zwar für alle neun Wellenlängen auf demselben Koordinatennetze, so bemerkt man übereinstimmend ein Anwachsen der wahrscheinlichen Fehler mit zunehmender Intensität und ohne den Beobachtungen Zwang anzuthun, kann man sagen (worauf wir noch einmal zurückkommen werden), dafs die Genauigkeit von der Wellenlänge unabhängig ist.

Durch die Normalorte

$\log J =$	0.797	1.269	2.242	3.436	4.648
$\pm w =$	2.71	3.48	4.25	6.51	14.39

läfst sich eine Kurve legen, welche sehr genau den Verlauf sämtlicher Beobachtungen darstellt. Sie lautet:

lg J	$\pm w$	lg J	$\pm w$	lg J	$\pm w$
0.0	2.00	1.6	3.45	3.2	6.50
0.2	2.20	1.8	3.65	3.4	7.15
0.4	2.35	2.0	3.90	3.6	7.85
0.6	2.55	2.2	4.20	3.8	8.60
0.8	2.70	2.4	4.55	4.0	9.45
1.0	2.85	2.6	5.00	4.2	10.50
1.2	3.05	2.8	5.45	4.4	11.80
1.4	3.25	3.0	5.95	4.6	13.50

und kann vielleicht einst mitbestimmend wirken zur Untersuchung der Abhängigkeit der Augenempfindlichkeit von der Intensität

3 Einfluß der atmosphärischen Luft

a) Alle unsere Beobachtungen geschehen im lufterfüllten Raume, und sind daher mit den Veränderungen behaftet, welche die Wellenlänge durch Refraktion die Intensität durch Absorption erleidet Ist die auf den luftleeren Raum bezogene Wellenlänge λ und n der absolute Brechungsindex der Luft in der nächsten Umgebung des Beobachters, so wird λ, die beobachtete Wellenlänge

$$\lambda = \frac{\lambda}{n} \tag{22}$$

im allgemeinen also kleiner als im luftleeren Raume Nach Kettelers Beobachtungen ist für atmosphärische Luft von 0° Temperatur und 760 mm Druck

$$\begin{array}{ll} \lambda = 0\,6705 & n = 1\,000\ 293\,669 \\ 0\,5892 & 294\,704 \\ 0\,5349 & 295\,669 \end{array}$$

mit welchen Werten eine Tabelle für bequeme Interpolation berechnet werden kann Da man allgemein hat

$$\frac{1}{n} = \frac{k}{l - \frac{\lambda}{n}}$$

wenn λ im Weltall genommen ist so folgt daraus wie früher

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{\frac{l}{2l} + \lambda} + \sqrt{\frac{l}{2l} - \lambda}\right\}$$

Wird also

$$\lambda > \frac{l}{2l}$$

so läßt atmosphärische Luft diese Wellenlänge überhaupt nicht mehr durch

Die gefundenen Werte der Brechungsindizes beziehen sich auf den Normalzustand der Atmosphäre, ist der Barometerstand B und die Temperatur Θ, so erhält man

$$n - 1 = (n_0 - 1)\,\frac{760\ \Theta}{B\ 273}$$

was aus dem schon benutzten Satze folgt, daß das spezifische Brechungsvermögen der Dichte proportional ist

Bei astronomischen Beobachtungen wo eine große Strecke Luft von veränderlicher Dichte durchlaufen wird dürfte man auf den ersten Blick der Meinung sein daß es nicht genügt, bloß den Brechungsindex der Luft in nächster Nähe des Beobachters zu berücksichtigen Doch dem ist nicht so Teilt man nämlich den Luftkreis in unendlich dünne Schichten 1, 2, r von merklich demselben Brechungsindex n_1, n, n_r innerhalb einer solchen Schichte, so ist die Wellenlänge λ beim Beobachter

$$\lambda' = \frac{\lambda}{n_1}\,\frac{n_1}{n}\,\frac{n}{n_3}\quad\frac{n_{r-1}}{n_r} = \frac{\lambda}{n_r}$$

geworden Es ist also in der That in jedem Falle bloß die letzte Schichte zu berücksichtigen

Daſs man der Verschiedenheit der beiden Wellenlängen Rechnung trägt, wird nur in seltenen Fällen nötig sein, da der Unterschied stets sehr klein sein wird. Dann herrscht aber ein anderes Bedenken vor, welches nicht so leicht beseitigt werden kann, denn in der That ist nicht die atmosphärische Luft das letzte Medium, sondern zumeist die Retina, die photographische Platte oder die Thermosäule, und von allen diesen Reagentien — das Auge nicht ausgenommen — wissen wir, daſs sie dispergierend wirken. Es müſste also unter n strenger der relative Brechungsindex dieser Reagentien gegen Luft verstanden werden. Doch läſst sich eine solche Korrektion gar nicht anbringen, und die übrigens nicht zu gefährliche Folge davon ist, daſs wir selbst in den Wellenlängen ein subjektives Spektrum beobachten, dessen partiale Dispersion teilweise durch die Natur dieser Medien mitbestimmt wird.

Ein Anderes ist es, wenn extratellure Strahlungsquellen im ungesonderten Komplexe beobachtet werden, da sich hierbei das von der Luft erzeugte Spektrum in der Farbe bemerklich macht. Bezeichnet i_1 und r_2 respektive den Einfalls- und Austrittswinkel des Strahles für ein brechendes Medium und δ die Deviation, so hat man die Gleichung

$$\delta = i - r \qquad (23)$$

Hierin bedeutet, wenn die Lichtquelle sehr weit entfernt ist, bis auf ein Verschwindendes von der Ordnung der täglichen Parallaxe[1] i die wahre, r die scheinbare Zenithdistanz. Entwickelt man $\sin\delta$, wobei aber $\sin\delta = \delta$ gesetzt werden darf, da die Länge des Luftspektrums unendlich klein ist, so kommt:

$$\delta = \sin r(n\cos r - \sqrt{1 - n^2\sin^2 r}) = \frac{1}{n}\sin i(\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos i) \qquad (24)$$

Schreibt man diese Gleichung für zwei Grenzstrahlen n_1 und n_2 auf, so giebt die Differenz die Länge Δ des Spektrums im Winkelmaſse ausgedrückt. Man hat also, da i für alle Farben konstant ist:

$$\Delta = \left(\frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1}\right)\sin i\cos i + \left(\frac{1}{n_1}\sqrt{n_1{}^2 - \sin^2 i} - \frac{1}{n_2}\sqrt{n_2{}^2 - \sin^2 i}\right)\sin i \qquad (25)$$

Dabei ist nun zu bedenken, daſs n mit der Höhe der Atmosphäre stetig abnimmt, indem Dichte und Temperatur derselben kleiner werden. In der Astronomie, wo es auf die genaue Kenntnis der Deviation selbst ankommt, muſs dieses Gesetz der Abnahme in Rechnung gezogen werden. Hier haben wir es jedoch nur mit einer sehr geringen Differenz der Ablenkungen zu thun, und daher wird es in allen Fällen genügen, die vorliegende Gleichung zu integrieren, daſs

$$\frac{n-1}{\sigma} = \frac{n_0 - 1}{\sigma_0} = \text{konst.} \qquad (26)$$

bleibe, wenn σ die Dichte der Luft bezeichnet. Setzt man

$$n = 1 + \varepsilon \qquad (27)$$

und bleibt wegen der Kleinheit von ε stets bei der ersten Potenz dieser Gröſse stehen, so wird die Gleichung (25) zur folgenden:

$$\Delta = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\sin i\cos i + [(1-\varepsilon_1)\sqrt{2\varepsilon_1 + \cos^2 i} - (1-\varepsilon_2)\sqrt{2\varepsilon_2 + \cos^2 i}]\sin i \qquad (28)$$

---

[1] Darunter versteht man den Winkel, unter welchem von einem Himmelskörper der (Äquatorial-) Radius der Erde erscheint.

Bezeichnet man die Konstante, die sich auf die Erdoberfläche wo $\sigma_0 = 1$ ist, beziehen mag, $\frac{\varepsilon_0}{\sigma_0}$ mit η, so wird (28) nun für die ganze Atmosphäre genommen

$$\varDelta = (\eta_1 - \eta_2)\sin i \cos i \int_0^1 \sigma\, d\sigma + \sin i \int_0^1 \left\{(1-\eta_1\sigma)\sqrt{2\eta_1\sigma + \cos^2 i} - (1-\eta_2\sigma)\sqrt{2\eta_2\sigma + \cos^2 i}\right\} d\sigma \quad (29)$$

was nach einer leichten Reduktion, und wieder mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von η giebt

$$\varDelta = \tfrac{1}{4}(\eta_1 - \eta_2)\sin 2i \quad (30)$$

da sich das zweite Integral bei den gemachten Vereinfachungen auf Null reduziert

b) Die Absorption der atmosphärischen Luft könnte, wenn es sich um eine Verwertung derselben für irdische Zwecke handelt, am besten durch Beobachtung der Intensität einer Lichtquelle in großer und in unmittelbarer Entfernung ermittelt werden und wurde so in der That von Saussure und Wild bestimmt Die erhaltenen Zahlen beziehen sich auf Mischlicht, und haben somit, wie wir sogleich sehen werden keine Bedeutung für uns Wir benutzen daher die astronomischen Bestimmungen von Dr G Müller,[1] die wir schon früher reduzierten, und für welche wir $\mu = 0{,}0058$ $m = 6{,}96$ fanden Wählt man als Einheit der Schichtendicke das Meter, so ist zunächst zu bestimmen, einer wie dicken Schichte atmosphärischer Luft vom Normalzustande an der Erdoberfläche die aus optischen Erscheinungen zu 75000 Metern berechnete Höhe des Luftkreises äquivalent ist Ist die Zahl der Schichten, deren jede dieselbe Absorption α ausübt, wie eine Schichte von ein Meter Dicke an der Erdoberfläche, gleich n so ist mit A die beobachtete Absorption des ganzen Luftkreises bezeichnend

$$A = 1 - (1-\alpha)^n \quad (31)$$

Es ist klar, daſs mit abnehmender Dichte σ die Schichten immer höher werden müssen um dieselbe Absorptionswirkung hervorzubringen und zwar, wie schon aus früheren Erörterungen folgt, so, daſs das Produkt aus Dichte und Dicke konstant gleich Eins bleibe Bezeichnet man also die Höhe der Schichte mit δ so wird

$$\delta\sigma = \delta_0\sigma_0 = 1 \quad (32)$$

wo sich δ_0, σ_0 auf die dem Erdboden zunächst gelegene Schichte bezieht Die Höhe der Atmosphäre wird somit

$$n = \sum \delta = \sum_{\sigma_0}^{\sigma_1} \frac{1}{\sigma} \quad (33)$$

wo die σ_0 und σ_1 die Grenzwerte der Dichtigkeit der Luft bezeichnen Annäherungsweise darf man an Stelle der Summe auch ein Integral setzen, und erhält dann

$$n = \lg \sigma_1 - \lg \sigma_0 \quad (34)$$

Um nun σ_1 zu bestimmen, müssen wir die Gesetze kennen nach welchen sich die Dichte mit der Erhebung vom Erdboden verändert Diese sind einerseits das bekannte Druckgesetz, welches auch bei barometrischen Höhenmessungen angewandt wird

$$dp = -\sigma g \left(\frac{r_0}{r}\right) dr \quad (35)$$

---

[1] Astronomische Nachrichten No 2464

[2] pag 186

wo dp die bei der vom Erdmittelpunkte ab gezählten Erhebung dr verbundene Druckerhöhung, g aber die Schwerebeschleunigung an der Erdoberfläche $r = r_0$ bedeutet. Andrerseits hat man die Hypothese

$$t = C + (t_0 - C)\frac{\sigma}{\sigma_0} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (36)$$

welche die Temperatur t als der jeweiligen Dichte proportional setzt, und die durch mehrere bei Gelegenheit von Ballonfahrten vorgenommenen Messungen erprobt wurde. Zugleich bestimmt sich aus diesen Daten $C = -45^0$ Cels. Schreibt man also dementsprechend das Boyle-Gay-Lussacsche Gesetz in der Form:

$$p = R\sigma\left[(\alpha + C + (t_0 - C)\frac{\sigma}{\sigma_0}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (37)$$

so erhält man durch Elimination von p aus dieser und der Gleichung (35) die folgende:

$$\left[\frac{aR}{\sigma} + 2Rb\right] d\sigma = -g r_0^2 \frac{dr}{r^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (38)$$

worin Kürze halber

$$\alpha + C = 273^0 - 45^0 = a, \quad \frac{R(t_0 - C)}{\sigma_0} = b \quad \ldots \ldots \ldots \quad (39)$$

gesetzt wurde. Als Integral der Gleichung erhält man

$$\sigma^{aR} \cdot e^{2Rb\sigma} = \sigma_0^{aR} e^{2Rb\sigma_0} \cdot e^{g r_0 \left(\frac{r_0}{r} - 1\right)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (40)$$

wo sich die Gröſsen mit dem Index Null auf die Erdoberfläche beziehen. Setzt man $r = r_0 + 75000$ m, $t_0 = 0$ und $\sigma_0 = 1$, so erhält man aus dieser und der Gleichung (34) den Wert
$$n = 252.7$$
Bei normalem Zustande der untersten Luftschichte ist die Absorptionswirkung der gesamten Atmosphäre ebenso groſs wie die einer 253 m mächtigen Schichte derselben Beschaffenheit. Wird die Temperatur der untersten Schichte gröſser, und der Barometerstand geringer, so nimmt die Zahl der Luftschichten zu, wie es Formel (33) zeigt. Da die mittlere Absorption bekanntlich $\frac{\mu^4}{m^4}$ beträgt und der Quotient $\frac{\mu}{m}$ für geringe Temperaturunterschiede nahezu konstant ist, so kann man ihn auch als für 0^0 C. giltig ansehen. Man hat also, nimmt man die Beobachtungstemperatur zu rund 25^0, den Luftdruck zu 760 mm an

$$A = 0.000 \quad 0274 \quad 54 \quad \text{für } n = 255$$

und damit wird der Absorptionskoeffizient der Luft für 1 m Schichtendicke:

$$\alpha = 0.000 \quad 000 \quad 1093$$

wobei man nicht vergessen darf, daſs dieser Wert der mittlere ist, der für sehr lange Wellen gilt. Für Wellenlängen, wie sie gewöhnlich in Betracht kommen, wird diese Zahl erheblich gröſser. Immerhin aber sieht man, daſs bei der Reduktion der Absorption auf andere Schichtendicken unter nicht astronomischen Beobachtungsverhältnissen stets die Reihenentwickelung von $(1-\alpha)^n$ auf die erste Potenz $n\alpha$ beschränkt werden kann. Bedeutet also α die Absorption für die Schichtendicke = 1 m, α_l dieselbe für eine Schichte von der Länge l m, so ist

$$\alpha_l = l\alpha \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (41)$$

Bei astronomischen Beobachtungen ändert sich die Schichtendicke hauptsächlich dadurch, daſs der Strahl bei verschiedenen Höhen des Gestirnes verschieden lange Wege durchläuft. Nimmt man die Zenithalhöhe der Atmosphäre = 1, so wird sie bei der Zenithdistanz z:

$$\delta = \left\{1 - \left(\frac{r}{r+h}\right) \sin z\right\}^{-1} \qquad (42a)$$

wenn $h = 37{,}5$ km etwa, irgend eine mittlere Höhe der Atmosphäre bedeutet. Will man auf die Krümmung der Schichten keine Rücksicht nehmen, so kann man einfacher

$$\delta = \sec z \qquad (42b)$$

nehmen. Dieses δ ist dann nach Maßgabe der herrschenden Temperatur und des Luftdruckes zu korrigieren.

Die ganze von der Atmosphäre absorbierte Intensität eines Spektrums (μ, A) findet man, indem man über alle Wellenlängen und alle Zenithdistanzen von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ integriert, diese beträgt also

$$\frac{4}{\pi} A \mu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} dz \int_0^\infty \frac{\lambda}{(\lambda^2+\mu^2)^2} \left\{1 - \left[1 - \frac{\mu^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{r+h}\right)^2 \sin^2 z}}}\right\} d\lambda \qquad (43)$$

c) Handelt es sich um die Beobachtung eines ungetrennten Strahlenkomplexes etwa eines Sternes, so spricht man gewöhnlich von einem mittleren Absorptionskoeffizienten der für atmosphärische Luft (nach photometrischen Bestimmungen von Sternen) 0,175 ausmachen soll. Ein solcher mittlerer Absorptionskoeffizient — an und für sich — existiert gar nicht, daher auch Langleys[1] heftiger Widerspruch gegen den Wert dieser Größe, die er durch etwa 0,35 ersetzt wissen will. In der That ergiebt sich der Wert von 0,32 auch aus den Beobachtungen Müllers, wenn man über das Spektrum eines weißen (Sonnen-)lichtes integriert. Wir werden den Widerspruch sogleich beheben. Ist A ein mittlerer Absorptionskoeffizient, und (μ, A) irgend eine Lichtquelle, so besteht die Gleichung

$$\frac{4}{\pi} \mu A (1-A)^n \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\lambda}{(\lambda^2+\mu^2)^2} d\lambda = \frac{4}{\pi} \mu A \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2} \left\{1 - \left[1 - \frac{\mu^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}\right)^2\right]^n\right\} d\lambda \quad (44)$$

Sind also die Grenzen des Spektrums konstant (wie es ja in der That für das Auge der Fall ist), so hat man A noch immer als Funktion von μ, also der Beschaffenheit der Lichtquelle zu betrachten, und nur, wenn die beobachteten Lichtquellen nahezu dieselben sind (wie in der Astronomie Sterne desselben Typus) darf auch A als merklich konstant angenommen werden. Dieses A ist es nun, welches astronomisch zu 0,175 bestimmt wurde. Langley begeht nun den keineswegs zu vernachlässigenden Fehler, daß er über das Spektrum integriert, ohne aber auf die verschiedene Empfindlichkeit des Auges zu achten, und das Integral als Absorptionskoeffizienten des ungetrennten Strahlenkomplexes betrachtet. Da für alle Sterne (auch die Sonne) μ klein und unser Auge gerade für Violett wenig empfindlich ist, so muß nach Langleys Methode ein zu großer Absorptionskoeffizient resultieren, wie das auch aus den viel älteren Messungen von Dr. Müller folgt. Ändert man also den Wert von $\alpha = 0{,}175$ nur so ab, daß er den Beobachtungen der einzelnen Sterntypen genügt, so ist auch ferner mit diesem Werte zu reduzieren, beobachtet man aber ein explizites Spektrum, so ist jede Intensität

[1] Phil. Mag. 5 vol. XVIII.

mit dem ihrer Wellenlänge zukommenden Absorptionskoeffizienten in Rechnung zu ziehen. Langleys Einwurf wird somit hinfällig.

Auſser dieser jetzt besprochenen Absorption, die sich auf alle Wellenlängen erstreckt, besitzt die Atmosphäre auch eine elektive, kraft welcher sie ein kompliziertes Linienabsorptionsspektrum aufweist. Es ist Langleys Verdienst, auf den störenden Einfluſs dieser elektiven Absorption hingewiesen zu haben, doch scheint uns gerade der Umstand, „daſs es nicht eine Haarbreite des Spektrums giebt, in welcher nicht atmosphärische Linien anzutreffen wären“, eine Berücksichtigung dieser Absorption zu ermöglichen. Denn es ist klar, daſs in einem schmalen, aber endlich breiten Spektralbezirk der Einfluſs dieser elektiven Absorption schon in deren Bestimmung mit enthalten ist, da die dunklen Linien durchaus keine nahezu absolut dunklen Stellen darstellen. Wenn aber Langley vorschlägt, ein möglichst schmales Reagens ins Spektrum einzuführen, um damit die Intensitäten zu messen, und den terrestrischen Linien auszuweichen, so halten wir dafür, daſs gerade hierin ein ungünstiges Mittel gewählt ist. Denn fällt auch nur eine Linie der Atmosphäre auf das lineare Agens, so wird die Intensität ungleich ungünstiger beeinfluſst, als bei einem breiteren Spektralbezirke, für welchen der Absorptionskoeffizient den terrestrischen Linien seiner Ableitung nach schon Rechnung trägt. In einer Gleichung ausgedrückt:

Der Absorptionskoeffizient, wie er durch Beobachtungen bestimmt wird, enthält die allgemeine und elektive Absorption der Luft, ist also für den Spektralbezirk $(\lambda - \varepsilon)$ bis $(\lambda + \varepsilon)$ von der Breite 2ε von der Form:

$$1 - A = \int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda+\varepsilon} (1-\alpha)^n d\lambda + \sum_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda+\varepsilon} {}_r (1-\alpha_r)^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (45)$$

Da man nun 2ε immer beliebig klein machen kann, da weiter die Zahl der Linien sehr groſs ist, so wird bei nur einigermaſsen gleichmäſsiger Verteilung der Linien sich die Summe der diskreten Strahlen mit dem Integrale zu einem Mittelwerte vereinen lassen; dieser Mittelwert ist eben beobachtet, und wird als Absorption der Luft in die Rechnung gezogen.

Zur Bestimmung dieser Gröſse beobachtet man am bequemsten das Spektrum der Sonne bei möglichst hohem und tiefem Stande derselben. Ist die extratellure Intensität irgend einer Spektralstelle L_0, die bei der Zenithdistanz z_1 und z_2 gemessene Intensität derselben Wellenlänge L_1 und L_2, so hat man:

$$L_1 = L_0 (1-\alpha)^{\sec z_1}, \quad L_2 = L_0 (1-\alpha)^{\sec z_2}$$

woraus man nun leicht α bestimmen kann. Hat man verschiedene Wellenlängen so beobachtet, so kann man die wahrscheinlichsten Werte der Absorptionskonstanten μ und m bestimmen.

d) Es ist von Interesse, und bei kolorimetrischen Messungen sogar notwendig, den Einfluſs zu kennen, den die Atmosphäre auf das Element μ des Spektrums ausübt. Wir haben zu diesem Ende

$$\varphi(\lambda) = \left\{1 - \frac{\mu^4}{m_4}\left(\frac{\lambda^2 + m^2}{\lambda^2 + \mu^2}\right)^2\right\}^{\sec z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (46)$$

zu setzen, wo wir den Exponenten $\sec z$ nur als Abkürzung des vollständigeren Ausdruckes in (42a) bezeichnen. Daraus folgt:

$$\frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)} = -4\mu^4\lambda \frac{\dfrac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}}{m^4(\lambda^2+\mu^2)-\mu^4(\lambda^2+m^2)} \sec z$$

und weiter

$$\frac{\mu_1^2}{\mu_0^2} = \frac{m^4(\mu^2+\mu_0^2)^2-\mu^4(m^2+\mu_0^2)+2\mu^4\mu_0^2\dfrac{m^2+\mu_0^2}{\mu^2+\mu_0^2}\sec z}{m^4(\mu^2+\mu_0^2)-\mu^4(m^2+\mu_0^2)-2\mu^4\mu_0^2\dfrac{m^2+\mu_0^2}{\mu^2+\mu_0^2}\sec z} \tag{47}$$

in welcher Formel μ_1 das wahre, μ_0 das beobachtete μ bezeichnet, während μ, m die Konstanten der Luftabsorption bedeuten.

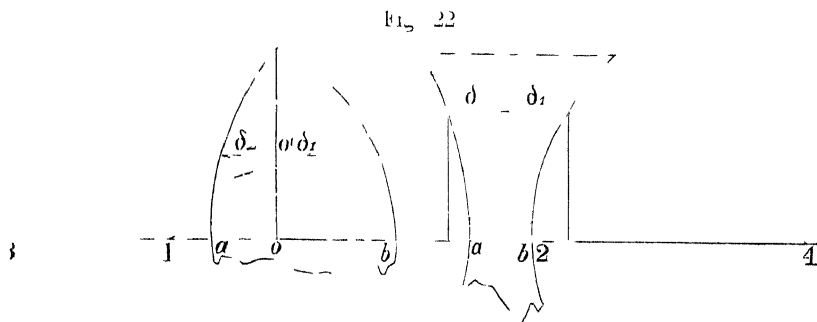
4. Strahlenkondensatoren.

In allen Anwendungen der Spektralanalyse, zumal auf Astrophysik, wendet man das Spektroskop in Verbindung mit einem Fernrohre an, dessen Objektiv — gleichgültig ob Spiegel oder Linse — als Kondensator wirkt. Da vor und nach dem Kondensator der Strahl dasselbe Medium durchläuft, so ist die Wellenlänge dadurch keiner Veränderung unterworfen, ebensowenig die Polarisationsebene, wenn der Kondensator als homogen amorph vorausgesetzt wird. Da aber in den eigentlichen Spektralerscheinungen dieses Element überall außer Acht gelassen wird, so kann diese Beschränkung sogar fallen gelassen werden.

Anders verhält es sich mit der Intensität, die sowohl durch Brechung als durch Reflexion geschwächt wird. Wir wollen diesen Einfluß nun näher ins Auge fassen.

a) Refraktoren.

Das Objektiv des Refraktors besteht bekanntlich aus der Kombination einer Konvex- und Konkavlinse, besitzt also in verschiedenen Teilen ihres Durchmessers verschiedene Dicken. Um die Absorption in Rechnung ziehen zu können, müssen wir vor allem diese Dicken berechnen können.

Fig. 22.

In der obenstehenden Figur bezeichnen 1, 2, 3, 4 die Mittelpunkte der Konvex- und Konkavlinse. Die optische Axe des Systems ist die Axe der x, die darauf senkrechte die Axe der y. In der Konvexlinse haben wir in dem Punkte $y = 00$ die beiden Teildicken δ_1 und δ_2. Man findet dafür

$$\delta_1 = x - (10) = \sqrt{r_1^2 - y^2} - (10)$$

und

$$\delta_2 = x - (20) = \sqrt{r_2^2 - y^2} - (20)$$

wenn man den Koordinatenanfang bezüglich in die Punkte 1 und 2 verlegt. Man hat aber:

$$(10) = 1b - 0b, \quad (20) = 2a - a0$$
$$(10) + (20) = 1b + 2a - (ab - 0a)$$

und bezeichnet man die Dicke der Linse im Centrum mit D_1, in der Höhe y mit Δ_1, so kommt durch Addition der Teildicken:

$$\Delta_1 = \sqrt{r_1^2 - y^2} + \sqrt{r_2^2 - y^2} + D_1 - (r_1 + r_2) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (48)$$

Für die Konkavlinse hat man ganz analog:

$$\delta_3 = r_3 - \sqrt{r_3^2 - y^2}, \quad \delta_4 = r_4 - \sqrt{r_4^2 - y^2}$$
$$\Delta'' = \delta_3 + \delta_4 + D'$$

und daher auch:

$$\Delta'' = (r_3 + r_4) + D' - \sqrt{r_3^2 - y^2} - \sqrt{r_4^2 - y^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (49)$$

Ist nun der Transmissionskoeffizient des einen Glases p, so ist derselbe im Abstande y vom Centrum der Linse p^{Δ}. Eine Kreiszone $2y\pi.dy$ hat also konstant dieselbe Absorption, und daher wird der mittlere Transmissionskoeffizient für die ganze Oberfläche der Linie:

$$P = \frac{1}{\pi Y^2}\int_0^Y 2\pi y p^{\Delta} dy = \frac{2}{Y^2}\int_0^Y y p^{\alpha + \varepsilon\sqrt{a^2-y^2} + \varepsilon\sqrt{b^2-y^2}} \cdot dy \quad \ldots \ldots \quad (50)$$

Dabei bedeutet Y die Öffnung des Objektivs, ε die negative oder positve Einheit; durch diese Schreibweise haben wir die Resultate der Formeln (48) und (49) in eine einzige vereint. Durch Reihenentwickelung findet man:

$$\left.\begin{aligned}
P &= \frac{2}{Y^2}\int_0^Y y\Big\{1 + \frac{lgp}{1!}\left[\alpha + \varepsilon\sqrt{a^2-y^2} + \varepsilon\sqrt{b^2-y^2}\right] \\
&\qquad\qquad \frac{(lgp)^2}{2!}\left[\alpha + \varepsilon\sqrt{a^2-y^2} + \varepsilon\sqrt{b^2-y^2}\right]^2 + \cdots\Big\} dy \\
&= \frac{2}{Y^2}\int_0^Y \Big\{\frac{lgp}{1!}\left[\alpha + \varepsilon a\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{y^2}{a^2}\right) + \varepsilon b\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{y^2}{b^2}\right)\right] \\
&\qquad + \frac{(lgp)^2}{2!}\Big[\alpha^2 + \varepsilon^2(a^2 - y^2) + \varepsilon^2(b^2 - y^2) + 2\alpha\varepsilon a\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{y^2}{a^2}\right) \\
&\qquad + 2\alpha\varepsilon b\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) + 2\varepsilon^2 ab\left(1 - (a^2 + b^2)^2\frac{y^2}{2a^2b^2}\right)\Big]\Big\} \cdot y\, dy + 1
\end{aligned}\right\} \quad (51)$$

wenn man die Wurzelentwickelung bis Glieder zweiter Ordnung fortsetzt.

Wir setzen nun:

$$\left.\begin{aligned}
A &= (\alpha + \varepsilon a + \varepsilon b)\frac{lgp}{1!} + (\alpha + \varepsilon a + \varepsilon b)^2\frac{(lgp)^2}{2!} \\
B &= \left(\frac{\varepsilon}{2a} + \frac{\varepsilon}{2b}\right)\frac{lgp}{1!} + \left(2\varepsilon^2 + \frac{\alpha\varepsilon}{a} + \frac{\alpha\varepsilon}{b} + \frac{\varepsilon^2(a^2 + b^2)}{ab}\right)\frac{(lgp)^2}{2!}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (52)$$

und erhalten dann einfach:

$$P = 1 + \frac{2}{Y^2}\int_0^Y (A - By^2) y\, dy = 1 + \left(A - \frac{B}{2}Y^2\right) \quad \ldots \ldots \quad (53)$$

Die Transmission der Linsenkombination ist dann das Produkt der Transmissionskoeffizienten der Einzelnlinsen. Diese lassen sich, wenn man die accentuierten Größen auf die Konkavlinse bezieht, so schreiben:

$$P = 1 + D \lg p + \frac{D^2}{2}(\lg p)^2 - \frac{Y}{2}\left[\frac{r_1+r_2}{2r_1 r}\lg p + D\,\frac{r_1+r}{2r_1 r}(\lg p)^2\right]$$
$$P' = 1 + D' \lg p' + \frac{D'^2}{2}(\lg p')^2 + \frac{Y}{2}\left[\frac{r_1+r}{2r_1 r'}\lg p' + D'\,\frac{r_1+r'}{2r_1 r'}(\lg p')^2\right] \qquad (54)$$

Außer durch Absorption geht bei den Linsen auch durch Reflexion Licht verloren. Da die Oberfläche der Linse nur wenig gekrümmt ist, so darf von der Verschiedenheit der Einfallswinkel der Strahlen, nach welchen sich die Größe der Reflexion richtet, ganz abgesehen werden. Wird also $1-\beta$ der auffallenden Strahlung reflektiert, so ist die Intensität des durch die Linsenkombination gehenden Lichts

$$I = \beta\, P\, P'\, I_0\, \mathfrak{k} \qquad (55)$$

mit $\mathfrak{k}$ die Strahlenkondensation und mit I_0 das auffallende Licht bezeichnend. Dabei ist natürlich vorausgesetzt, daß man die Intensitäten stets auf gleiche Flächen bezogen denkt. Alle drei Schwächungsfaktoren sind natürlich Funktionen der Wellenlänge.

Bildet man das Produkt PP' unter Vernachlässigung von Y^2, so kommt, den Transmissionskoeffizienten des Kondensators nun mit K bezeichnend:

$$K = \beta\Big\{\Big[1 + D\lg p + D'\lg p' + \frac{D^2}{2}(\lg p)^2 + \frac{D'^2}{2}(\lg p')^2\Big]$$
$$+\Big[DD'\lg p\lg p' + \frac{D^2D'}{2}\lg p'(\lg p)^2 + \frac{DD'^2}{2}\lg p(\lg p')^2 + \frac{D^2D'^2}{4}(\lg p)^2(\lg p')^2\Big]$$
$$+\frac{Y}{2}\Big[\Big(\frac{r_1+r}{2r_1 r'}\lg p' + D'\frac{r_1+r'}{2r_1 r'}(\lg p')^2\Big)\Big(1 + D\lg p + \frac{D^2}{2}(\lg p)^2\Big)$$
$$-\Big(\frac{r_1+r_2}{2r_1 r}\lg p + \frac{r_1+r}{2r_1 r}D(\lg p)^2\Big)\Big(1 + D'\lg p' + \frac{D'^2}{2}(\lg p')^2\Big)\Big]\Big\} \qquad (56)$$

Um nun die Größe K zu bestimmen, beobachtet man die Intensität einer Lichtquelle für einen homogenen Spektralteil im Fernrohr und dann ohne dasselbe. Ist F der Fokalbildhalbmesser der kreisförmig gedachten Lichtquelle, so ist die Strahlenkondensation $\mathfrak{k}$ gegeben durch

$$\mathfrak{k} = \left(\frac{Y}{F}\right)^2 \qquad (57)$$

wo

$$F = f\,\mathrm{tg}\,\varrho \qquad (58)$$

wenn f die Brennweite der Linsenkombination, und ϱ den scheinbaren Halbmesser der Lichtquelle vom Objektive aus bedeutet.

Mißt man durch das Fernrohr die Intensität I_0 des auffallenden Lichtes zu I_1, durch das bloße Auge zu I_2, so hat man die beiden Gleichungen

$$I_1 = I_0\, S\, \mathfrak{k} K \qquad I_2 = I_0\, S \qquad (59)$$

wenn S die Transmission des benutzten Photometers bedeutet. Gebraucht man als Lichtquelle die Sonne, so hat man die Höhenänderung derselben während der Beobachtung in Rechnung zu ziehen.

Es könnte vorkommen, daß man bei dieser Vergleichung nicht die volle Öffnung benutzen kann. Beträgt diese Y' statt der Y, so erhält man aus den obigen beiden Gleichungen (unter Berücksichtigung des nun veränderten $\mathfrak{k}$) nicht K, sondern K'. Man kann dieses dann mit Hilfe der Gleichung (56) auf die volle Öffnung reduzieren.

Nach dieser — jedoch graphisch durchgeführten — Methode wurde die Transmission des Objektivs von 161,2 mm Öffnung des O-Gyallaer Refraktors bestimmt. Die Oberfläche der Linse wurde in fünf konzentrische Felder geteilt, und durch jedes derselben

nacheinander die Sonne spektralphotometrisch mit und ohne Fernrohr gemessen. Da angenäherte Werte der Linsendicken und der Transmissionskoeffizienten für Flint- und Crownglas bekannt waren, wurden diese Zonen schon im vorhinein gerechnet. Es fand sich z. B. für Rand und Mitte des Objektives:

λ	lg K (Rand)	lg K (Mitte)
$\lambda = 0.673$	lg K (Rand) $= -0.0593$	lg K (Mitte) $= -0.0828$
633	553	816
600	567	832
555	649	894
515	728	965
484	763	1003
464	776	1017
444	780	1023
426	782	1023

und hiernach durch mechanische Integration über das ganze (sichtbare) Spektrum:

λ	lg K	λ	lg K
$\lambda = 0.673$	lg $K = -0.0645$	$\lambda = 0.484$	lg $K = -0.0817$
633	611	464	829
600	626	444	834
555	703	426	836
515	781		

Unter Zuhilfenahme des aus der Gröſse des Sonnenbildes bestimmten Kondensationsfaktors ergab sich nun aus den Beobachtungen, daſs an die voranstehende Reihe die fast genau konstante Korrektion von $+0.0238$ hinzugelegt werden muſs, um die wahre Transmission des Objektives zu erhalten. Die Absorption beträgt also rund 11 % des auffallenden Lichtes.

b) Reflektoren.

Hier gestaltet sich die Sache bedeutend einfacher. Der absorbierte Teil $(1-\alpha)$ gelangt nicht ins Auge, und der reflektierte β kann der geringen Krümmung des Spiegels halber als vom Einfallswinkel unabhängig betrachtet werden. Man hat also ganz einfach:

$$I = \alpha\beta I_0 \mathfrak{k} \qquad (60)$$

Die Bestimmung dieser Gröſse, die wir wieder mit K bezeichnen, geschieht ganz wie früher, unter Berücksichtigung der Strahlenkondensation.

Bei dem Reflektor fällt zugleich die Ungleichheit der Fokallängen für verschiedenfarbene Strahlen weg, was für Spektralbeobachtungen stets ein auſserordentlicher Vorteil ist.

Durch Temperaturänderungen wird bei Refraktoren die Dicke der Linsen verändert; so lange aber keine Deformation der Linse eintritt, trifft der Strahl unabhängig von der Temperatur immer dieselbe Zahl absorbierender Teilchen; der Transmissionskoeffizient bleibt also unverändert.

Eine Veränderung kann bei beiden Arten von Kondensatoren nur durch den Einfluſs der Temperatur auf die Brennweite hervorgebracht werden. Miſst man nämlich bei der Temperatur t und reduziert die Messungen auf die feste Temperatur t_0, so kommt:

$$\mathfrak{k} = \left(\frac{Y_0 + \alpha(t-t_0)}{F_0 + \beta(t-t_0)}\right)^2, \quad F = [f_0 + \gamma(t-t_0)] \operatorname{tang} \varrho$$

da man die Änderungen immer als lineare Funktionen der Temperatur betrachten kann.

c) Chromatische Fehler des Kondensators.

Besteht der Kondensator aus einer Linsenkombination, so wird das Bild einer punktförmigen Lichtquelle durch ein Prisma betrachtet trotz der angestrebten Achro-

masie nicht eine Linie erzeugen, sondern im allgemeinen eine von zwei Kurven eingeschlossene Fläche, deren Breite stets nur für die gerade eingestellte Wellenlänge unendlich klein ist. Fokussiert man für jeden einzelnen Strahl, so braucht die Chromasie nicht weiter berücksichtigt zu werden. Wir nehmen nun aber an, daſs dies nicht der Fall ist, daſs also Intensitätsmessungen an einem Spektrum vorgenommen werden, welches konstant auf die Wellenlänge λ fokussiert ist.

Da man für den betrachteten Fall Dicke und Abstand der beiden Linsen bedenkungslos vernachlässigen darf, haben wir nach der elementaren Optik für die beiden Linsen

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{\alpha'} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{a'} \tag{61}$$

wenn a, α und f die Gegenstandsweite, Bildweite und den Fokalabstand bezeichnen. Für eine Kombination zweier Linsen ist die Gegenstandsweite der zweiten Linse die Bildweite der ersten, also

$$a' = -\alpha$$

und daher erhält man

$$\frac{1}{\alpha'} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f'} - \frac{1}{a} \tag{62}$$

Setzt man parallele Strahlen voraus, und nennt F die Brennweite des Systems, so wird

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f'} \tag{63}$$

wo die f gegeben sind durch

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right), \quad \frac{1}{f'} = (n'-1)\left(\frac{1}{r_1'} + \frac{1}{r_2'}\right) \tag{64}$$

Da nun die chromatische Abweichung immer sehr klein ist, kann man schreiben

$$\begin{aligned} \frac{dF}{F} &= \frac{df}{f} + \frac{df'}{f'} \\ \frac{dF}{F} &= -dn\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) - dn'\left(\frac{1}{r_1'} + \frac{1}{r_2'}\right) \end{aligned} \tag{65}$$

Legt man also durch den Brennpunkt F der Wellenlänge λ eine Ebene senkrecht zur optischen Axe, so ist die Breite z. B. des Fokalbildes von der Wellenlänge λ', der $n + dn$ entspricht

$$d\beta = dF \operatorname{tg} \varphi \tag{66}$$

wenn φ die scheinbare Öffnung des Objektives bedeutet. Man erhält also, ohne Rücksicht auf das Zeichen

$$d\beta = F^2 \operatorname{tang} \varphi \left[dn\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + dn'\left(\frac{1}{r_1'} + \frac{1}{r_2'}\right)\right] \tag{67a}$$

oder durch Einführung von Wellenlängen, indem man setzt

$$n = a_0 + \frac{a_2}{\lambda^2}$$

$$d\beta = F \operatorname{tg} \varphi \frac{2d\lambda}{\lambda^3}\left[a_2\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + a_2'\left(\frac{1}{r_1'} + \frac{1}{r_2'}\right)\right] \tag{67b}$$

Setzt man die rein optische Konstante, in welcher nun die Radien mit Rücksicht auf die Linsenformen, absolute Gröſsen bedeuten, gleich $\frac{\alpha}{Y}$ mit Y die Öffnung $= F \operatorname{tang} \varphi$ bezeichnend, also

$$\alpha = -\left[a_2\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right) - a_2'\left(\frac{1}{r_1'}+\frac{1}{r_2'}\right)\right] Y$$

so kommt:

$$\beta = \alpha F \frac{1}{\lambda^2} - \beta' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (68)$$

wo β' die Integrationskonstante bedeutet. Wir bestimmen sie so, daſs die Breite in λ_0 gleich β_0 werde, und haben dann allgemein:

$$\beta = \beta_0 + \alpha F\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_0^2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (69)$$

Ist nun die Intensität auf die Breite β_0 bezogen, so muſs sie für die Wellenlänge λ, um auf dieselbe Fläche reduzierbar zu sein, mit $\frac{\beta}{\beta_0}$ multipliziert werden.

Ist also das Spektroskop beständig auf λ_0 eingestellt, und beobachtet man für die Wellenlänge λ die Intensität I'_λ, so ist dieselbe auf das Linienspektrum reduziert:

$$I_\lambda = I_\lambda'\left\{1 + \frac{\alpha}{\beta_0} F\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_0^2}\right)\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (70)$$

Für rein spektroskopische Beobachtungen sind auch unachromatische Konvexlinsen vorgeschlagen worden, aber wohl nie in Gebrauch gekommen. Für solche gilt ganz dieselbe Formel, nur braucht man in α zu setzen $a_2' = 0$.

5. Theorie der spektralanalytischen Instrumente.

Die Übertragung der Resultate theoretischer Forschung auf Erscheinungen der Natur, und umgekehrt, der Erscheinungen auf die Theorie geschieht durch Vermittelung der Beobachtungen, zu deren Anstellung es der Instrumente bedarf. Da einerseits deren Kenntnis dem Forscher ebenso notwendig wird, wie die Handhabung seiner mathematischen Hilfsmittel, andrerseits aber zumal in der Spektralanalyse diese nie in der idealen Form darstellbar, welche ihm die der Untersuchung zu Grunde zu legenden Gröſsen genau lieferte, so möge diesem Gegenstande hier noch eine gedrängte Besprechung gewidmet sein, indem nur das Typische der Instrumente festgehalten und zumeist nur auf ihr Verhalten gegenüber der Intensität eingegangen werde. Bezüglich der Wellenlänge wird man in fast jedem Falle in der reichen Litteratur des Gegenstandes Rat finden.

Entsprechend den drei Variabelen des Spektrums, Wellenlänge, Intensität und Schwingungsebene, teilen wir auch die Instrumente in drei Klassen, deren jede die Bestimmung einer dieser Veränderlichen zur Aufgabe hat. Wir unterscheiden auſserdem noch den Fall, daſs der zu beobachtende Strahlenkomplex getrennt oder nicht getrennt ist. Der erstere entspricht der bereits bezeichneten Aufgabe, der zweite wird durch Instrumente beherrscht, welche die Farbe, mittlere Intensität und mittlere Polarisationsebene bestimmen.

A. Das Spektrometer und Spektroskop.

a) Zur Auflösung eines Strahlenkomplexes in ein Spektrum hatten wir vornehmlich zwei Mittel gefunden; die Dispersion durch Brechung und die Diffraktion. Wir besprechen zunächst das auf der zweiten Erscheinung beruhende Instrument.

Das Diffraktionsspektrometer ist im wesentlichen ein feines Winkelmeſsinstrument, mit welchem die Beugungswinkel parallel aus einem Spalte auf ein Diffraktionsgitter

fallender Strahlen bestimmt werden. Das Rohr, welches den im Brennpunkte einer Kollektivlinse stehenden Spalt enthält, heifst Kollimatorrohr, und ist mit dem Beobachtungsfernrohr um dieselbe vertikale Axe drehbar, welche zugleich den darauf senkrechten Kreis trägt. Um mit dem Instrumente Messungen anstellen zu können, müssen zunächst die Fehler desselben eliminiert werden. Erfordernis ist, Koinzidenz der optischen Axen von Kollimator- und Fernrohr, und Perpendikularität derselben auf die mechanische Drehungsaxe, senkrechte Stellung des Gitters auf die optischen Axen der beiden Rohre, Nullwert des Inzidenzwinkels, Parallelismus der Gitterspalten mit dem Kollimatorspalte.

Man stellt das Fernrohr, am besten mit Hilfe eines himmlischen Objektes, auf parallele Strahlen ein, visiert den Spalt an, und verändert seine Lage zur Kollimatorlinse so lange, bis er völlig scharf erscheint. Dann treten die Spaltstrahlen parallel aus. Darauf stellt man einen Punkt des Spaltes, der etwa durch einen über die Mitte des Spaltes gespannten Faden fixiert ist, auf das Fadenkreuz des Fernrohrs ein, stellt auf das Gittertischchen einen Spiegel und giebt dem Tischchen eine solche Neigung, daß durch Reflexion vom Spiegel um einen beliebigen Winkel derselbe Punkt des Spaltes mit dem Fadenkreuze des Fernrohrs koinzidiert. Dann ist der Spiegel der mechanischen Drehungsaxe parallel, und man benötigt nun bloß Fernrohr und Kollimator senkrecht zu dieser Spiegelfläche zu stellen. Zu dem Ende setzt man vor das Okular unter einem Winkel von 45° einen durchbrochenen Spiegel, der seitlich beleuchtet wird. Sieht man durch die Öffnung der Spiegelplatte hindurch, so erblickt man im allgemeinen neben dem Fadenkreuze auch das von der der Drehungsaxe parallelen Spiegelfläche reflektierte Bild desselben. Bild und Fadenkreuz fallen zusammen, wenn die optische Axe des Fernrohrs auf jener Fläche senkrecht steht. Ist diese Koinzidenz zu Stande gebracht, so ersetzt man den Spalt durch ein ähnliches Okular, und verfährt ganz analog. Um nun das Gitter in der Richtung der Spalten senkrecht zur optischen Axe der beiden Rohre zu stellen, braucht man nur dieses an Stelle der Spiegelplatte als reflektierende Fläche zu benutzen. Der Einfallswinkel der Spaltstrahlen ist Null, wenn die entsprechenden Maxima einer homogenen (z. B. Natrium) Strahlengattung rechts und links vollkommen symmetrisch zum ungebeugten Spaltbilde stehen. Ganz analog verfährt man, wenn es sich um reflektierende Gitter handelt.

Bestimmt man nun z. B. bei einfallendem Sonnenlichte die Kreisablesung des ungebeugten Spaltbildes ψ_0, darauf die einer bestimmten Linie λ im m-ten Spektrum rechts und links entsprechende Lesung ψ und ψ, so wird

$$\lambda = \frac{1}{N} \frac{\sin(\psi - \psi_0)}{m} = \frac{1}{N} \frac{\sin(\psi_0 - \psi)}{m} \tag{71}$$

wenn N die Anzahl der auf die Längeneinheit gehenden Spalten bezeichnet, die mit einem guten Mikroskope gegen die schon vom Künstler gemachte Angabe verglichen werden kann. Wie man aus dem Vorhergehenden ersieht, werden die Wellenlängenbestimmungen desto genauer, in einem je höheren Spektrum sie ausgeführt werden. Da aber die einzelnen Spektra sich schon sehr rasch superponieren, so müssen die die Messung störenden Strahlengattungen entweder durch Absorptionsmedien, oder besser — da man hier nicht beschränkt ist, durch Prismen abgehalten werden. Erzeugt man nämlich durch ein Prisma ein — wenn auch nicht besonders reines — Spektrum, und läfst dasselbe auf den Spalt des Spektrometers fallen, so hat man es mit teilweise homogenem Lichte zu thun, in welchem man nun bis Spektra sehr hoher Ordnung gehen kann.

Die Fehler, welchen die Gitter unterliegen, sind prismatische oder Planabweichungen der Gitterplatte, und nicht Kongruenz der Spalten und ihres gegenseitigen Abstandes. Es sei nun γ die Breite des ersten Spaltes und e die gegeneinander gekehrte Randentfernung der beiden ersten. Dann sei allgemein für die folgenden:

$$\gamma_r = \gamma + \delta_r, \quad e_r = e + \varepsilon_r \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (72)$$

wo δ_r und ε_r vorläufig nur an die Bedingung der unendlichen Kleinheit gebunden sein mögen. Dann wird die Summe der Sinusse, welche den Schwingungszustand in einer zu den gebeugten Strahlen senkrechten Ebene darstellt, zur folgenden:

$$\sin 2\pi \left[\varphi - \frac{v}{\pi}(\beta + \tfrac{1}{2}\gamma)\right] + \sin 2\pi \left[\varphi - \frac{v}{\pi}(\beta + \tfrac{1}{2}\gamma) - \frac{\delta_2}{2}\frac{v}{\pi} - (\gamma + e)\frac{v}{\pi}\right]$$
$$+ \sin 2\pi \left[\varphi - \frac{v}{\pi}(\beta + \tfrac{1}{2}\gamma) - \frac{\delta_3}{2}\frac{v}{\pi} - 2(\gamma + e)\frac{v}{\pi} - (\delta_2 + \varepsilon_2)\frac{v}{\pi}\right] + \cdots \quad \ldots (73)$$

wo Kürze halber:

$$\varphi = \frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}, \quad v = \frac{\pi}{\lambda}(\sin\psi - \sin\chi) \quad \ldots \ldots \ldots (74)$$

gesetzt war. Schreiben wir nun:

$$\left.\begin{aligned} \varrho_1 &= \tfrac{1}{2}\frac{v}{\pi}\delta_2 \\ \varrho_2 &= \tfrac{1}{2}\frac{v}{\pi}\delta_3 + (\delta_2 + \varepsilon_2)\frac{v}{\pi} \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varrho_n &= \tfrac{1}{2}\frac{v}{\pi}\delta_{n+1} + (\delta_n + \varepsilon_n)\frac{v}{\pi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (75)$$

so wird die Sinussumme unter schon früher benutzten Abkürzungen einfacher:

$$S = \sin x + \sin(x - y - \varrho_1) + \sin(x - 2y - \varrho_2) + \cdots$$

welche, da ϱ_1 noch immer unendlich klein bleibt, sich auch so schreiben läfst:

$$S = \sin x + \sin(x - y) + \sin(x - 2y) + \cdots$$
$$- \varrho_1 \cos(x - y) - \varrho_2 \cos(x - 2y) - \cdots$$
$$= \frac{\sin\frac{n}{2}y}{\sin\frac{1}{2}y}\sin\left[x - \frac{n-1}{2}y\right] - \sum_1^n{}^r \varrho_n \cos(x - ry) \quad \ldots (76)$$

Bei beliebig belassenem ϱ kann die zweite Summe allgemein nicht entwickelt werden. Es läfst sich aber für ϱ, betrachtet man die Anfertigungsweise der Gitter, und die zur Bestimmung von $(\gamma + e)$ dienende Gleichung — die sehr wahrscheinliche Annahme machen, dafs es eine periodische Funktion der Ordnungszahl der Spalten ist, derart, dafs sie innerhalb der Breite der Gitter (durch N_1 die Zahl der Spalten gegeben) ν-mal ihren gröfsten Wert annimmt. Setzt man also, nur die ersten Glieder mitnehmend, in einer Fourierschen Entwickelung

$$\varrho_n = \varrho \sin 2\pi n \frac{\nu}{N} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (77)$$

wo ein additives Glied, wegen $n = 0 : \varrho_0 = 0$ nicht vorkommen kann, so wird:

$$\sum_1^n{}^r \varrho_r \cos(x - ry) = \varrho \sum_1^n{}^r \sin 2\pi\frac{\nu}{N} r \cos(x - ry)$$
$$= \frac{\varrho}{2}\sum_1^n{}^r \cos\left[x - r\left(y - 2\pi\frac{\nu}{N}\right)\right] - \frac{\varrho}{2}\sum_1^n{}^r \sin\left[x - r\left(y + 2\pi\frac{\nu}{N}\right)\right] \quad \ldots (78)$$

Und hiermit erhält man aus (76) die Gleichung:

$$S = \frac{\sin\frac{n}{2}y}{\sin\frac{1}{2}y}\sin\left(x - \frac{n-1}{2}y\right) - \frac{\varrho}{2}\,\frac{\sin\frac{n}{2}\left(y - 2\pi\frac{i}{N}\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(y - 2\pi\frac{i}{N}\right)}\cos\left[x - \frac{n-1}{2}\left(y - 2\pi\frac{i}{N}\right)\right]$$

$$+ \frac{\varrho}{2}\,\frac{\sin\frac{n}{2}\left(y + 2\pi\frac{i}{N}\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(y + 2\pi\frac{i}{N}\right)}\sin\left[x - \frac{n-1}{2}\left(y + 2\pi\frac{i}{N}\right)\right] \qquad (79)$$

$$x = 2\pi\left[\varphi - \frac{v}{\pi}(\beta + \gamma)\right] \qquad y = 2\pi\frac{v}{\pi}(\gamma + e)$$

Jetzt tritt natürlich das Maximum der Intensität nicht mehr für $y = 0$ auf, sondern allgemein erst dann wenn $\frac{\pi}{\lambda}(\gamma + e)(\sin\psi - \sin\gamma) = m\pi + \varepsilon\pi$ (80)

ist, wenn ε eine sehr kleine Größe bedeutet Daraus folgt als Korrektion der Wellenlänge, die zu der direkt bestimmten algebraisch hinzuzulegen ist

$$\Delta\lambda = -\frac{1}{N}\sin\psi\,\frac{\varepsilon}{m} \qquad (81)$$

wenn senkrechte Inzidenz der Strahlen auf das Gitter vorausgesetzt wird Um ε zu bestimmen, braucht man nur aus (79) die Intensität der gebeugten Strahlen d h die Summe der Quadrate der Amplituden zu bilden, diese nach y differenzieren, und nach Substitution von $\frac{y}{2} = m\pi + \varepsilon\pi$ den Differentialquotienten Null zu setzen Dabei sind natürlich alle jene Abkürzungen zu berücksichtigen, welche durch die Kleinheit von ε geboten sind

b) Ein Nachteil des Diffraktionsspektrometers ist entschieden die geringe Lichtstärke die nicht zu umgehen ist, und daher wird dasselbe wohl immer ein Normalinstrument bleiben, in praktischen Untersuchungen dagegen meistens durch das Dispersionsspektroskop verdrängt werden, welchem wir auch ein eingehenderes Studium weihen wollen

Durch Integration der Schwingungsgleichungen des Äthers wir gefunden daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwingung im materieerfüllten Raume je nach der Wellenlänge veränderlich ist Läßt man demgemäß ein Strahlenbündel auf einen Körper fallen, so erhält man nach dem bekannten Brechungsgesetze

$$\frac{\sin i_1}{\sin r_1} = n \qquad (82)$$

wo i_1 und r_1 Einfalls und Brechungswinkel, n aber den auf Luft bezogenen Brechungsindex bezeichnet Da n von Strahl zu Strahl veränderlich ist, so bewirkt schon die Brechung an der ersten Fläche des Körpers Zerstreuung der Schwingungen Beim Austritt des Strahlenbündels in atmosphärische Luft erhält man die analoge Gleichung

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{1}{n} \qquad (83)$$

Die Dispersion wird also durch diese zweite Brechung wieder teilweise aufgehoben sie wird es ganz, wenn $i = r_1$ daher auch $r_2 = i_1$ wird Dieser Fall tritt aber immer ein wenn die Grenzflächen des brechenden Körpers einander parallel sind Bleibende Dispersion durch Brechung kann nur dann erhalten werden wenn das brechende Medium gegeneinander geneigte Grenzflächen besitzt Körper von der angegebenen Eigenschaft werden Prismen genannt Ist der brechende Winkel derselben, das ist der durch die

Grenzflächen eingeschlossene Winkel φ, so hat man nach der elementaren Optik die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\sin i_1}{\sin r_1} = n, \quad \frac{\sin i_2}{\sin r_2} = \frac{1}{n} \\ r_1 + i_2 = \varphi, \quad \delta = i_1 + r_2 - \varphi\end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (84)$$

wobei δ die Deviation, d. h. den Winkel bedeutet, welchen der aus dem Prisma austretende Strahl mit dem auffallenden bildet. Diese Gleichungen charakterisieren vollkommen das Spektrometer, dessen typische Eigenschaften auch daraus entwickelt werden können. Die unmittelbarste Variabele des Spektrums, die Wellenlänge, erscheint hier ausgedrückt durch den Brechungsindex; auf die Bestimmung dieser Gröfse kommt es sonach zumeist an. Die Deviation hat die Eigenschaft, ein Minimum werden zu können. Durch Differentation nach dem Einfallswinkel erhält man:

$$\frac{d\delta}{di_1} = 1 + \frac{dr_2}{di_1}; \quad dr_2 = n\frac{\cos i_2}{\cos r_2}\, di_2, \quad di_2 + dr_1 = 0, \quad dr_1 = \frac{1}{n}\frac{\cos i_1}{\cos r_1}\, di$$

woraus durch einfache Substitution sich ergiebt:

$$\frac{d\delta}{di_1} = 1 - \frac{\cos i_1 \cos i_2}{\cos r_1 \cos r_2}$$

Berücksichtigt man daneben die Gleichung:

$$\sin i_1 \sin i_2 = \sin r_1 \sin r_2$$

so findet sich leicht, dafs im Falle des Grenzwertes $\frac{d\delta}{di_1} = 0$ sich ergiebt:

$$i_1 - i_2 = r_2 - r_1, \quad i_1 + i_2 = r_1 + r_2$$

Dabei scheinen die Vorzeichen der aus dem Kosinussatze sich ergebenden Gleichung unsicher. Dafs sie aber in der That in der angegebenen Weise zu wählen sind, ergiebt sich aus folgender Überlegung. Es sei gewählt:

$$i_1 - i_2 = r_1 - r_2 \text{ oder } i_1 - r_1 = i_2 - r_2$$

Nun ist aber $i_1 > r_1$ und $i_2 < r_2$ nach den Gesetzen der Brechung. Es müfste mithin eine positive Gröfse einer wesentlich negativen gleich sein können. Es ist somit das Zeichen der einen Seite zu wechseln.

Addiert und subtrahiert man die erhaltenen Gleichungen, so kommt:

$$i_1 = r_2, \quad i_2 = r_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (85)$$

Das Minimum der Deviation tritt also bei symmetrischem Durchgange der Strahlen durch das Prisma ein, und ist durch das Drehen des Prismas sehr leicht zu erhalten, da der Drehung bis zum Minimum der Deviation auch das Spektrum folgt, dann aber stille steht, und trotz weiter fortgesetzter Drehung eine wieder rückkehrende Bewegung annimmt. Gewöhnlich hält man bei Messungen diesen Spezialfall ein; es findet sich hierfür

$$\delta = 2i_1 - \varphi, \quad 2r_1 = \varphi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (86)$$

und daher:

$$n = \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta + \varphi)}{\sin \frac{1}{2}\varphi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (87)$$

woraus unter Berücksichtigung einer der abgeleiteten Dispersionsformeln, etwa der Cauchyschen

$$n^2 = a_0 + \frac{a_2}{\lambda^2} + \frac{a_4}{\lambda^4} + \cdots \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (88)$$

die Wellenlänge gefunden werden kann, wenn aus der anderwärts schon bekannten Wellenlänge von m Strahlen die m Konstanten der Gleichung bestimmt worden sind.

Man sieht also, dafs das Spektrometer mit Prisma, welches übrigens an Konstruktion, Behandlung und Aufstellung ganz mit dem Gitterspektrometer übereinstimmt, durchaus kein absolutes Mefsinstrument ist, da es schon die Kenntnis einiger Wellen-

langen voraussetzt. Handelt es sich also nicht um die weitestgetriebene Genauigkeit, so schlägt man zur Bestimmung der Wellenlänge einen viel direkteren Weg ein, indem man das Prisma, zumal bei geringerer Dispersion, ein für allemal für einen mittleren (grünlich gelben) Strahl in das Minimum der Deviation einstellt, und entweder den Kreis als einfache Skala benutzt, oder überhaupt ein — mit der Deviation in gar keinem einfachen Verhältnis stehendes Mikrometerwerk verwendet. Man stellt dann die schon sehr genau bestimmten Linien des Sonnenspektrums ein, und betrachtet ihre Wellenlängen als Ordinaten der auf der Abszissenaxe aufgetragenen Mikrometerablesung. Man erhält also durch Anwendung einer graphischen — oder irgend einer Interpolationsmethode die Wellenlänge als (Tabellar-) Funktion der Mikrometerablesung.

Eine einfache Formel ergiebt sich aus den Fundamentalgleichungen, wenn man dieselben für Strahlen nahe zum Minimum der Deviation entwickelt. Man hat allgemein

$$n = \frac{\sin(\delta+\varphi-r_2)}{\sin(\varphi-r_1)} \qquad \sin r_2 = \frac{\sin r_1}{n} \tag{89}$$

und durch deren Vereinigung wird

$$\sin\varphi\sqrt{n^2-\sin^2 r_1} - \cos\varphi\sin r_1 = \sin(\delta+\varphi)\cos r_1 - \cos(\delta+\varphi)\sin r_1$$

oder

$$n^2 = \sin^2 r_1 + \left[\cos\varphi\sin r_1 + \frac{\sin(\delta+\varphi)}{\sin\varphi}\cos r_1 - \frac{\cos(\delta+\varphi)}{\sin\varphi}\sin r_1\right]^2$$

$$n^2\sin^2\varphi = \sin^2 r_1 + 2\cos\varphi\sin r_1\sin(\delta+\varphi-r_1) + \sin^2(\delta+\varphi-r_1)$$

Wir differenzieren diesen Ausdruck nach r_1, und erhalten so

$$\begin{aligned}2nn'\sin^2\varphi &= 2\sin r_1\cos r_1 + 2\cos\varphi\sin r_1\cos(\delta+\varphi-r_1)(\delta'-1)\\ &\quad + 2\cos\varphi\cos r_1\sin(\delta+\varphi-r_1) + 2\sin(\delta+\varphi-r_1)\cos(\delta+\varphi-r_1)(\delta'-1)\\ &= 2\sin 2r_1 + 2\cos(\delta+\varphi-r_1)(\delta'-1)[\cos\varphi\sin r_1 + \sin(\delta+\varphi-r_1)]\\ &\quad + 2\cos\varphi\cos r_1\sin(\delta+\varphi-r_1)\end{aligned}$$

Entwickelt man nun um das Minimum der Deviation herum in eine Mac Laurinsche Reihe, so kommt

$$n = \frac{\sin\frac{1}{2}(\delta+\varphi)}{\sin\frac{1}{2}\varphi} + \frac{\varphi+\delta}{2}\,\frac{\cos\frac{1}{2}(\delta+\varphi)}{\sin\frac{1}{2}\varphi} + \dots \tag{90}$$

wo bei kleiner Dispersion die angegebene Näherung durchaus genügen wird. Bestimmt man nun nicht die Deviation selbst, sondern nur die Kreisablesung ω, so kann man (90) auch schreiben

$$n = a\sin\omega + b\cos\omega + c\omega\sin\omega + d\omega\cos\omega \tag{91}$$

wo a, b, c, d Konstanten bedeuten.

Fig. 23.

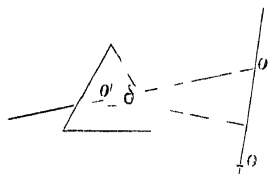
Hat man dagegen im Spektroskope eine Linearskale, so wird die Formel etwas weniger einfach. Es sei (Fig. 23) o_1 der Punkt der Skale, wo alle Strahlen ohne Prisma einschneiden würden, o der Anfangspunkt der Skale, deren Lesung s sein möge. o ist als Mittelpunkt der homocentrischen Strahlen für alle Wellenlängen konstant. Es kommt nun darauf an, die Deviation δ als Funktion von s auszudrücken. Setzt man $oo' = a$, $o_1o = b$, so kommt

$$\frac{\sin(\alpha+\delta)}{\sin\delta} = \frac{b}{a-s}, \text{ oder } \cot\delta = -\cot\alpha + \frac{1}{\sin\alpha}\,\frac{b}{a-s} \tag{92}$$

und dieses wäre in die Gleichung

$$n = \frac{\sin\frac{1}{2}(\delta+\varphi)}{\sin\frac{1}{2}\varphi} + \frac{(\delta+\varphi)}{4}\,\delta\,\frac{\cos\frac{1}{2}(\delta+\varphi)}{\sin\frac{1}{2}\varphi} + $$

zu substituieren.

In Fällen der Anwendung ist jedoch meistens die graphische Methode vorzuziehen.

c) Die Genauigkeit der Messung sowohl als auch die Bequemlichkeit erfordert eine gewisse Gröfse der Helligkeit, sowie möglichste Reinheit des Spektrums. Letztere ist erreicht, wenn selbst sehr nahe Strahlen getrennt erscheinen, erstere, wenn alles auf das Prisma auffallende Licht zur Bildung des Spektrums aufgewendet wird. Geben also die Strahlen der Brechbarkeit n und $n+dn$ noch getrennte Bilder, so ist offenbar dn das Mafs der Unschärfe des Spektrums. Giebt man nun dem auffallenden Strahlenkomplexe eine solche Breite, dafs die Einfallsstrahlen von i_1 bis i_1+di_1 variieren können, so erhält man durch Differentiation unserer Gleichungen:

$$\cos r_2\, dr_2 = n \cos i_2\, di_2 + \sin i_2\, dn, \quad di_2 = -dr_1$$

$$\cos r_1\, dr_1 = \frac{\cos i_1}{n}\, di_1 - \frac{\sin i_1}{n^2}\, dn$$

woraus durch successive Substitution in die erste Gleichung entsteht:

$$dr_2 = \left[\frac{\sin i_1 \cos i_2}{n \cos r_1 \cos r_2} + \frac{\sin i_2}{\cos r_2}\right] dn - \frac{\cos i_1 \cos i_2}{\cos r_1 \cos r_2}\, di_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (93a)$$

oder einfacher:

$$dr_2 = \frac{\sin \varphi}{\cos r_1 \cos r_2}\, dn - \frac{\cos i_1 \cos i_2}{\cos r_1 \cos r_2}\, di_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (93b)$$

Fallen somit die Bilder der Strahlen n und $n+dn$ noch eben zusammen, so wird $dr_2 = o$, und man hat:

$$dn = \frac{\cos i_1 \cos i_2}{\sin \varphi}\, di_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (94)$$

Es wird also dn desto kleiner, d. h. die Schärfe des Spektrums desto gröfser, je kleiner die scheinbare Breite des Strahlenkomplexes, und je gröfser der brechende Winkel des Prismas ist. Da wir im Minimum der Deviation bleiben sollen, so kann über i_1, i_2 nicht frei verfügt werden. Um di_1 zu verkleinern, führt man die Strahlen durch einen engen Spalt, dessen Gesichtswinkel (di_1) vom Prisma aus noch dadurch verkleinert werden kann, dafs man ihn in unendliche Entfernung, d. h. in den Fokus einer Kollimatorlinse stellt.

Die hingeschriebene Differentialgleichung ergiebt auch die Gröfse des primatischen Bildes; sowie di_1 als Unterschied der Einfallswinkel gleich brechbarer Strahlen als Breite des Spaltes aufgefafst werden kann, so kann dr_2, der Unterschied der Austrittswinkel der Strahlen gleicher Brechbarkeit n, als Breite des prismatischen Bildes betrachtet werden. Setzt man also $dn = 0$, so kommt aus der Gleichung (93a):

$$dr_2 = -\frac{\cos i_1 \cos i_2}{\cos r_1 \cos r_2}\, di_1$$

wonach für das Minimum der Deviation die Breite des Spaltes mit der Breite des Spaltbildes zusammenfällt.

Die Helligkeit einer Spektralregion wird um so geringer, je mehr dieselbe dispergiert wurde. Die Gröfse derselben läfst sich durch das Verhältnis $\frac{di_1}{dr_2}$ messen. Ist also h die Helligkeit des auffallenden (homogenen) Strahlenbündels, h' die des entsprechenden Spektralteiles, so ist

$$h' = h\mu \cdot \frac{di_1}{dr_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (95)$$

wo μ eine Gröfse, welche von der Absorption und Reflexion des Instrumentes abhängt. Durch Substitution des in (93) für $\frac{di_1}{dr_3}$ gefundenen Wertes hat man:

$$h' = h\mu \frac{\cos r_1 \cos r_2}{\cos i_1 \cos i_2}$$

Da zur Intensität einer Spektralregion der Wellenlänge λ jedoch die Strahlen der Wellenlänge λ und $\lambda + d\lambda$ beitragen, so hat man als Helligkeit der Stelle λ

$$H = h\, d\lambda = h \frac{d\lambda}{dn} dn \tag{96}$$

wenn — was wohl genügend genau ist — vorausgesetzt wird, dafs die Helligkeit unendlich benachbarter Strahlen gleich ist. Substituiert man in diese Gleichung die für h und dn gefundenen Werte, so kommt

$$H = h\mu \frac{\cos r_1 \cos r}{\sin \varphi} \frac{d\lambda}{dn} di_1 \tag{97}$$

Versteht man unter $\frac{dr}{d\lambda} = l$ die scheinbare Länge der betrachteten Spektralregion, so läfst sich diese Gröfse auf folgende Weise einführen:

$$\frac{dr}{dn} = \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dn} = l \frac{d\lambda}{dn} \qquad \frac{dr}{dn} = \frac{dr}{di_1} \frac{di_1}{dn} \tag{98}$$

oder

$$\frac{dr}{dn} = \frac{\sin \varphi}{\cos r_1 \cos r} \tag{99}$$

während aus der ersteren Gleichung

$$\frac{d\lambda}{dn} = \frac{1}{l} \frac{\sin \varphi}{\cos r_1 \cos r} \tag{100}$$

folgt. Dies in Gleichung (97) eingesetzt, ergiebt

$$H = \mu \frac{h}{l} di_1 \tag{101}$$

Die Helligkeit des Spektrums ist also proportional der eigentümlichen Helligkeit des betreffenden homogenen Lichtes und der Spaltöffnung, invers proportional der Länge des Spektrums. In gegebenen Fällen mufs also stets zu beurteilen sein, wie die Dispersion und Spaltbreite zu regeln sei, um bei möglichst grofser Helligkeit genügende Schärfe zu erzielen.

d) In vielen Fällen wird das gewöhnliche Spektroskop, als winkelsichtiges Instrument unbequem, und man benutzt dann, allerdings auf Kosten der Genauigkeit, geradsichtige Spektroskope (à vision directe). Die Darstellbarkeit derselben beruht auf dem Umstande, dafs zwischen Ablenkung und Dispersion verschiedener Medien keine einfache Gesetzmäfsigkeit vorhanden ist. Es gelingt also wohl, durch Verbindung mehrerer Prismen die Ablenkung für irgend einen mittleren Strahl aufzuheben, während die Differenz der Dispersionen noch merklich bleibt. Da die Berechnung eines solchen Systems meist Sache des Optikers ist, sich übrigens leicht aus den Grundformeln des Prismas entwickeln läfst, so genügt hier ein blofser Hinweis auf diesen Umstand. Die Wellenlängen werden auch in diesem Apparate am besten auf graphischem Wege abgeleitet.

Recht beträchtliche Fehler können durch Änderung der Temperatur in die Messungen eintreten. Die Wirkung einer Temperaturänderung macht sich erstlich in Dispersionsänderungen des Prismas (oder Gitters) bemerkbar, zweitens werden davon aber auch die Mikrometervorrichtungen und Metallbestandteile affiziert. Doch gelingt es stets, diese zu eliminieren, indem man deren Wirkung gleichsetzt einem Ausdrucke von der Form

$$\lambda = \lambda_0 + a(t - t_0) + b(t - t_0)^2$$

wobei t die Temperatur, λ_0 die bei der Ausgangstemperatur t_0 beobachtete Wellenlänge bezeichnet. Nur in seltenen Fällen (bei sehr starker Dispersion und gleichzeitiger leichter Konstruktion des Spektroskopes) wird es nötig Glieder mit t^2 mitzunehmen.

Die Lage der Linie soll nur bei unendlich engem Spalte gemessen werden. Da sich dies im Allgemeinen nicht bewerkstelligen läfst, so mufs eine Korrektion der Wellenlänge beigefügt werden, die etwa die Form besitzt:

$$\lambda = \lambda_0 + \alpha\beta$$

wenn β die Spaltbreite in irgend einem Mafse ausgedrückt, bezeichnet. Es ist vorteilhaft, wenn die Spaltöffnung unsymmetrisch, d. h. der eine Spaltbacken fest ist.

Benutzt man das Spektroskop für Untersuchungen der Himmelskörper, so kommt die optische Axe desselben in die verschiedensten Lagen zum Horizonte, wodurch eine Durchbiegung zu Stande kommt. Diese läfst sich in zwei Komponenten zerlegen, deren eine parallel den Fraunhoferschen Linien wirkende aufser acht gelassen werden kann, die andere, der Längsrichtung des Spektrums entsprechende dagegen mit vollem Betrage in die Messungen eingeht. Bedeutet h den Winkel, den z. B. die optische Axe eines geradsichtigen Spektroskops mit dem Horizonte bildet (Höhe des Gestirns), k den Winkel der Längsrichtung des Spektrums mit dieser Ebene, so wird die Durchbiegung eine Korrektion von der Form

$$\varDelta\lambda = a \cos h \sin k$$

hervorbringen. Ist das Spektroskop winkelsichtig, so wäre eine Durchbiegung des Kollimatorrohrs und des Fernrohrs gleicherweise zu beachten, und die Korrektion erhielte die etwas kompliziertere Form

$$\varDelta\lambda = a \cos h + b \cos h \sin k.$$

Doch ist es stets sicherer, und durch mögliche Nullpunktsänderungen des Mikrometers ebenfalls stets geboten, die Korrektion in jedem einzelnen Falle zu bestimmen, indem man — was äufserst leicht und einfach geschieht — die Natriumlinie in das Spektrum hineinprojiziert, und deren Wellenlänge bestimmt.

e) Alle bisherigen Untersuchungen schienen von einer, der brechenden Kante des Primas parallelen Dimension des auffallenden Strahlenbüschels unabhängig zu sein. Dies ist nicht der Fall, denn der Hauptschnitt des Prismas, die Ebene, welche durch den auffallenden und austretenden Strahl gelegt werden kann, erhält Strahlen auch von solchen Punkten, welche aufserhalb dieser Ebene liegen, wodurch, wie sich zeigen läfst, eine Krümmung des Spaltbildes entsteht, so dafs die Konvexität der brechenden Kante des Prismas zugekehrt ist. Dieser Krümmung, obwohl praktisch von keiner Bedeutung, mögen hier einige Betrachtungen gewidmet werden, da die diesbezüglichen Gleichungen eine sehr elegante Anwendung des von Helmholtz modifizierten Brechungsgesetzes demonstrieren.

Wählt man die brechenden Flächen des Prismas zu den Koordinatenebenen x, y und ξ, η, welche einen gemeinschaftlichen Anfangspunkt und die brechende Kante zur gemeinschaftlichen $z = \zeta$ Axe haben. Geht nun ein Lichtstrahl von dem Punkte a, b, c des ersten Koordinatensystemes aus, so möge er in o, y, z das Prisma treffen, in o, η, ζ dasselbe verlassen, und nach α, β, γ abgelenkt werden. Bezeichnet nun ψ die optische Länge des Strahles, so mufs sein:

$$\psi = l_0 + nl_1 + l_2$$

wenn n der Brechungsindex des Prismas, l_0, l_1, l_2 die Längen des Strahles vor, in und nach dem Prisma bedeuten, also die Gröfsen

$$l_0^2 = a^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2$$
$$l_1^2 = y^2 + \eta^2 - 2y\eta\cos\varphi + (z-\zeta)^2$$
$$l_2^2 = \alpha^2 + (\beta-\eta)^2 + (\gamma-\zeta)^2$$

darstellen dabei ist φ der brechende Winkel Die schon früher abgeleiteten Eigenschaften der Prismen ergeben sich auch aus den Minimumsbedingungen

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\eta} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\zeta} = 0$$

Wir verschieben nun die beiden Koordinatensysteme längs ihrer $z=\zeta$ Axe so, daſs $c = 0$ wird, und bezeichnen mit x_1, y_1, z_1 die laufenden Koordinaten der Strahlen Da die ersteren durch den Punkt a, b 0 und $0, y, z$ die letzteren durch 0 y z gehen, so hat man unter Zugrundelegung desselben Koordinatensystems die Gleichungen

$$y_1 - b = \frac{y-b}{z} z_1 \qquad x_1 - a = \frac{a}{-z} z_1$$
$$y_1 - y = p(z_1 - z) \qquad x_1 = q(z_1 - z)$$

Die Längen der Strahlen werden, da von der Brechung nach dem Prisma vorläufig abgesehen wird

$$l_0^2 = a^2 + (b-y)^2 + z^2, \quad l_1^2 = x_1^2 + (y_1-y)^2 + (z_1-z)^2$$
$$\psi = l_0 + nl_1$$

und mithin die Gleichungen des Brechungsgesetzes

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0 = \frac{z}{l_0} - n\frac{z_1-z}{l_1}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 = \frac{y-b}{l_0} - n\frac{y_1-y}{l_1}$$

aus welchen Gleichungen sich schon die Unbekannten p und q berechnen lassen Substituiert man die Werte von l_0, l_1 so kommt

$$\frac{z}{\sqrt{a^2+(b-y)^2+z^2}} = n\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$
$$\frac{y-b}{\sqrt{a^2+(b-y)^2+z^2}} = n\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

Nun ist aber $\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ der Sinus des Winkels, den der gebrochene Strahl mit der Ebene y, z bildet, bezeichnet man ihn mit ω, so ist

$$\sin\omega = \frac{1}{n}\,\frac{y-b}{\sqrt{a^2+(b-y)^2+z^2}}$$

und man erhält somit unter sonst gleich bleibenden Umständen ein mit wachsendem z abnehmendes ω Besitzen also die Strahlen längs der brechenden Kanten eine Dimension, so schneidet deren Fläche die Brechungsfläche in einer Kurve, und wendet ihre Konvexität der brechenden Kante zu Um den Satz nicht für eine zweite Brechung ausdehnen zu müssen, kann man sich jetzt einfallende und austretende Strahlen vertauscht denken, und an Stelle des Lichtpunktes das Auge setzen Dieses sieht sodann die die gekrümmte Fläche bildenden Strahlen von als einer Geraden herrührend mithin das Bild einer Geraden in Form einer Kurve

f) Wir wenden uns nun noch zu einigen speziellen Arten von Spektroskopen, immer in dem allgemeinen Sinne, worunter wir alle zur Trennung des Strahlenkomplexes dienenden Instrumente verstehen Hierher gehört das Spektroskop von P Braun[1] zur

[1] Astr Nachrichten 1899

Erzeugung von homogenem Lichte bestimmt vorgelegter Wellenlänge und die farbigen (absorbierenden) Media, die auch praktisch häufig benutzt werden.

Der erste Apparat beruht auf der totalen Refraktion. Soll homogenes Licht von der Wellanlänge λ_1 bis λ_2, Brechungsindex n_1 bis n_2 hervorgebracht werden, so läfst man einen Strahlenkomplex auf ein Prisma unter dem Grenzwinkel $\sin\beta = \frac{1}{n_1}$ fallen. Dann werden alle Strahlen von der längsten Welle bis zu λ_1 in die Luft gebrochen, von λ_1 ab bis zu den kürzesten Wellen dagegen total reflektiert. Diese Strahlen fängt man in einem zweiten Prisma auf, welches für den Grenzwinkel $\sin\beta = \frac{1}{n_2}$ geschliffen ist. Alle Strahlen von λ_1 bis λ_2 werden dann in die Luft gebrochen, und von λ_2 ab bis zu den kürzesten Wellen wieder total reflektiert. Ist der Unterschied $\lambda_2 - \lambda_1$ genügend klein, so erhält man das Bild der Lichtquelle iu homogenem Lichte, was bei einem kontinuierlichen Spektrum mit dem Spektroskope nicht zu erreichen wäre, in manchen Fällen jedoch erwünscht sein könnte.

Die farbigen Medien, deren Wichtigkeit erst bei der Intensitätsbestimmung des ungesonderten Strahlenkomplexes hervortreten wird, sind meist so gewählt, dafs sie durch zahlreiche breite Absorptionsbande, mehrere Teile des kontinuierlichen Spektrums auslöschen, und die übrigen wieder zu einer neuen Strahlung vereint ins Auge führen, die dann eine von der Natur des Mediums abhängige Farbe besitzt. Besitzt man eine gehörige Zahl solcher Medien, so kann man beliebig homogene Farben darstellen, und ihre Aufeinanderfolge in vielen Fällen als bequemes Spektroskop benutzen. Ein Stück Kobaltglas z. B. läfst die Flammenreaktionen von Kalium und Natrium ebenso leicht unterscheiden, wie das Spektroskop selbst.

B. Theorie der kolorimetrischen Messungen.

Da die Gleichung des ungetrennten Strahlenkomplexes zwei Unbekannte enthält, die Totalintensität und die Wellenlänge des Energiemaximums, so können nur zweierlei Arten von Beobachtungen zur vollen Kenntnis desselben führen. Da nun aber μ — wie wir früher sahen — gerade die Mischfarbe einer Lichtquelle bestimmt, so liegt es nahe, aus Farbenbestimmungen μ selbst herzuleiten. In diesem Sinne ist das Kolorimeter mit dem Spektroskope verwandt, indem dieses die Wellenlänge, jenes eine von der mittleren oder vorherrschenden Wellenlänge abhängige Gröfse der Beobachtung darbietet. Die Bestimmung des μ kann auch durch zwei Intensitätsbestimmungen selbst erfolgen, wenn man in der zweiten Beobachtung durch Einschalten irgend eines absorbierenden Mediums die Grenzen des bestimmten Integrales für die Intensität abändert. Diese Methoden gehören jedoch in das Gebiet der Spektralphotometrie und können demnach auch erst später behandelt werden.

a) Farbenbestimmungen beruhen entweder auf gewöhnlicher Schätzung, oder auf Messungen. Im ersteren Falle ist das Vergleichsobjekt meist noch dem Gedächtnis entnommen, wie bei der Schmidtschen Farbenskale der Sterne. Sind einige Sterne von der Farbe 1, 2.. spektralphotometrisch bestimmt, also ihr μ_1, μ_2.. bekannt, und bezeichnet man mit Farbe wieder die Funktion $F(\mu)$ (378. III), so hat man, wenn z. B. die Farbe des zu bestimmenden Objektes zwischen r und $r+1$ der Skale fällt:

$$F(\mu_{r+1}) > F(\mu) > F(\mu_r)$$

wonach μ, so genau es die Schätzung erlaubt, durch Interpolation gefunden werden kann.

Die eigentlichen Messungen, zu deren Anstellung zuerst Zöllner ein Instrument sein Kolorimeter, erdachte, beruhen auf dem Prinzipe der cirkularen Polarisation. Das Licht einer Vergleichslampe wird durch ein Nicolsches Prisma linear polarisiert und fällt danach auf eine zur Axe senkrecht geschliffene Quarzplatte, in der es cirkular polarisiert wird. Von hier aus geht der Strahl in ein zweites Nicol, welches als Analyseur dient, und mit einem dritten Nicol (zum beliebigen Abschwächen des Lichtes) das Photometersystem bildet. Das durch cirkulare Polarisation in der Farbe dicker Krystallplatten erscheinende Licht wird direkt neben dem Lichte des Sternes verglichen. Der Winkel der beiden erstgenannten Nicols ω wird am Kolorimeterkreise abgelesen, und gilt als Mafs der Farbe.

Ein beliebiger homogener Strahl der Lichtquelle hat nach seinem Durchgange durch das erste Prisma die Gleichung

$$s = r \sin 2\pi \frac{t}{T} \qquad (102)$$

Beim senkrechten Durchgange durch die Quarzplatte teilt sich dieser lineare Strahl in zwei cirkular polarisierte. Um dies darzustellen, zerlegen wir ihn zunächst in zwei aufeinander senkrechte Schwingungen, deren Richtungen mit s die respektiven Winkel φ und $90^0 - \varphi$ einschliefsen. Die Gleichung der beiden Strahlen ist dann

$$y = r \sin \varphi \sin 2\pi \frac{t}{T}, \quad z = r \cos \varphi \sin 2\pi \frac{t}{T} \qquad (103)$$

die durch wiederholte Zerlegung folgende Gestalt annehmen

$$\left.\begin{aligned} y = y_1 + y_2 &= u \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + n\right) + u \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - n\right) \\ z = z_1 + z_2 &= v \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + n\right) + v \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - n\right) \end{aligned}\right\} \qquad (104)$$

wobei man unter Berücksichtigung von (103) für die Bestimmung von u und v erhält

$$\left.\begin{aligned} 2u \cos 2\pi n &= r \sin \varphi \\ 2v \cos 2\pi n &= r \cos \varphi \end{aligned}\right\} \qquad (105)$$

Damit erhält man nun aus (104) das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{r}{2} \frac{\sin \varphi}{\cos 2\pi n} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + n\right) & y_2 &= \frac{r}{2} \frac{\sin \varphi}{\cos 2\pi n} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - n\right) \\ z_1 &= \frac{r}{2} \frac{\cos \varphi}{\cos 2\pi n} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + n\right) & z_2 &= \frac{r}{2} \frac{\cos \varphi}{\cos 2n\pi} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - n\right) \end{aligned}\right\} \qquad (106)$$

Wählt man aus den vier Strahlen je zwei aus, deren Phase und Amplitude verschieden ist, so ergeben diese zwei elliptisch polarisierte Strahlen (z_1, y_2) und (z_2, y_1). Haben nämlich zwei Strahlen die Gleichungen

$$x = r_1 \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad \text{und} \quad y = r_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + m\right)$$

so wird die Gleichung der Bahnellipse

$$y^2 - 2 \frac{r_2}{r_1} xy \cos 2m\pi + \frac{r_2^2}{r_1^2} x^2 = r_2^2 \sin^2 2m\pi$$

welche für den Phasenunterschied

$$m = \tfrac{1}{4}(2\nu + 1), \quad m = \tfrac{1}{4} \ldots$$

folgende einfachere Gestalt annimmt

$$\frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_2^2} = 1$$

wo nun entsprechend der Fresnelschen Theorie die Schwingungsrichtungen mit den Ellipsenaxen koinzidieren. Setzt man in Gleichung (106) entsprechend dieser Ableitung

$$2n = \tfrac{1}{4}$$

so kommt:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{r}{2}\sqrt{2}\sin\varphi\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}+\tfrac{1}{8}\right) & y_2 &= \frac{r}{2}\sqrt{2}\sin\varphi\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\tfrac{1}{8}\right) \\ z_1 &= \frac{r}{2}\sqrt{2}\cos\varphi\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}+\tfrac{1}{8}\right) & z_2 &= \frac{r}{2}\sqrt{2}\cos\varphi\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\tfrac{1}{8}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (107)$$

und die elliptische Polarisation geht in cirkuläre über, wenn die beiden Amplituden gleich werden, was für

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (108)$$

eintritt. Die Komponenten der beiden cirkulären Strahlen sind also:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{r}{2}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}+\tfrac{1}{4}\right) = \frac{r}{2}\cos 2\pi\frac{t}{T}, & z_1 &= \frac{r}{2}\sin 2\pi\frac{t}{T} \\ y_2 &= \frac{r}{2}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\tfrac{1}{4}\right) = -\frac{r}{2}\cos 2\pi\frac{t}{T}, & z_2 &= \frac{r}{2}\sin 2\pi\frac{t}{T} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (109)$$

Durchdringen endlich die Strahlen die Quarzplatte von der Dicke $\varDelta$ und erleidet der zweite Strahl gegen den ersten eine Verspätung D, so werden die Schwingungsgleichungen nach dem Verlassen des Krystalls:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \frac{r}{2}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\varDelta}{\lambda}\right), & y_2 &= -\frac{r}{2}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\varDelta}{\lambda}\right) \\ z_2 &= \frac{r}{2}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\varDelta}{\lambda}-D\right) & y_1 &= \frac{r}{2}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\varDelta}{\lambda}-D\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (110)$$

Das zweite Nicolprisma vereinigt diese Schwingungen nun wieder in eine Ebene, die mit der Ebene des einfallenden Strahles den Kolorimeterwinkel ω bilde. Die auf die erste Ebene senkrechte Schwingungskomponente ist also Null, während die in die Ebene fallende das Licht der Vergleichslichtquelle enthält. Dies giebt die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= z_1\sin\omega + z_2\sin\omega - y_2\cos\omega - y_1\cos\omega \\ S &= z_1\cos\omega + z_2\cos\omega + y_1\sin\omega + y_2\sin\omega \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (111)$$

Durch Einsetzen der Werte aus (110) in die erstere Gleichung erhält man:

$$\begin{aligned} &\sin\omega\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\varDelta}{\lambda}\right) + \sin\omega\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\varDelta}{\lambda}-D\right) \\ &\qquad + \cos\omega\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\varDelta}{\lambda}\right) - \cos\omega\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\varDelta}{\lambda}-D\right) = 0 \quad . \; . \; . \quad (112a) \end{aligned}$$

die nach einigen leichten Reduktionen in die folgende übergeht:

$$\operatorname{tang}\omega = -\operatorname{tang}\pi D \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (112b)$$

Aus Beobachtungen schliefst dann Biot, dafs

$$D = h\frac{\varDelta}{\lambda} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (113)$$

wo h irgend eine Konstante bedeutet.

b) Die zweite der Gleichungen (111) — und hauptsächlich diese interessiert uns — giebt die Intensität des zur Vergleichung dienenden Lichtes. Man erhält wie früher durch Substitution der Schwingungswerte:

$$S = \frac{r}{2}\cos\omega\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\Delta}{\lambda}\right) + \frac{r}{2}\cos\omega\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\Delta}{\lambda} - D\right)$$
$$- \frac{r}{2}\sin\omega\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\Delta}{\lambda}\right) + \frac{r}{2}\sin\omega\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\Delta}{\lambda} - D\right) \qquad (114a)$$

was sich auch so schreiben läfst

$$S = \frac{r}{2}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\Delta}{\lambda}\right)[\cos\omega + \cos\omega\cos 2\pi D + \sin\omega\sin 2\pi D]$$
$$+ \frac{r}{2}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\Delta}{\lambda}\right)[-\sin\omega - \cos\omega\sin 2\pi D + \sin\omega\cos 2\pi D] \qquad (114b)$$

oder endlich

$$S = \frac{r}{2}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\Delta}{\lambda}\right)[\cos\omega + \cos(\omega - 2\pi D)]$$
$$+ \frac{r}{2}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\Delta}{\lambda}\right)[-\sin\omega + \sin(\omega - 2\pi D)] \qquad (114c)$$

Hiermit wird die Intensität des Strahles

$$L = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{dS}{dt}\right)^2 dt = \frac{r^2\pi^2}{T}[1 + \cos 2(\omega - \pi D)] = \frac{2r^2\pi^2}{T}\cos^2(\omega - \pi D) \qquad (115)$$

Da von Energieschwächungen abgesehen die Intensität der Vergleichslichtquelle hinter dem ersten Nicol für einen ihrer homogenen Strahlen durch

$$L_0 = \frac{2\pi^2 r^2}{T}$$

vor dem ersten Nicol, wo das Licht noch nicht polarisiert ist, also durch

$$L_0 = \frac{4\pi^2 r^2}{T} \qquad (116)$$

gegeben ist, so hat man die Beziehung

$$I = L_0 \cos^2\left(\omega - \frac{l}{\lambda}\right) \qquad (117)$$

wo mit Hinweis auf (113)

$$l = \pi h \Delta \qquad (118)$$

eine nur von der Dicke der Krystallplatte abhängige Konstante ist. In den Zöllnerschen Kolorimetern soll $\Delta = 5$ mm gewählt werden, damit die Ablesungen verschiedener Instrumente unter einander vergleichbar seien. Bei unserer Reduktionsart ist eine solche Norm natürlich nicht notwendig.

Die Gleichung (117) liefert ein bequemes Mittel zur Bestimmung der Kolorimeterkonstante. Betrachtet man nämlich das Spektrum des durch das Kolorimeter gegangenen Strahles, so mufs dieses für jene Wellenlänge einen dunklen Streifen enthalten, für welche

$$\omega - \frac{l}{\lambda} = \frac{\pi}{2} \text{ oder } 3\frac{\pi}{2} \qquad (119)$$

wird. Aus der Wellenlänge des Streifens und dem Stande des Kolorimeterkreises erhält man so leicht die Konstante l, welche mit der Angabe der Dicke Δ der Quarzplatte das Kolorimetersystem vollständig charakterisiert.

Die Messungen beruhen nun darauf, dafs man bei gleicher Intensität der künstlichen mit der zu bestimmenden Lichtquelle, die durch Drehung des dritten Nikols um den Winkel v hergestellt wird, die Farben der beiden durch Drehung des Kolorimeterkreises einander möglichst gleich macht. Steht dann der Kolorimeterkreis auf ω, so

besteht innerhalb der Grenzen des sichtbaren Spektrums, also etwa der Linien H und A des Sonnenspektrums die Gleichung:

$$\int_H^A L\, s\, d\lambda = 2\int_H^A L_0\, s \cos^2 v \,.\cos^2\left(\omega - \frac{k}{\lambda}\right) d\lambda \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (120)$$

wenn s die Empfindlichkeit des Auges bedeutet. Setzt man nun an die Stelle von L und L_0 die Spektralgleichung, wobei sich $(\mu', \mathcal{A}')$ auf die Vergleichslichtquelle beziehen mag, so hat man:

$$\frac{4}{\pi}\mu \mathcal{A}\int_H^A s \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2}\, d\lambda = 2\cdot\frac{4}{\pi}\,\mu'\mathcal{A}'\int_H^A s\frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu'^2)^2}\cos^2 v \cos^2\left(\omega - \frac{k}{\lambda}\right) d\lambda \quad . \quad (121)$$

Da nun Farbe und Intensität von einander unabhängige Gröfsen sind, d. h. die Einwirkung eines spektral ausgedehnten Strahlenkomplexes auf das Auge stets zugleich qualitativer und quantitativer Art ist, so zerfällt die vorstehende Gleichung in die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}' \cos^2 v \\ \frac{4}{\pi}\mu\int_H^A s\frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2}\, d\lambda &= 2\,\frac{4}{\pi}\,\mu'\int_H^A s\frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu'^2)^2}\cos^2\left(\omega - \frac{k}{\lambda}\right) d\lambda \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (122)$$

Die Gröfse s können wir angeben (siehe 18, p. 267), doch genügt es hier zu wissen, dafs sie eine stetige Funktion der Wellenlänge ist, die zwischen H und A nur ein Maximum besitzt. Man kann daher einen Mittelwert der Gröfse s, etwa s_0 aus dem Integrale herausheben, der beiderseits wegen Gleichheit der Grenzen und der Integralwerte (wenn auch nicht des vollen Verlaufs der unter dem Integralzeichen stehenden Funktion) bis auf einen unendlich kleinen Unterschied gleich sein wird, mithin weggehoben werden kann. Wir haben also nach früherer Bezeichnung die Gleichung:

$$F(\mu) = \frac{8}{\pi}\,\mu'\int_H^A \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu'^2)^2}\cos^2\left(\omega - \frac{k}{\lambda}\right) d\lambda \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (123)$$

Um nun das Integral rechter Hand, das kurz x genannt sein möge, auszuwerten, differenzieren wir es zweimal nach dem Parameter ω, der der geringen an den subjektiven Grenzen des Spektrums herschenden Intensität halber als von diesen unabhängig betrachtet werden darf, und erhalten so:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \omega^2} + 4x - 4\int_H^A \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu'^2)^2}\, d\lambda = 0$$

deren Lösung mit Rücksicht auf die Bedeutung von $F(\mu')$ ist:

$$x = F(\mu') + A\cos(2\omega + \alpha)$$

Es erübrigt nun mehr, in der Gleichung (123), aus welcher nun

$$F(\mu) = F(\mu') + A\cos(2\omega + \alpha) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (124)$$

geworden, die Integrationskonstanten A und α zu bestimmen. Beobachtet man eine mit der Vergleichslichtquelle identische Strahlung, so ist $\mu = \mu'$, und die entsprechende Kolorimeterablesung bei Gleichheit der Farbe ist ω_1; man hat dann

$$2\omega_1 + \alpha = \frac{\pi}{2}, \text{ oder } 3\,\frac{\pi}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (125)$$

Die zweite Konstante erhält man durch Vergleichung mit einer anderen Lichtquelle von bekanntem μ, oder auch aus dem Kolorimeterwinkel ω_0, welcher mit der benutzten Vergleichslampe das reinste Weifs giebt. Man hat also die vollständige Formel

$$F(\mu) = F(\mu^1) + \frac{F(\mu_0) - F(\mu^1)}{\sin 2(\omega_0 - \omega_1)} \sin 2(\omega - \omega_1) \qquad (126)$$

Dabei hängt $F(\mu_0)$ und $F(\mu^1)$, die beide durch einmalige spektralphotometrische Messungen bestimmt werden, allein von der Natur und Temperatur der zum Vergleich benutzten Flamme, ω_0 und ω_1 allein von der Lage (Drehung) und Beschaffenheit der Kolorimeterquarzplatte ab. Da sich weiter μ aus $F(\mu)$ bestimmen läfst, so kann man ein für allemal für dasselbe Instrument eine Tabelle der μ mit dem Argumente ω anlegen, und die Kolorimeterbeobachtungen direkt reduzieren.

Da die zu bestimmende Lichtquelle durch ein Fernrohr und meist durch die ganze Schichte der Atmosphäre beobachtet wird, so müssen daran noch Korrektionen vorgenommen werden, die bereits besprochen wurden.

Für das Zöllnersche Kolorimeter gilt die Formel

$$F(\mu) = 0.2145 + 0.02946 \sin 2(\omega - \omega_1), \quad \omega_1 = 198^0.76$$

welche aus drei Sternen des I. II. und III. Typus abgeleitet wurde.

C. Das Spektralphotometer

Unter diesem gewöhnlich sehr enggefafsten Namen mögen hier alle Instrumente mit inbegriffen werden, welche zur Energiebestimmung einer Strahlung dienen. Bei der schon längst erkannten Einheit der Ätherschwingungen genügt es natürlich irgend eine ihre Aufserungen messend darzustellen, wogegen gerade die Mehrheit derselben in gegebenen Fällen eine willkommene Wahl zuläfst. Diese Aufserungen sind hauptsächlich dreierlei Art: Chemismus, Wärmewirkung, physiologische Wirkung. Magnetische oder elektrische Wirkungen der Strahlung sind noch nicht sicher nachgewiesen.

α. *Chemische Energiemesser*

a) Auf eine lichtempfindliche Schichte von der Dicke h möge eine Strahlung von der Intensität L_0 und der Wellenlänge λ auffallen. Ist für die Schichteneinheit der Transmissionskoeffizient x, so erhält man als Intensität des die Schichte durchdrungenen Lichtes

$$L = L_0 x^h \qquad (127)$$

Man nennt nach Bunsen Extinktionskoeffizient des chemischen Mediums den reziproken Wert derjenigen Schichtendicke, welche die Intensität des durchgelassenen Lichtes auf $\frac{1}{10}$ der auffallenden herabdrückt. Es ist also

$$\tfrac{1}{10} L_0 = L_0 x^{\frac{1}{\alpha}}, \quad x = 10^{-\alpha} \qquad (128)$$

womit man erhält

$$L = L_0\, 10^{-\alpha h} \qquad (129)$$

oder

$$L = L_0 e^{-m\alpha h}, \quad m = \text{lognat}\, 10 \qquad (130)$$

gesetzt wird.

Um ein Mafs der Intensität zu erhalten, welche bei chemischen Veränderungen verbraucht wird, — und diesen Verbrauch deckt gerade die Strahlung — nehmen wir an, dafs die chemische Wirkung der Intensität der Strahlung proportional sei, was

jedenfalls sehr angenähert wahr sein wird. Da in einer unendlich dünnen Schichte dh die Lichtintensität merklich dieselbe ist, so erhält man für die Gröfse $d\omega$ der stattgefundenen Wirkung:

$$d\omega = kL_0 e^{-m\alpha h} dh \quad \ldots \ldots \ldots \quad (131)$$

und demnach für die chemische Wirkung innerhalb der ganzen Schichte:

$$\omega = kL_0 \frac{1}{m\alpha}(1 - e^{-m\alpha h}) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (132)$$

Setzt man noch allgemeiner

$$k = \varphi(t) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (133)$$

wo $\varphi(t)$ eine Funktion der Expositionszeit ist — die meist einfach der Zeit proportional betrachtet werden darf, so erhält man für die Intensität des auffallenden Lichtes:

$$L_0 = \frac{m\alpha}{\varphi(t)} \omega (1 - e^{-m\alpha h})^{-1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (134)$$

natürlich in einem auf ω Bezug habenden Mafse ausgedrückt.

Da sich der Wert des Transmissionskoeffizienten zwischen 0 und $1 - \frac{\mu^4}{m^4}$ bewegt, und $\alpha = -\lg x$ ist, so ist der Faktor $\frac{1}{\alpha m}(1 - e^{-\alpha m h})$ stets zwischen 0 und $-\frac{1}{m \lg\left(1 - \frac{\mu^4}{m^4}\right)}\left[1 - e^{mh \lg\left(1 - \frac{\mu^4}{m^4}\right)}\right]$ gelegen, und erreicht für $e^{-m\alpha h} = \frac{1}{1 + m\alpha h}$ ein Maximum. Wenn auch die formelle Verschiedenheit dieser Formel von der Gleichung der Empfindlichkeit keine allzu grofse ist, so ist doch darin ein wesentlicher Unterschied begründet, dafs die vorliegende Ableitung das Absorptionsgesetz benutzt, welches nicht mehr giltig ist, wenn während der Lichteinwirkung chemische Veränderungen vor sich gehen.

Indem wir eigentliche Photometerapparate, welche auf diesem Prinzipe beruhen, übergehen (ein solches ist z. B. von Prof. Eder konstruiert; es besteht aus der Mischung zweier Lösungen, nämlich zwei Volumteile einer Lösung von Ammonium Oxalat in 25 Gewichtsteilen Wasser, und ein Volumteil einer Lösung von Quecksilberchlorid in 20 Gewichtsteilen Wasser. Chemisch wirksames Licht erzeugt einen Niederschlag von Quecksilberchlorid, dessen Gewicht per Flächen- und Zeiteinheit als Mafs des auffallenden Lichtes dienen kann), wenden wir uns zugleich zu der Theorie der photographischen Platten.

Die Empfindlichkeit derselben wird am besten — immer aber, falls gefärbte Platten vorliegen, durch eine Fouriersche Reihe ausgedrückt. Die ersten drei bis vier Anfangsglieder werden wohl immer ausreichend sein. Um die Konstanten zu bestimmen, photographiere man ein kontinuierliches Spektrum von bekanntem $\varDelta$ und μ, und bilde die Quotienten $s = \frac{L}{I}$, indem man I entweder mit einer vorgelegten (willkürlichen) Intensitätsskale bestimmt, oder was stets genauer ist, die relative Absorption der veränderten Schichte gegen die nicht veränderte durch Beobachtungen ermittelt. Freilich setzt das alles voraus, dafs das Hervorrufen und Fixieren des Bildes stets auf genau dieselbe Art erfolge. Diese Voraussetzung, die sich in der Anwendung mit vollem Rechte nie machen läfst, vermindert die Anwendbarkeit der Photographie bedeutend für Zwecke der spektralphotometrischen Messungen.

Wir gehen nun zu der Behandlung des ungesonderten Strahlenkomplexes über, der in der Photographie zu weit interessanteren Fragen führt. Wir wollen zunächst

ganz allgemein beweisen, daſs eine photographische Aufnahme mit gleichzeitiger Intensitätsbestimmung nach anderen Methoden das Spektrum des glühenden Körpers vollständig darstellt.[1] Um kurz reden zu können, nennen wir zwei Beobachtungsmethoden verschieden, wenn sie einen Strahlenkomplex einer Lichtquelle zwischen verschiedenen Grenzen der Wellenlänge umfassend zum Bewuſstsein bringen. Dann kann man ganz allgemein den folgenden Satz aussprechen:

Zu zwei vorgelegten Beobachtungsmethoden läſst sich mindestens ein Körper kontinuierlichen Spektrums konstruieren, der nach beiden Methoden beliebig vorgelegte Werte der Intensität annimmt. Oder umgekehrt:

Zu jedem Körper kontinuierlichen Spektrums lassen sich mindestens zwei Beobachtungsmethoden angeben, für welche innerhalb zweier endlicher Grenzen die Intensität einen beliebig vorgelegten Wert annimmt.

Diesen Satz haben wir schon, wenn auch in anderer Weise abgeleitet, indem wir zeigten, daſs die Spektralgleichung ganz allgemein zwei nicht zugleich eliminierbare Parameter besitzt. Es sind also die Intensitäten, wenn $\varphi(\lambda)$ die Emissionsfunktion darstellt,

$$L_1 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varphi(\lambda)\,d\lambda \quad \text{und} \quad L' = \int_{\lambda'}^{\lambda''} \varphi(\lambda)\,d\lambda$$

verschiedene Werte, wenn λ_1, λ_2 und λ', λ'' verschieden sind. Und insofern die beiden Parameter der Funktion $\varphi(\lambda)$ noch unbestimmt sind, können sie aus zwei beliebig gegebenen L_1 und L' berechnet werden. Es kann also, selbst bei vollständig entwickeltem Spektrum der Fall eintreten, daſs L_1 z. B. für das Auge unter der Empfindungsschwelle bleibt, L' dagegen für die photographische Platte diese gerade überschritten hat, ein Fall, der auch wirklich für den Stern im Ringnebel der Lyra konstatiert ist.

Nach unserer Spektralgleichung hat man mit Rücksicht darauf, daſs ein subjektives Spektrum vorliegt,

$$L_1 = \frac{4}{\pi}\,\mu\Lambda\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} s_1 \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2}\,d\lambda \quad \text{und} \quad L' = \frac{4}{\pi}\,\mu\Lambda\int_{\lambda'}^{\lambda''} s' \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2}\,d\lambda$$

worin s_1 und s' die Empfindlichkeit der beiden Reagentien bedeutet, mit welchen die Intensität L_1 und L' beobachtet wurde. Sind L_1, L', λ_1, λ_2, λ', λ'', s_1, s' bekannt, so kann aus beiden Gleichungen Λ und μ berechnet werden.

Wie man sieht, ist diese Berechnung auch dann noch möglich, wenn man zwei photographische Aufnahmen besitzt, derart, daſs in beiden entweder die Grenzen des Spektrums oder die Empfindlichkeit, oder auch beide Gröſsen verschieden sind. Endlich kann aber auch dieselbe Platte verwendet werden, wenn man in den Strahlengang ein absorbierendes Medium einschaltet, am besten von der Art, welches zwischen den Wellenlängen λ_{I} und λ_{II}, λ_{III} und λ_{IV} ... $\lambda_{(n)}$ und $\lambda_{(n+1)}$ dunkle scharf begrenzte Absorptionsbanden besitzt, wodurch das zweite Integral die Form annimmt

$$L' = \frac{4}{\pi}\,\mu\Lambda\left\{\int_{\lambda'}^{\lambda''} s\,\frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2}\,d\lambda - \sum_{1}^{n+1} \frac{4}{\pi}\,\mu\Lambda\int_{\lambda_{(n)}}^{\lambda_{(n+1)}} s\,\frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2}\,d\lambda\right\}$$

also ebenfalls eine unabhängige Gleichung zur Bestimmung von μ und Λ liefert. Wir werden diese Methode noch später eingehender besprechen.

---

[1] v. Kövesligethy, Photogr. Korresp. 1888 und Monthly Notices vol. XLVIII. No.

b) Bei allen diesen Problemen wird man auf die Frage geführt, wie eine Platte oder überhaupt irgend ein spektralanalytisches Reagens zu behandeln sei, damit es die beste Wirkung liefere? Es kommt also darauf an, Grenzwerte der Funktion

$$\int_{\lambda}^{\lambda_2} s \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2} d\lambda$$

zu suchen, was immer möglich ist, da man sich erinnert, dafs s die Grenzen des Spektrums, die Wellenlänge des Empfindlichkeitsmaximums und noch eine Konstante enthält. Über diese Konstanten kann man analytisch beliebig verfügen; in der Anwendung entweder durch Benutzung von geeigneten Färbemitteln oder von absorbierenden Medien. Leider läfst sich die vorgelegte Funktion — wie wir schon hervorhoben — nicht allgemein behandeln, sondern nur, wenn s in eine Reihe entwickelt wird.[1]

Soviel sieht man aber auf den ersten Blick, dafs die Konstanten von s, welche die beste Wirkung hervorbringen, sämtlich Funktionen von μ sein werden. D. h. die Behandlung der Platte mufs stets nach dem aufzunehmenden Spektrum geregelt werden.

Zeichnet man die Kurve des objektiven Spektrums zwischen den Wellenlängen λ_1 und λ_2 und auf dieselbe Abscissenaxe mehrere Formen der Empfindlichkeitskurve, so wird man bei einiger Übung leicht erkennen, welche Form derselben die für das vorgelegte kontinuierliche Spektrum zweckdienlichste ist. Im allgemeinen wird man sagen dürfen, dafs die Wellenlängen des Intensitäts- und Empfindlichkeitsmaximums einander nahezu gleich sein müssen, um die beste Wirkung zu erzielen. So müfsten Platten für Aufnahmen der Sterne des I., II. und III. Typus resp. bestehen: für Sterne des ersten Typus ($\mu = 0{\cdot}45$) aus trockenem Bromsilber, für den II. Typus ($\mu = 0{\cdot}53$) gebadet mit Eosin, für den III. ($\mu = 0{\cdot}60$) gebadet mit Korallin.

Freilich wird in diesem Punkte die Theorie so verwickelt, dafs sie kaum zu übersichtlichen Resultaten führen wird. Andrerseits hat man auch das Baden der Platten nicht derart in der Hand, dafs man alle theoretisch geforderten Werte den Konstanten mitteilen kann, und daher scheint dieser Punkt wohl wie bisher auch fernerhin der Übung des Beobachters anheimgestellt zu bleiben.

β. *Optische Intensitätsmesser.*

Einen in Bezug auf Empfindlichkeit ganz ausgezeichneten Messapparat besitzen wir im menschlichen Auge. Wo die feinen thermoelektrischen Methoden eines so ausgezeichneten Forschers wie Huggins selbst bei den hellsten Fixsternen zu keinem oder doch nur sehr fraglichen Resultaten führten, da nimmt das Auge noch eine Fülle von Licht mit allen seinen Abstufungen wahr, und es ist somit natürlich, dafs dieser feine Apparat auf die vielfältigsten Weisen zu Messungen herangezogen wurde.

Die verschiedenen bestehenden Photometer (insofern sie eben optischer Natur sind) lassen sich auf zwei Grundprinzipien zurückführen: a) Vergleichung des gegebenen Lichtes mit einer angenommenen Normallichtquelle; b) durch Zurückführung der Intensität auf die Empfindungsschwelle der Retina.

a) Methode der Vergleichung.

Von den primitivsten Instrumenten dieser Art, dem Photometer von Lambrecht, Ritchie und Bunsen braucht wohl kaum gesprochen zu werden, und umso weniger,

[1] Des Verfassers neuere Studien in dieser Richtung in einem „Mémoire au comité de la carte photographique du Ciel. 1889. Juli.

als sie wenig geeignet sind, Vergleichungen von verschiedenen Spektralregionen zu gestatten, was hier zunächst gefordert wird. Für astrophysikalische Forschungen sind sie weder ihrer Form noch ihrem Prinzipe nach tauglich.

a) Wie bei der Behandlung des Spektroskops ersichtlich war, hängt die Intensität irgend einer Spektralregion wesentlich von der Öffnung der Spalte ab, der sie wenigstens innerhalb gewisser Grenzen einfach proportional ist. Auch über diese Grenzen läfst sich bereits Aufschlufs geben: sie dürfte die Wellenlängendistanz nicht überschreiten, innerhalb welcher benachbarte Farben merklich dieselbe (subjektive) Helligkeit besitzen.

Dieser Umstand führt zur Konstruktion des Vierordtschen Spektralphotometers, der von einem gewöhnlichen Spektroskope sich typisch nur durch die geteilte Spalte unterscheidet, deren jede Hälfte besonders mefsbar beweglich ist. Durch die eine Öffnung fällt das zu untersuchende, durch die andere das Normallicht, und nun werden beide Spalthälften soweit geöffnet, bis die zu vergleichende Spektralregion beider Lichtquellen gleich intensiv erscheint. Dann verhalten sich die Intensitäten wie die Spaltöffnungen. Sind die Lichtunterschiede sehr grofs, so kann man das intensivere durch absorbierende Medien von bekanntem Absorptionsvermögen abschwächen.

Homogenes Licht kann durch Öffnen der Spalte natürlich nicht intensiver gemacht werden, denn in der That beruht das Hellerwerden der einzelnen Spektralregionen beim Öffnen der Spalte darauf, dafs sich Nachbarteile des kontinuierlichen Spektrums auf die zu untersuchende Spektralregion superponieren, wodurch notwendig das Spektrum unrein wird.

b) Einen bequemeren und genaueren Apparat erhält man durch Anwendung des Prinzips der Polarisation, das Glahnsche Photometer. Ein doppeltbrechendes Prisma, dessen Hauptschnitt dem Spalte parallel steht, entwirft von diesem zwei Bilder, ein ordentliches und ein aufserordentliches, die vermöge der Konstruktion des Prismas übereinander stehen. Der Spalt ist einfach, jedoch in zwei Hälften geteilt, durch deren eine das zu vergleichende Licht, durch die andere das Normallicht dringt. Ein Prisma entwirft von den zwei Spaltbildern Spektra, welche durch ein Nicolsches Prisma und ein Fernrohr beobachtet werden. Ist der Hauptschnitt dieses Prismas mit dem des doppeltbrechenden parallel, so ist die Intensität des aufserordentlichen Spaltbildes gleich Null, bei einer um 90° verschiedenen Stellung des Nicols verschwindet dagegen das ordentliche. Mit Hilfe von Diaphragmen wird das aufserordentliche Bild der einen und das ordentliche der anderen Spalthälfte ausgeschlossen. Im Brennpunkte des Okulars befindet sich (wie auch beim Vierordtschen Apparate) ein verschiebbares und beliebig regulierbares Diaphragma, mit Hilfe dessen beliebige Spektralregionen der beiden sich berührenden Spektra herausgegriffen werden können.

Durch Drehung des Nicolschen Prismas kann nun die Intensität beider Spektralregionen derselben Wellenlänge einander gleich gemacht werden. Die Beziehung zwischen beiden Gröfsen ist eine recht einfache. Zerlegt man nämlich die Amplituden o und a des ordentlichen und aufserordentlichen Strahles in eine zum Hauptschnitte des Nicols parallele und senkrechte Komponente p und s, so treten offenbar nur die zum Hauptschnitte senkrechten hindurch, während die dazu parallelen völlig ausgelöscht werden. Versteht man unter φ den Winkel der Schwingungsebene des ordentlichen Strahles zum Hauptschnitte (dem Photometerwinkel), so gilt die Relation

$$s_o = o \sin\varphi, \quad s_a = a \cos\varphi \qquad (1[illegible])$$

Da die Wellenlängen beider Strahlen gleich sind, so erhält man als Verhältnis ihrer Intensitäten:

$$\frac{I}{I'} = \frac{o^2}{a^2} \cdot \mathrm{tg}^2\,\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (136)$$

oder da

$$\frac{o^2}{a^2} = \frac{I_0}{I_0'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (137)$$

das Verhältnis der ursprünglichen Intensitäten bedeutet, und der Methode der Vergleichung nach $I' = I$ gemacht wurde:

$$I_0' = I_0 \,\mathrm{tang}^2\,\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (138)$$

Das Verhältnis der Lichtintensität beider Quellen ist gleich dem Quadrate der Tangente des Drehungswinkels, bei welchem beide verglichene Spektralteile gleiche Intensität erhalten.

Meist wird in der Stellung des Nicolschen Prismas ein kleiner Fehler vorhanden sein, oft wird es auch nicht in die optische Axe des Systems fallen. Die Nullpunktstellung eliminiert man durch Messung in zwei aufeinanderfolgenden, die Axenstellung durch Messungen in allen vier Quadranten des Kreises. Das Mittel der Ablesungen ist der wahre Drehungswinkel φ. Ist das Instrument, besonders das Nicol stabil befestigt, so genügt es wohl, die Korrektion ein für allemal zu bestimmen.

c) Die Gröſse der Dispersion, oder der Fehler der Einstellung auf das Minimum der Deviation, Durchbiegung, Unreinheit des Spektrums usw. kommen durchaus nicht in Betracht, da es sich stets um die Vergleichung gleichwelliger Strahlen handelt. Als ganz besonders wichtig heben wir hervor, daſs durch die Vergleichungen auch die Empfindlichkeit des Auges vollständig eliminiert ist, da das Verhältnis von subjektiven Intensitäten derselben Wellenlängen gleich dem der objektiven ist.

Eine besondere Aufmerksamkeit muſs aber der Vergleichslichtquelle geschenkt werden, da dieselbe stets, wenn auch wenig, doch meſsbar veränderlich ist. Insofern man nicht die gewiſs konstanteste doch unbequeme Viollesche Platineinheit anwenden will, bleibt nichts anderes übrig, als die Messungen möglichst oft zu wiederholen, indem man abwechselnd von den langen zu den kurzen Wellen miſst, und dann den Gang umkehrt. Es liegt diesem Verfahren der Gedanke zu Grunde, daſs sich die Intensität der Lampe langsam proportional der Zeit ändere.

Als Nachteil der Vergleichungsmethode muſs hervorgehoben werden, daſs die Genauigkeit der Messungen für verschiedene Wellenlängen sehr verschieden ausfällt; insbesondere werden Messungen der Intensitäten kurzwelliger Strahlen stets mit sehr groſsen wahrscheinlichen Fehlern behaftet sein, was eine Benutzung der Resultate für Integrationen über das ganze Spektrum sehr erschwert.

Nach Dobrowolsky[1] können zwei anstoſsende Flächen noch als verschieden intensiv erkannt werden, wenn der Intensitätsunterschied beträgt: für Weiſs 1%, im günstigsten Falle 0.7—0.6;

für λ =	0.760	0.687	0.656	0.627	0.589	0.557	0.522	0.486	0.431	0.413	0.393
Intensitätsunterschied =	7.1	5.1	4.0	3.0	2.2	1.7	1.5	0.76	0.37	0.37	1.5

Prozente. Dieser Beobachter unterscheidet also Intensitäten kürzerer Wellen leichter, was ein Ausnahmefall sein dürfte.

d) Auf dem Prinzipe der Polarisation fuſsend, könnte man auch die Reflexionsspektralphotometer konstruieren. Schaltet man nämlich unter dem Polarisationswinkel einen Glasspiegel vom Brechungsindex n in den Strahlengang eines Spektroskops ein,

[1] Monatsber. d. k. preuſs. Akad. d. Wissensch. Berlin 1872, Februar.

so wird durch Reflexion irgend ein mittlerer Strahl vollkommen, die benachbarten Strahlen nahezu ganz polarisiert. Als Analyseur kann man ein seitlich angebrachtes Nicol oder einen zweiten Spiegel benutzen, der um den auffallenden Strahl meßbar drehbar ist. Da an beiden Grenzflächen des Glasspiegels Reflexion eintritt, so erhält man zwei Bilder der Spalte, von denen das von der Rückwand reflektierte das schwächere ist. Dieser Umstand (der auch im Zöllnerschen Kolorimeter benutzt ist) trägt wesentlich zur Erhöhung der Genauigkeit der Messungen bei.

Es sei nun a die Amplitude des auffallenden Lichtes, α_1, β_1 der Einfalls- und Brechungswinkel des auffallenden Strahles, ε_1 der Fehler der Spiegelaufstellung (Abweichung vom Polarisationswinkel), wenn er auf einen andern als den betrachteten Strahl justiert ist. Man hat dann bekanntlich nach der Beziehung zwischen Brechungsindex n und Polarisationswinkel

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 &= \frac{\pi}{2} + \varepsilon_1 \\ \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} &= n \end{aligned}\right\} \tag{139}$$

Nach der Reflexion wird die Amplitude, die sich anfänglich auf unpolarisiertes Licht bezog,

$$a_1 = -\frac{1}{2}a\left\{\frac{\sin(\alpha_1-\beta_1)}{\sin(\alpha_1+\beta_1)} + \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1-\beta_1)}{\operatorname{tg}(\alpha_1+\beta_1)}\right\} \tag{140}$$

oder mit Berücksichtigung von (139)

$$a_1 = \frac{a}{2}\left\{\frac{\cos(2\alpha_1-\varepsilon_1)}{\cos\varepsilon_1} - \frac{\cot(2\alpha_1-\varepsilon_1)}{\cot\varepsilon_1}\right\} = \frac{a}{2}\,\frac{\cos(2\alpha_1-\varepsilon_1)}{\cos\varepsilon_1}\left[1 - \frac{\sin\varepsilon_1}{\sin(2\alpha_1-\varepsilon_1)}\right] \tag{141}$$

Ist nun der Analyseur

1. ein weiterer Glasspiegel, welcher mit dem ersten den Winkel φ bildet, so sei δ der Winkel, welchen die Schwingung des einfallenden Strahles mit der Einfallsebene dieses Analyseurs einschließt, also

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \varphi \tag{142}$$

Die Amplitude dieses Lichtes wird nach der zweiten Reflexion a', wobei

$$a' = -a_1\left\{\frac{\sin(\alpha'-\beta')}{\sin(\alpha'+\beta')}\sin\delta + \frac{\operatorname{tg}(\alpha'-\beta')}{\operatorname{tg}(\alpha'+\beta')}\cos\delta\right\}$$

oder

$$a' = a_1\left\{\frac{\sin(2\alpha'-\varepsilon')}{\cos\varepsilon'}\sin\delta - \frac{\cot(2\alpha'-\varepsilon')}{\cot\varepsilon'}\cos\delta\right\} \tag{143}$$

Ersetzt man hier a_1 durch den in (141) gefundenen Ausdruck und berücksichtigt das optisch gleiche Verhalten der beiden Spiegel, so kommt

$$a' = \frac{a}{2}\,\frac{\cos(2\alpha_1-\varepsilon_1)}{\cos\varepsilon_1}\,\frac{\cos(2\alpha'-\varepsilon')}{\cos\varepsilon'}\left[1 - \frac{\sin\varepsilon_1}{\sin(2\alpha_1-\varepsilon_1)}\right]\left[\sin\delta - \cos\delta\,\frac{\sin\varepsilon'}{\sin(2\alpha'-\varepsilon')}\right] \tag{144}$$

Sind nun die beiden Spiegel so beschaffen, daß sich ihr Brechungsexponent mit der Wellenlänge wenig ändert, so ist ε nahezu konstant $= \varepsilon$, und da weiter die beiden Spiegel parallel sind, so wird auch

$$\alpha' = \alpha_1 = \alpha \tag{145}$$

Man hat dann nach Berücksichtigung von (144)

$$a' = \frac{a}{2}\cos(2\alpha-\varepsilon)\cos\varphi\left[1 - \frac{\sin\varepsilon}{\sin(2\alpha-\varepsilon)}\right]\left[1 - \operatorname{tg}\varphi\,\frac{\sin\varepsilon}{\sin(2\alpha-\varepsilon)}\right]$$

oder in Intensitäten ausgedrückt, wenn C eine nur vom Instrumente abhängige Konstante bedeutet:

$$I = I_0 \cos^2 \varphi \left\{1 - C \operatorname{tg} \varphi\right\}^2 \quad \dots \dots \dots \quad (146)$$

Die Reduktion der Messungen mit diesem Apparate ist also etwas weniger einfach, man hat jedoch zu bedenken, daſs ε, mithin auch C sehr klein ist, was durch eine einfache Korrektionsrechnung berücksichtigt werden kann.

2. Ist der Analyseur ein Nicolprisma in der Axe des vom Spiegel reflektierten Strahles, so bleiben die Reduktionen ganz analog, werden aber etwas einfacher. Man hat nämlich:

$$I = I_0 \cos^2 \varphi \quad \dots \dots \dots \quad (147)$$

da nur jene Komponente des teilweise polarisierten Lichtes durch das Nicolprisma dringt, welche auf dem Hauptschnitt senkrecht steht.

b) Methode der unmerklichen Unterschiede.

a) Diese Methode beruht auf der Annahme, daſs die Intensität, bei welcher ein Lichteindruck für das Auge verschwindet, wenigstens für kurze Zeiten konstant sei. Das Verschwinden des Lichteindruckes läſst sich hervorbringen durch Absorption, durch Polarisation, durch fortwährende Verminderung der Öffnung, durch welche die Strahlung in das Instrument eindringt. Der Vorteil der Methode besteht in der Einfachheit der Messungen und hauptsächlich in dem Umstande, daſs die Genauigkeit der Messungen von der Wellenlänge unabhängig wird.

An 16 über mehr als drei Monaten verteilten Abenden wurde nach der Extinktionsmethode mit einem neutralgefärbten Glaskeile der Stern 6.3 Gröſse $B.D + 19^0.1126$ im Orion in Höhen von 30^0 bis 60^0, wo der Einfluſs der Höhenänderung auf die Luftabsorption noch gering ist, beobachtet, und für seine Intensität (in willkürlichem Maſse) folgende Werte abgeleitet:

Datum.	log Intens.	Datum.	log. Intens.
1885 Dez. 27	2.141	1886 März 10	2.189
28	2.073	23	2.248
1886 Jan. 3	1.950	26	2.330
Febr. 23	2.324	27	2.259
24	1.830	31	2.379
25	2.229	April 1	2.273
28	2.211	2	2.377
März 1	2.209	3	2.359

Die Übereinstimmung dieser ganz unkorrigierten Werte, die jedenfalls noch durch die wechselnde Heiterkeit der Luft ungünstig beeinfluſst wird, ist jedenfalls so groſs, daſs an einer merklichen Konstanz der Augenempfindlichkeit nicht zu zweifeln ist.

Am Sonnenspektrum wurden nach eben dieser Methode je 25 Beobachtungen der Intensitäten der angeführten Wellenlängen ausgeführt, die wahrscheinlichen Fehler der Intensitäten ergeben sich in Prozenten zu:

$\lambda =$	0.673	0.633	0.600	0.555	0.515	0.484	0.464	0.444	0.426
wahr. Fehler =	±0.3	0.6	0.5	0.3	0.7	0.8	0.7	0.6	0.4

Diese konstante Genauigkeit der Messung für verschiedene Wellenlängen gegenüber deren wechselndem Werte in der Methode der Vergleichung lieſs sich auch von vornherein erwarten, denn gewiſs ist die Konstatierung des Vorhandenseins oder Nichtvorhandenseins einer Lichtempfindung ein bei weitem einfacherer sensitiver Prozeſs, als die Beurteilung der Gleichheit zweier Lichteindrücke.

Auch in ausgedehnten Beobachtungsreihen ist die Zuverlässigkeit der Methode der unmerklichen Unterschiede dargelegt, man vergleiche den photometrischen Sternkatalog von Pritchard mit jenen von Wolff oder Pickering.

Wir schreiten nun zur Besprechung der einzelnen Methoden, mit welchen eine Extinktion des Lichteindruckes hervorgebracht zu werden pflegt.

b) *Durch Absorption.* Das hierzu erforderliche Instrument, das sogenannte Keilphotometer, ist ein aus neutralgefärbtem (London smoke glafs) Glas geschliffener Keil, der der Längsrichtung nach eine Skale besitzt, welche die Dicke des Keils in der Durchgangsstelle des Strahles angiebt. Der Apparat wird an irgend einer bequemen Stelle des Spektroskops in den Strahlengang desselben eingeschaltet.

Ist p der Transmissionskoeffizient des Glases, δ die Dicke des Keiles in der Durchgangsstelle, $1-q$ der Reflexionskoeffizient, J die auffallende, i die gemessene Intensität, so besteht die Gleichung

$$i = J q p^{\delta} \qquad (148)$$

wo natürlich q und p Funktionen der Wellenlängen sind. Mifst man für irgend einen homogenen Strahl (mit einem anderen Spektralphotometer) J, i_1 und i_2, wo J der Reihe nach durch die Dicken δ_1 und δ_2 des Keiles hindurchgegangen, so kann man p und q bestimmen. Man hat nämlich

$$p^{\delta_1-\delta_2} = \frac{i_1}{i_2}$$

$$q = \frac{i_1}{J} p^{-\delta_1} = \frac{i_2}{J} p^{-\delta_2}$$

Bedeutet i die sehr kleine Intensität, bei welcher der Lichteindruck verschwindet, und Δ die Dicke des Keiles, bei welcher die Einheit der Intensität der jeweiligen Wellenlänge verschwindet, so wird

$$J = p^{\Delta-\delta} \qquad (149)$$

die Photometerformel des Keils. Die Dicke δ bestimmt man am besten mit Hilfe eines Komparators als Funktion der Skalenablesung.

Die Voraussetzung, dafs das Glas des Photometers neutral sei, d. h. annäherungsweise von allen Farben gleichviel absorbiere, ist gar nicht nötig, man pflegt sie deshalb zu machen, um das Photometer auch für Mischlicht anwenden zu können.

c) Das Keilphotometer hat die Unannehmlichkeit, dafs es nur innerhalb gewisser Grenzen der Intensität benutzt werden kann, die von der Maximaldicke der absorbierenden Schichte abhängen. Ein auf Polarisation beruhender Apparat ist von diesem Mangel frei, da bei vollkommener Polarisation, wie sie z. B. durch Doppelbrechung erreicht werden kann, selbst Licht der höchsten Intensität ausgelöscht wird.

Das Photometer besteht im allgemeinen aus einer Polarisier- und Analysiervorrichtung, die in den Strahlengang irgend eines Spektroskops eingeschaltet wird. Ist die Einheit des Lichtes der jeweiligen Wellenlänge jene Intensität, welche bei dem Drehungswinkel φ_0 ausgelöscht wird, so lautet die Photometerformel

$$J = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi}$$

Macht man Einstellungen rechts und links von $\varphi = 90^0$, so wird dadurch der Nullpunktsfehler des Systems, wenn in allen vier Quadranten, so auch der Exzentrizitätsfehler des Systems eliminiert.

Ein Spektralphotometer, dessen Polarisationsvorrichtung das brechende Prisma selbst ist, indem es aus einem parallel der Axe geschliffenen Doppelspathe besteht und sich durch sehr grofse Lichtstärke auszeichnet, wurde nach unseren Angaben von Fr. Schmidt und Haensch für die Sternwarte Kis Kartal in Ungarn hergestellt. Es besitzt bei grofser Lichtstärke und Handlichkeit den Vorteil, zwei verschiedene Dispersionen, die den ordentlichen und aufserordentlichen Strahlen entsprechen, zu gewähren.

d) Durch Reduktion der Öffnung des strahlenauffangenden Instrumentes können, so lange die Veränderungen der Öffnung gering sind, ebenfalls Messungen der Intensität vorgenommen werden. Ist f_0 die Öffnung, bei welcher die Einheit des Lichtes eben extingiert wird, so ist die Photometerformel:

$$I = \frac{f_0}{f}$$

Mit Hilfe dieser Beobachtungen, bei welcher ein Objektiv von 161.2 mm nacheinander auf 89.1, 43.5 und 27.0 mm reduziert wurde, wollten wir den Transmissionskoeffizienten eines Keilphotometers bestimmen. Es ergab sich

$$\log p = -0.6794, \quad -0.5677, \quad -0.4540$$

während mit einem anderen Photometer

$$\lg p = -0.5734$$

als wahrer Wert gefunden wurde. Es ergiebt sich hieraus die geringe Sicherheit, die diese Methode bietet.

e) Dieser Methode kann eine verwandte untergeordnet werden, die darin besteht, dafs man das Okular des Beobachtungsfernrohres herauszieht, und das punktförmige Bild eines Sternes oder einer ähnlichen Lichtquelle soweit in eine Fläche verwandelt, bis deren Intensität unendlich klein wird. Wie man leicht findet, verhalten sich die Intensitäten sodann, wie die Okularauszüge.

Auf diese Weise bestimmten wir die Gröfsendifferenz zweier Sterne im Orion (I. $5^h 49^m 30^s + 20^0 7' 30''$ und II. $5^h 49^m 42^s + 20^0 9' 39''$, 1886.0) an vier Tagen und fanden:

1886	April 27	mg I — mg II = 0.24
	28	0.17
	29	0.23
	Mai 4	0.37

was jedenfalls, wenn die zu bestimmenden Objekte nur, wie im vorliegenden Falle sehr klein sind, die Methode empfehlenswert macht.

f) Endlich hat man auch vorgeschlagen, was aber unseres Wissens nie in Anwendung gekommen, Intensitätsmessungen nach der Thatsache vorzunehmen, dafs das Auge bei einer gewissen Gröfse der Erleuchtung aufhört eine andere sich gleichzeitig auf der Netzhaut befindliche Lichteinwirkung wahrzunehmen.

Da es sich bei allen diesen behandelten Methoden nicht eigentlich um Vergleichungen handet, so besitzen alle Fehler des Spektroskops Einflufs auf die Genauigkeit der Messungen.

Ist erstens eine Durchbiegung des Spektroskops vorhanden, so bestimmt man die Intensität einer anderen als der verlangten Wellenlänge. Der Fehler der Wellenlänge kann leicht durch eine Messung der Wellenlänge der Natriumlinie in Rechnung gebracht werden.

Geringe Abweichungen vom Minimum der Deviation bringen keine Ungenauigkeiten hervor; dagegen wäre zu berücksichtigen, dafs die einzelnen Strahlen im Prisma

verschieden absorbiert werden, einesteils weil die Substanz des Prismas verschiedene Wellen verschiedenartig absorbiert, andernteils, weil die verschiedenen Strahlen dann auch verschieden lange Wege, die weniger brechbaren z. B. die kürzeren, zurücklegen.

Diese und ähnliche Fehler sind aber von mindestens einer höheren Ordnung, als welche in den Intensitätsbestimmungen der Natur der Sache nach stecken, und daher zu vernachlässigen. Dazu kommt noch, daſs man sie in den meisten Fällen zu eliminieren pflegt, indem man unmittelbar nach den Beobachtungen noch Lichtquellen bekannter Natur mit unveränderten Instrumenten beobachtet, wodurch auch Veränderungen der Augenempfindlichkeit groſsenteils unschädlich werden.

Das bei weitem schwierigste Problem dieser Methode ist die Bestimmung der Absorption des Spektroskopes, die man nur dann umgehen konnte, wenn man die Beobachtung sogleich mit der Untersuchung (nach derselben Methode) einer Normallichtquelle verbände.

Will man streng experimentell vorgehen, so hat man mit Hilfe eines Spektroskops das Spektrum einer konstanten Lichtquelle zu entwerfen, von diesem einzelne homogene Teile gewünschter Brechbarkeit herauszuwählen und diese photometrisch zu messen, einmal mit bloſsem Auge, das andere Mal mit dem dazwischen geschalteten zu untersuchenden Spektroskope. Dabei muſs natürlich die Vergröſserung des Spektroskopes in Rechnung gezogen werden, wenn nicht der ganze in die Spaltöffnung gedrungene Strahlenkegel nach der Vergröſserung wieder die Pupille umspannt.

Kann man die optischen Teile des Apparates gesondert untersuchen — die Transmission mehrerer Medien ist gleich dem Produkte der Transmissionen der einzelnen Bestandteile — so erreicht man hierdurch bedeutende Genauigkeit, wenn nicht, so gehört allerdings die Bestimmung der Transmission eines Spektroskops zu den schwierigsten Beobachtungen.

Viel sicherer verfährt man indirekt, indem man eine bekannte Lichtquelle rechnend darstellt, dieselbe dann mit dem Spektroskope und möglichst einem Thermometer untersucht, und die Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung als Absorption des Spektroskops betrachtet. Kennt man bloſs μ der Lichtquelle, so erhält man wenigstens relative Absorptionswerte. Würde das Auge angewendet, so hätte man die vereinte Absorptionswirkung dieses Organs und des Spektroskops.

Mit Hilfe der zuerst erwähnten Methode wurde ein Merzsches à vision directe Spektroskop mit einem Prismensatze (sogenanntes Universalspektroskop) untersucht. Trotz mehrfacher Wiederholungen waren die Resultate recht unsicher, und gaben nach graphischer Ausgleichung im Mittel

$\lambda =$	lg Transmiss. =	$\lambda =$	lg Transmiss. =
0.673	−1.4085	0.484	−1.0165
633	1.2352	464	1.0505
600	1.1505	444	1.0630
555	1.0840	426	1.0866
515	1.0540		

Im Mittel beträgt also die Schwächung des Spektroskops 92 % des auffallenden homogenen Lichtes!

Nach der zweiten Methode ist die vereinte Wirkung der Absorption des Spektroskops und der Thermosäule berechnet, welche Mouton bei der Untersuchung des von uns öfter benutzten Platinspektrums anwandte.

γ. *Thermische Intensitätsmesser.*

Die wichtigste Methode der Intensitätsbestimmung ist die der Thermometrie, und zwar aus zwei Gründen: erstlich wissen wir hier ganz bestimmt, daſs im spektralanalytischen Agens keine Veränderungen der Art vorgehen, die die Anwendung des Kirchhoffschen Gesetzes unstatthaft machten, und zweitens sind wir stets im Stande, die Beobachtungsresultate auf absolutes, d. h. mechanisches Maſs zu reduzieren.

a) Ist α und $1-\beta$ resp. der Absorptions- und Reflexionskoeffizient der die Wärme empfangenden Fläche, so ist die thermometrisch gemessene Intensität L, wenn L_0 die objektive bedeutet, einfach durch

$$L = \alpha\beta L_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (150)$$

gegeben. α und β lassen sich durch spektralphotometrische Beobachtungen stets bestimmen, und sind, so lange das Thermometer unverändert bleibt, absolute Konstanten.

Wir wollen hier hauptsächlich von zwei Arten Instrumenten sprechen, dem gewöhnlichen Thermometer, in welchem die Ausdehnung einer Flüssigkeit als Intensitätsmaſs der Strahlung genommen wird, und vom Pettersonschen Kalorimeter, in welchem die Messung der Temperaturerhöhung durch die mechanische Arbeit der thermometrischen Substanz bei konstanter Temperatur geschieht.

Hat ein Thermometer zur Zeit t unter Einfluſs einer Wärmestrahlung den Temperaturüberschuſs $\Theta - \Theta_0$ gegen die Umgebung, so ist sein Temperaturverlust durch Strahlung nach dem Newtonschen Strahlungsgesetze, welches hier der Kleinheit von $\Theta - \Theta_0$ halber unbedenklich zu Grunde gelegt werden darf, in dem unendlich kurzen Zeitelemente dt gegeben, durch

$$-d\Theta = A(\Theta - \Theta_0)\, dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (151)$$

wo A eine von der Natur des Thermometers abhängige Konstante bezeichnet. Multipliziert man die Gleichung mit dem Gewichte p des ausstrahlenden Teiles und seiner hier konstant vorauszusetzenden Wärmekapazität c, so erhält man als Wärmeabgabe in der Zeiteinheit:

$$w = Apc(\Theta - \Theta_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (152)$$

Um die Konstante A zu bestimmen, integrieren wir die obige Gleichung, indem wir den anfänglichen Überschuſs $\Theta' - \Theta_0$ nennen, und erhalten so:

$$A = \frac{1}{t} \operatorname{lognat} \frac{\Theta' - \Theta_0}{\Theta - \Theta_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (153)$$

wo nun t die Zeit bedeutet, innerhalb welcher das Thermometer von Θ' auf Θ sinkt.

Es ist selbstverständlich, daſs hierbei alle Vorsichtsmaſsregeln, welche bei der Thermometrie zu beachten sind, und auf welche näher einzugehen hier der Ort nicht ist, berücksichtigt werden müssen.

Das Pettersonsche[1] Kalorimeter erlaubt ohne Zwischenbeobachtungen direkt die Bestimmung des mechanischen Betrages einer Strahlung. Der folgende Gedankengang liegt ihm zu Grunde:

Läſst man ein Gas auf einer Kurve konstanter Temperatur fortschreiten, so ist die Summe der zuzuführenden Arbeit W und Wärme Q offenbar 0, d. h.

$$AQ + W = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (154)$$

wenn A das mechanische Äquivalent der Wärme bezeichnet. Andrerseits erhält man aber für die bei konstantem Drucke zuzuführende Arbeit den Wert

[1] Nature 1884 Juli 31.

$$dW = -p\,dv \tag{155}$$

wo p und v den Druck bedeuten. Damit wird

$$Q = -\frac{1}{A}W = \frac{1}{A}\int_{v_0}^{v} p\,dv \tag{156}$$

wenn sich das Gas zwischen den Grenzen v_0 und v ausdehnt. Nun hat man für konstante Temperatur nach Boyles Gesetz

$$p = \frac{v_0 p_0}{v} \tag{157}$$

und mithin auch

$$Q = \frac{v_0 p_0}{A} \operatorname{lognat} \frac{v}{v_0} \tag{158}$$

Das nach diesen Prinzipien konstruierte Instrument besteht nun aus zwei Glasgefäfsen von gleichem Inhalte, die mit irgend einem permanenten Gase gefüllt werden. Das eine derselben dient als Thermometerkugel, das andere wird durch Einsenken in eine grofse Menge Wassers auf der konstanten Temperatur O_0 erhalten. Beide Gefäfse stehen miteinander durch eine Kapillarröhre in Verbindung, in der ein Quecksilbertropfen als Index dient, andrerseits aber kommunizieren sie mit einem Quecksilberrezipienten. Ist nun durch Wärmezufuhr die Temperatur des Thermometergefäfses O_1 geworden, so senkt man den Rezipienten, stets den Index auf konstanter Stellung erhaltend. Dann ist aber die in beiden Gefäfsen hervorgebrachte Expansion eine isotherme, denn das einemal ist das Gefäfs durch die Umgebung auf der Temperatur O_1 erhalten, das andere Mal ergiebt sich aus dem Mariotteschen Gesetze auch die Temperaturkonstanz des Thermometergefäfses. Ist der Quecksilberrezipient geteilt, so ergiebt sich durch die Menge des bei der Senkung ausgetretenen Quecksilbers sogleich v_0, während v durch den Inhalt der Gefäfse gegeben ist.

Obwohl man mit dem eben beschriebenen Instrumente nach Pettersons Angaben sehr kleine Strahlungsintensitäten messen kann, so wird man die thermometrischen Methoden doch nur dann mit Erfolg anwenden, wenn genügende Intensität, wie das z. B. im Sonnenspektrum der Fall ist, vorliegt. Immer aber, wenn es darauf ankommt, eine nach optischen oder chemischen Methoden nach willkürlicher Einheit gemessene Intensität auf absolutes Mafs zu reduzieren. Eine Anwendung hiervon auf das Auge haben wir schon früher besprochen.

b) Eine Nebenabteilung dieser Methode bieten die thermoelektrischen Bestimmungen einer Strahlungsintensität, die sich auf die mefsbare Veränderung beziehen, welche dieselbe in elektrischen Leitern hervorbringt. Diese sind zweierlei Art: erstlich entstehen in sich berührenden heterogenen Leitern an der Berührungsstelle Ströme, zweitens wird der Leitungswiderstand homogener Leiter unter Einflufs der Strahlung vergröfsert.

Bezeichnet $O - O_0$ die Temperaturdifferenz der beiden Lötstellen eines Thermoelementes, so ist die elektromotorische Kraft des Thermostromes mit grofser Annäherung darstellbar durch

$$E = a(O - O_0) + b(O - O_0) \tag{159}$$

wo a und b von der Natur und der Art der Berührung der beiden Elemente abhängige Konstanten sind.

Die Leitungsfähigkeit l eines Stoffes wird durch Temperaturveränderungen so verändert, dafs

$$l = l_0 \left\{1 - \alpha(\Theta - \Theta_0) + \beta(\Theta - \Theta_0)^2\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (160)$$

bleibt, wenn sich l_0 auf die Temperatur Θ_0 bezieht. Nach den Untersuchungen von Matthiesen ist

$$a = 0.003\ 7674, \quad b = 0.000\ 008\ 34$$

wahrscheinlich für alle Metalle konstant.

In beiden der besprochenen Fälle ist in dem Stromkreise ein Galvanometer eingeschaltet, dessen Ablenkungsangaben als Mafs der Temperaturerhöhung gelten können. Je nachdem man nun wünscht, können die Messungen der Stromstärke resp. des Leitungswiderstandes absolut bestimmt, und dann nach den vorgelegten Gleichungen Θ berechnet werden, oder aber man kann das Galvanometer auch empirisch kalibrieren. Stets wird man aber zu beachten haben, dafs sich die Temperaturangaben nur auf jenen Zustand des Agens beziehen, in welchem er in gleichen Zeiten ebensoviel Wärme durch Zustrahlung gewinnt, als er durch Ausstrahlung an die Umgebung verliert. Sollen also die Messungen auf Wärmemafs reduziert werden, so bedarf es noch der Kenntnis der Masse und der spezifischen Wärme des Thermoelementes oder des Leiters.

Es ist hier unnötig, auf die Vorsichtsmafsregeln einzugehen, welche ergriffen werden müssen, damit die Leitung homogen, in allen Punkten gleich temperiert, und das Galvanometer möglichst isoliert sei. Die Nichtberücksichtigung dieser Umstände führen Fehler herbei, welche wenigstens bei astrophysikalischen Anwendungen die zu messenden Gröfsen bedeutend übertreffen.

Wir erwähnen endlich noch, dafs nach der ersten Methode zuerst unzweifelhaft Wärmewirkungen der helleren Fixsterne auf die Erde durch Huggins nachgewiesen wurden, und dafs nach der zweiten Methode, der Veränderung des Leitungswiderstandes Langley sein Bolometer konstruierte, mit welchem er so viele schöne Untersuchungen auf dem Gebiete der Solarspektralanalyse durchführte. Wie die Methode zur absoluten Bestimmung der Länge der Linien verwendet werden kann, wurde schon auf pag. 27 hervorgehoben.

D. Photometrie des Mischlichtes.

a) All die erwähnten Methoden sind fast ohne Änderung auch zur Beobachtung des ungesonderten Strahlenkomplexes geeignet, wobei freilich der Spektralapparat stets entfällt. Nur hat man im allgemeinen zu bedenken, dafs von einem mittleren Absorptionskoeffizient für Mischlicht keine Rede sein kann, insofern derselbe stets von der Wellenlänge des Intensitätsmaximums der untersuchten Lichtquelle abhängig ist. Da aber mit einem und demselben Photometer gewöhnlich nie sehr verschiedenfarbige Strahlungen untersucht werden, so darf man annähernd für eine grofse Klasse von Lichtquellen denselben Absorptionskoeffizienten benutzen. Am auffallendsten werden die Verschiedenheiten bei dem Glaskeilphotometer, dessen Grundprinzip eben die Absorption bildet.

Mit einem solchen neutralen Keile, der keine Absorptionsbanden oder diskontinuierliche Stellen auffallender Diaphanie enthielt, und für Sterngröfsenmessungen bestimmt war, wurden Beobachtungen roter, gelber und bläulicher Sterne, die durch das Zöllnersche Kolorimeter hergestellt waren, und nahezu den Farben der drei Typen entsprachen, angestellt. (Eigentlich ist auch dieser Vorgang nicht korrekt, da man sich erinnert, dafs cirkularpolarisiertes Licht eines ungetrennten Strahlenkomplexes ebenfalls Mischlicht ist). Als Transmissionskoeffizient erhielt man:

Rote Sterne ($\mu = 0.60$) $\log p = -0.5762$ oder $p = 26.5$ %
Gelbe Sterne ($\mu = 0.55$) -0.5720 26.8
Blaue Sterne ($\mu = 0.45$) -0.4976 31.8

Auch mit freiem Auge war es ersichtlich, daſs der Keil blaue Strahlen weniger absorbierte.

Bevor wir diesen Abschnitt verlieſsen, verweilen wir noch einige Augenblicke bei Messungen der Intensität von Mischlicht, durch welche zugleich auch die Farbe mitbestimmt wird, worauf wir bereits auf Seite 302 verwiesen.[1]

Ist ein Strahlungskomplex $(\mathcal{A}, \mu)$ gegeben, so wird seine subjektive Intensität

$$J = \frac{4}{\pi}\,\mu\mathcal{A}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} s\,\frac{\lambda}{(\lambda^2+\mu^2)^2}\,d\lambda \tag{161}$$

Schreibt man nun wie früher das vorliegende Integral, abgesehen vom Faktor s, in der Form $F(\mu)$ oder vollständiger $\mathcal{A}\,F(\mu, \lambda_1, \lambda_2)$, so läſst sich die Intensität, wenn man in den Strahlengang ein farbiges Medium einschaltet, welches zwischen λ_1' und λ_1'', λ_2' und λ_2'' ... scharfbegrenzte dunkle Absorptionsstreifen besitzt, so schreiben

$$J_1 = \frac{4}{\pi}\,\mu\mathcal{A}\left\{\int_{\lambda_1}^{\lambda_1'} s\,\frac{\lambda}{(\lambda^2+\mu^2)^2}\,d\lambda + \int_{\lambda_1''}^{\lambda_2'} s\,\frac{\lambda}{(\lambda^2+\mu^2)^2}\,d\lambda + \cdots + \int_{\lambda_n''}^{\lambda_2} s\,\frac{\lambda}{(\lambda^2+\mu^2)^2}\,d\lambda\right\} \tag{162}$$

Hebt man nun in beiden Integralen irgend einen mittleren Wert von resp. σ und σ_1 heraus, der im allgemeinen eine Funktion von μ ist, aber auch von der Lage der Absorptionsbanden des eingeschalteten Mediums abhängt, so hat man die Summe

$$F(\mu, \lambda_1, \lambda_1') + F(\mu, \lambda_1'', \lambda_2') + \cdots + F(\mu, \lambda_n'', \lambda_2) = F_1(\mu) \tag{163}$$

bezeichnend die folgenden Gleichungen

$$J = \sigma\,\mathcal{A}F(\mu) \quad \text{und} \quad J_1 = \sigma_1\,\mathcal{A}F_1(\mu) \tag{164}$$

σ und σ_1 werden nahezu gleich sein, wenn das eingeschaltete Medium viele schmale und beiläufig gleichmäſsig verteilte Banden besitzt.

Aus den beiden Gleichungen folgt

$$\frac{F_1(\mu)}{F(\mu)} = \frac{\sigma J_1}{\sigma_1 J}, \quad \mathcal{A} = \frac{J}{\sigma F(\mu)} = \frac{J_1}{\sigma_1 F_1(\mu)} \tag{165}$$

womit $\mathcal{A}$ und μ bestimmt ist. σ und σ_1 kann aus gleichzeitigen Messungen nach dieser Methode und der strengen spektralphotometrischen Methode entwickelt werden. Speziell bei Sternbeobachtungen wird es genügen, σ und σ_1 bloſs für die drei Sterntypen zu bestimmen.

Unter mehreren untersuchten Glassorten wurde als das beste Uranglas befunden, welches drei scharf begrenzte breite Banden aufweist und so die Transmission auf die Spektralregion 0.499—0.532 und 0.551—0.612 herabdrückt. (Im Rot ist zwar eine Transmissionsstelle, da sie aber mit B zusammenfällt, kommt sie ihrer Schwäche halber für Sterne nicht in Betracht.)

Berechnet man nun für die angegebenen Wellenlängen die Funktion $F_1(\mu)$, so findet man

$\mu =$	0.300	0.350	0.400	0.450	0.500	0.550	0.600	0.650	0.700	0.750	0.800
$\log F_1(\mu) =$	8.4791	8.5195	8.5379	8.5540	8.5627	8.5680	8.5672	8.5618	8.5600	8.5537	8.5159

und mit Hilfe einer für das Auge berechneten $F(\mu)$ Tabelle

---

[1] v. Kövesligethy, Sirius XX, 10. und 12. Heft.

$\mu =$	0.300	0.350	0.400	0.450	0.500	0.550	0.600	0.650	0.700	0.750	0.800
$\log \frac{F_1(\mu)}{F(\mu)} =$	9.0504	9.0955	9.1306	9.1719	9.2120	9.2530	9.2910	9.3294	9.3669	9.4037	9.4394

Der ganze Vorgang besteht nun darin, dafs man den zu untersuchenden Stern mit und ohne Uranglas photometrisch bestimmt.

Der Stern 50 d'Arrest des Orionnebels wurde mit einem Keilphotometer nach dieser Methode beobachtet: das Verhältnis der Intensität mit und ohne Uranglas ist

$$\log \frac{J_1}{J} = 9.4847$$

während dasselbe für den hellsten Stern des Trapezes zu $\log \frac{J_1}{J} = 9.3510$ bestimmt wurde. Da das μ dieses letzteren Sternes nahezu 0.440 beträgt, so entspricht diesem $\log \frac{F_1(\mu)}{F(\mu)} = 9.1636$ und damit wird

$$\log \frac{\sigma}{\sigma_1} = 9.8126$$

Betrachtet man diesen Wert als nahezu konstant (in der That ist er mit μ veränderlich), so ergiebt sich für den untersuchten Orionstern 50 d'Arrest:

$$\log \frac{F_1(\mu)}{F(\mu)} = 9.2973,$$

woraus nach der vorhergehenden Tabelle

$$\mu = 0.608$$

gefunden wird. Der beobachtete Stern ist also vom III. Typus, was man durch direkte Beobachtung der enormen Schwäche des Sternes halber nicht so leicht gefunden hätte.

Um nun einen Begriff von der Genauigkeit dieser auf photometrischen Messungen beruhenden Kolorimetrie zu erlangen, betrachten wir die Veränderungen der Funktion $\log \frac{F_1(\mu)}{F(\mu)}$ und $\log F(\mu)$ die resp. bei der soeben besprochenen und der Zöllnerschen Methode in Betracht kommt, während μ von 0.300 bis 0.800 geht; die erstere Funktion ändert sich um 3890, die letztere um 3222 Einheiten in diesem Intervalle, so dafs die Zöllnersche Methode sogar hinter dieser neueren zurückbleibt.

b) Bei photometrischen Messungen des ungetrennten Strahlenkomplexes verschiedenfarbiger Lichtquellen liegt eine in der Natur unseres Auges begründete Schwierigkeit, die noch kaum als gehoben zu betrachten ist. Man hilft sich neuerdings dadurch, dafs man durch Einschalten von farbigen Gläsern, gewöhnlich eines roten, sodann eines grünen, den Komplex teilweise trennt. Wenn auch dagegen theoretisch nichts einzuwenden ist, so ist man doch auf eine zweimalige Intensitätsmessung und deren sehr willkürlich gehandhabten Reduktion angewiesen. Es soll gezeigt werden, dafs sich das Problem auf eine einfache Intensitäts- und eine Wellenlängenbestimmung reduzieren läfst.

Schreibt man nämlich, wie früher unter J die Intensität des sichtbaren Spektrums verstanden

$$J = AsF(\mu) = \frac{\pi}{4} \frac{(\lambda_0^2 + \mu^2)^2}{\mu \lambda_0^2} L_0 \frac{s}{s_0} F(\mu) \quad \ldots \ldots \quad (166)$$

wo I_0 die der Wellenlänge λ_0 entsprechende subjektive Intensität ist, so reduziert sich, kennt man anders μ das Problem auf die Messung dieser einzigen Intensität im homogenen Lichte. Um nun μ kennen zu lernen, braucht man nur die Spalte des Spektroskops solange (event. unter Vorhalten eines schwachen Rauchglases, das die Genauigkeit

vermehrt) vorsichtig zu schliefsen, bis ein schmaler Lichtstreifen übrig bleibt, dessen Wellenlänge gemessen wird, und gerade μ giebt Bei einiger Übung gelingt dies leicht, und mit grofser Sicherheit

Als Beispiel möge eine solche Bestimmung für glühendes Platin und einer Gasflamme angeführt werden, man erhält

	Glühendes Platin $\mu =$	Gasflamme $\mu =$
	0 564	0 613
	570	606
	574	612
	569	608
im Mittel also	0 569	0 610

eine Genauigkeit, die für photometrische Bestimmungen hinreicht Dieses μ enthält natürlich noch die Einwirkung der Absorption des Spektroskops die ein für allemal bestimmt werden mufs ist sie durch $\varphi(\lambda)$ ausgedrückt, so wird

$$\mu = \mu_0 \frac{1 - \mu_0 \dfrac{\varphi'(\mu_0)}{2\varphi(\mu_0)}}{1 + \mu_0 \dfrac{\varphi'(\mu_0)}{2\varphi(\mu_0)}} \tag{167}$$

und kann mit dem Argumente μ_0 in Tafeln mit einfachem Eingange gebracht werden Ebenso ist es nötig $\frac{s}{s_0}$ in Tafeln zu bringen, man konstruiert sie, indem man Lichtquellen von verschiedener Farbe photometrisch nach der dargelegten Methode und spektralphotometrisch untersucht Entscheidet man sich endlich dafür stets in homogenem Lichte derselben Wellenlänge zu messen, so kann auch $\frac{\pi}{4}\,\frac{(\lambda_0 + \mu)}{\mu\,\lambda_0}$ in Tafeln gebracht werden Da alle Tafeln dasselbe Argument haben, so kann man sie ein für allemal vereinen, und erhält, setzt man

$$\frac{\pi}{4}\,\frac{(\lambda_0 + \mu)^2}{\mu\,\lambda_0}\;\frac{s}{s_0}\,F(\mu) = \Phi(\mu_0) \tag{168}$$

einfach die folgende Gleichung

$$J = L_0\,\Phi(\mu_0) \tag{169}$$

Man braucht die zu untersuchende Lichtquelle nur in der Wellenlänge λ_0 zu messen μ_0 zu bestimmen, und mit dem Argumente μ_0 den Reduktionsfaktor $\Phi(\mu_0)$ der Intensität auf die Helligkeit des ganzen sichtbaren Spektrums aus einer Tabelle zu entnehmen

E Das Polariskop

Besitzt eine Lichtquelle aus irgend einem Grunde teilweise oder ganz polarisiertes Licht so verändert sich die Intensität derselben, wenn man es durch ein Nicolsches Prisma betrachtet, je nach dessen Drehung Die Intensität wird ein Minimum, im Falle vollständiger Polarisation gleich Null, wenn die Schwingungsebene der Strahlen parallel dem Hauptschnitte des Prismas liegt Man ist also im Stande, die Polarisation nicht nur zu erkennen, sondern auch ihre Lage im Raume anzugeben

Handelt es sich nur um den Nachweis der Polarisation, so benutzt man die empfindlicheren Methoden der Farben von doppeltbrechenden Krystallen im polarisierten Lichte Eines der empfindlichsten Polariskope ist das Vogelsche, welches aus einem

Nicolschen Prisma und einer kippbaren Quarzplatte besteht. Läfst man diese hin und her schwingen, so ziehen die farbigen Kreise durch das Gesichtsfeld hindurch, was die Erkennung der Polarisation viel sicherer macht.

Da wir bewiesen, dafs die Körper im allgemeinen unpolarisiertes Licht emittieren, so weist eingetretene Polarisation zumeist auf äufsere Einwirkung eines zweiten Körpers hin. Für die Spektralanalyse selbst ist also die Kenntnis der Polarisationsebene von keinem nennenswerten Belange, da sie keine vom Zustande des lichtaussendenden Körpers abhängige Faktoren enthält.

Nachtrag.

Mit Ausnahme des Draperschen Gesetzes, welches in der Spektralgleichung selbst begründet ist, tragen die meisten der übrigen Parametergleichungen — wie dieses denn auch in der „Bestimmung des Zustandes aus gegebenem Spektrum" deutlich herausgefühlt werden kann — den Charakter des Hypothetischen zur Schau. Ihre Entstehung findet überhaupt nur in dem bis dahin von wenig Erfolg gekrönten Bestreben Erklärung, die spektralanalytischen Elemente als Variabele der Wärmetheorie einführen zu können. Da wir mittlerweile in diesem Punkte bessere Resultate erzielten, halten wir es für nötig, diese, soweit es bislang thunlich erscheint, hier in Kürze noch einzuschalten.

Die Auflösung der Gleichung

$$E = e\left\{1 - (1 - \alpha)^q\right\}$$

für die Konstante aber sehr kleine Intensität $E = \iota$ lieferte zwei Wellenlängen, λ_1 und λ_2, von welchen die brechbarere λ_1 in der Form $\lambda_1 = \text{konst.}$ für alle Körper derselben Temperatur, das Drapersche Gesetz ergab. Die Richtigkeit dieses Gesetzes ist leicht einzusehen, denn λ_1 ist stets sehr klein, α_1 hiermit nahe $= 1$, daher der Einflufs von α und q, welche die Körpereigenschaften enthalten, verschwindend. Für die weniger brechbare Wellenlänge λ_2 ist dieses Gesetz nicht mehr giltig; denn α_∞ nähert sich dem endlichen Werte $\frac{\mu^4}{m^4}$ einem echten Bruche, und λ_2 enthält somit μ und q, ist also von Körpereigenschaften nicht mehr unabhängig. Daraus folgt aber dann, dafs λ_1 und λ_2, den Zustand eines Körpers vollständig bestimmen, mithin als Variabele der Wärmetheorie eingeführt werden können. Denn es enthält λ_1 die Temperatur allein, λ_2 diese und die Dichte. Statt aber λ_1 und λ_2 einzuführen, kann man auch die darin vorkommenden drei Gröfsen $\varDelta$, μ und v einführen, wenn v das spezifische Volumen bedeutet, und es wird sogleich klar, dafs der zweite Satz der Wärmetheorie eine Beziehung zwischen diesen drei Variabelen festsetzen mufs, welche als zweite Parametergleichung neben dem Draperschen Satze besteht. Hierbei sind nun aber zwei Fälle möglich: erstlich, dafs $\varDelta$ und μ die Dichte nicht enthalten, wie dieses bisher stets allgemein angenommen wurde, indem alle bisher bekannt gewordenen Beobachtungen dafür sprachen, dafs der Einflufs der Dichte in dem expliziten Gesetze

$$E = e\left\{1 - (1 - \alpha)^s\right\}$$

vollständig erschöpft sei, ohne dafs α noch s implizite enthalte, oder aber, dafs $\varDelta$ und μ selbst Funktionen von v seien, die dann so beschaffen sein müssen, dafs kraft des Draperschen Satzes $\frac{\mu^3}{\varDelta}$ von v unabhängig wird. Ich hatte diese letztere Möglichkeit nicht nur erwogen, sondern bereits in die Gleichungen der Wärmetheorie eingeführt,

als ich zu meiner Freude die Abhandlung Herrn Eberts[1] erhielt, welche sowohl aus eigenen als Herrn Janssens Beobachtungen zu dem Schlusse zwingt, dafs das einfach explizite Absorptionsgesetz ungenügend ist.

Es sollen nun im folgenden die neuen Parametergleichungen abgeleitet werden, einmal unter der einfachen Voraussetzung, dafs Δ und μ nur Funktion von O, nicht aber auch von v seien, das andere Mal unter Wegfall dieser vereinfachenden Annahme. In beiden Fällen dürfen nur umkehrbare Prozesse in Betracht kommen, da der Druck des Körpers dem äufseren Drucke stets bis auf ein unendlich Kleines gleich sein soll.

Da Δ geradezu die lebendige Kraft der inneren Bewegung des Körpers bedeutet, so kann der erste Teil der Energie $U = T + F$ dem Ausdrucke

$$T = A\Delta$$

gleich gesetzt werden, sei es nun, dafs Δ direkt den Körperteilchen, oder durch diese angeregt, den Ätherteilchen entspräche. A ist eine Konstante, die im ersten Falle der Einheit gleich wäre. Die Funktion der durchschnittlichen Konfiguration ist

$$F = \iint f(r)\, dr\, s\, dv$$

wenn r die mittlere Entfernung der Teilchen bedeutet, $s\,dv$ das Massenelement und $f(r)$ die schon in (93b) S. 156, oder (134) S. 168 vorkommende μ-Funktion ist.

Der innere Druck, der im Falle eines umkehrbaren Prozesses stets dem äufseren Drucke p gleich bleibt, setzt sich aus zwei Teilen zusammen, die man bezüglich statischen und dynamischen Druck nennen könnte, so dafs ist

$$p = p_1 + p_2$$

Für p_1 den statischen Druck haben wir schon die, zu keinem Widerspruche führende Gleichung gefunden [S. 168, (134)—(138)]

$$p_1\, dv = dm \int f(r)\, dr = b\,\frac{dm}{\mu}$$

die man, indem $dm = s\,dv$, mit s die Dichte bezeichnend, geschrieben wird, auch so deuten kann

$$p_1 = s \int f(r)\, dr = \frac{bs}{\mu}$$

wenn b eine nur von stofflichen Beschaffenheiten abhängige Konstante ist. Damit wird dann

$$F = \int dm\, \frac{p_1}{s} = b \int \frac{s\,dv}{\mu} = \frac{b}{v} \int \frac{dv}{\mu}$$

da die Dichte für das ganze Volum der Masseneinheit konstant genommen werden kann. In dem vorkommenden Integrale bedeutet dv ein Raumelement, es sollte also ausführlicher $\frac{b}{v}\int^{v} \frac{dw}{\mu}$ geschrieben werden.

Der dynamische Druck p_2 kann, insofern er nur von Molekularbewegungen, die gar nicht fortschreitende, sondern blofs oszillierende zu sein brauchen, herrührt, ganz genau so berechnet werden, wie dies für die Gase geschieht[1]. Man findet dafür

$$p_2 = as\Delta$$

wo der Koeffizient a aufser von stofflichen Beschaffenheiten noch höchstens von der Art der mittleren Molekularbewegung abhängt. Man findet hiermit

---

[1] Optische Mitteilungen. Phys. medic. Societät Erlangen. Sitzung vom 8. Juli 1889.
Vergl. O. E. Meyer, Die kinetische Theorie der Gase. Breslau 1877, pag. 20 ff.

$$p = s\left(a\Delta + \frac{b}{\mu}\right) \text{ oder } pv = a\Delta + \frac{b}{\mu}$$

und ebenso:

$$U = A\Delta + \frac{b}{v}\int\frac{dv}{\mu}$$

I. Ist μ von v unabhängig, so mufs nach dem **Draper**schen Gesetze auch Δ von v unabhängig sein; es findet sich dann:

$$U = A\Delta + \frac{b}{\mu}$$

und der erste Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie für die Masseneinheit des Stoffes angewendet lautet sonach:

$$dQ = A\,d\Delta - b\frac{d\mu}{\mu^2} + \left(a\Delta + \frac{b}{\mu}\right)\frac{dv}{v}$$

wonach ersichtlich zwischen Δ und μ eine Beziehung stattfinden mufs, da eine der Variabelen Δ, μ mit v zusammen zur Zustandsbestimmung genügt. Man kann daher auch schreiben:

$$dQ = \left(A - \frac{b}{\mu^2}\cdot\frac{d\mu}{d\Delta}\right)d\Delta + \left(a\Delta + \frac{b}{\mu}\right)\frac{dv}{v}$$

Nun besagt aber der zweite Satz der Wärmetheorie, dafs

$$\frac{1}{\Theta} = \frac{1}{\sqrt[4]{D}}\cdot\Delta^{-\frac{1}{4}}\mu^{\frac{3}{4}}$$

der integrierende Faktor der obigen Differentialgleichung sei, deren Integral die Entropie S ist. Dies giebt als Beziehungsgleichung zwischen Δ, μ und v:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\Delta^{-\frac{1}{4}}\mu^{\frac{3}{4}}\left(A - \frac{b}{\mu^2}\frac{d\mu}{d\Delta}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial\Delta}\left[\Delta^{-\frac{1}{4}}\mu^{\frac{3}{4}}\left(a\Delta + \frac{b}{\mu}\right)\frac{1}{v}\right]$$

Da aber die Klammergröfse der linken Seite der Annahme nach v gar nicht enthält, so mufs der rechts stehende Differentialquotient $= 0$ sein. Das heifst aber:

$$\Delta\frac{d\mu}{d\Delta}(3a\Delta\mu - b) = -\mu(3a\Delta\mu - b)$$

oder

$$\Delta\mu = \text{konst.}$$

wo die Konstante weder von der Temperatur, noch von der Dichte abhängt. Entwickelt man aus Gleichung (106) S. 159 die Wellenlängen der Spektralgrenzen, indem man $L = \iota$ unendlich klein, sonst aber konstant setzt, so hat man:

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi\iota\frac{\mu^3}{\Delta}}\left\{1 + \tfrac{1}{4}\pi\iota\frac{\mu}{\Delta} + \cdots\right\} \text{ und } \lambda_2 = 2\sqrt{\frac{\Delta\mu}{\pi\iota}}\left\{1 - \tfrac{1}{4}\pi\iota\frac{\mu}{\Delta} - \tfrac{1}{16}\pi^2\iota^2\frac{\mu^2}{\Delta^2} - \cdots\right\}$$

d. h. bei der genügend grofsen Näherung des ersten Gliedes stehen bleibend (es kann ja ι so klein gewählt werden, als wir wollen), den Satz: Die brechbare Grenzwellenlänge des Spektrums ist eine reine Funktion der Temperatur, die weniger brechbare eine reine, nur von stofflichen Beschaffenheiten abhängige Konstante, solange das Spektrum die Dichte implizite nicht enthält. Wendet man den Satz für die Dichte s des Stoffes an, so wird für sehr kleine λ_1 und grofse λ_2:

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi\iota\frac{\mu^3}{\Delta}} \text{ und } \lambda_2 = 2\sqrt{\frac{\Delta\mu}{\pi\iota}}\left[1 - \left(1 - \frac{\Delta\mu}{Hm}\right)^s\right]$$

λ_2 also eine reine Funktion der Dichte, da mH, wie wir jetzt sehen werden, ebenfalls absolut konstant ist.

Für den absolut schwarzen Körper können wir mit Gewifsheit sagen, dafs sein Spektrum von der Dichte unabhängig ist. Für diesen ist also stets

$$mH = \text{konst.} = J \qquad \frac{m^3 O^4}{H} = D$$

mithin die Totalintensität und chromatische Wellenlänge resp. der absoluten Temperatur direkt und invert proportional. (Auf Seite 184 fanden wir die Temperaturexponenten resp. $\frac{1}{4}$ und $-\frac{1}{4}$ statt der jetzt genauer gefundenen 1 und -1, doch wurde schon dort darauf hingewiesen, dafs diese Werte höchstens eine rohe Näherung darstellen.)

Dieser Satz ist von gröfster Wichtigkeit, denn nun kann aus bei einer Temperatur gegebenem m die Temperatur eines beliebigen Absorptions- oder Superpositionsspektrums gerechnet werden. Wir fanden auf Seite 185 und 186 $m = 1.1651$ und $m = 6.96$ für die Wellenlänge des Intensitätsmaximums im Spektrum eines absolut schwarzen Körpers, der bezüglich mit der äufsersten Chromosphärenschichte und der atmosphärischen Luft gleich temperiert ist. Ist die mittlere Temperatur der letzteren $O = 273$, so ergiebt sich die der Chromosphärenhülle der Sonne zu $O = 1634^0$. Diese Zahl darf freilich der gänzlich verschiedenen Beobachtungsmethode halber gar nicht mit aktinometrischen Messungen verglichen werden, welche sich zumeist überwiegend auf die Photosphäre der Sonne beziehen. Unser m, erhalten aus der Absorption des Photosphärenlichtes in der Chromosphäre, bezieht sich in der That auf die Temperatur dieser äufsersten Hülle.

II. Die allgemeinere und durch die neueren Beobachtungen gestützte Annahme ist, dafs die Parameter Λ und u auch von v der Dichte abhängen. Dann ist

$$U = A\Lambda + \frac{b}{v}\int\frac{dv}{u}$$

zu schreiben und die erste Hauptgleichung gewinnt die folgende Form

$$dQ = \frac{\partial U}{\partial O}\,dO + \left(\frac{\partial U}{\partial v} + p\right)dv$$

$$dQ = dO\left\{A\Lambda' - \frac{b}{v}\int\frac{u'\,dv}{u}\right\} + dv\left\{A\dot{\Lambda} - \frac{b}{v}\int\frac{dv}{\mu} + \frac{a\Lambda}{v} + \frac{2b}{\mu v}\right\}$$

wobei die Differentiation nach der Temperatur durch einen Strich, nach dem Volumen, durch einen Punkt bezeichnet ist. Die durch den zweiten Hauptsatz der Wärmetheorie ausgedrückte Parametergleichung lautet jetzt

$$\frac{\partial}{\partial v}\left\{\Lambda^{-\frac{1}{4}}u^{\frac{1}{4}}\left[A\Lambda' - \frac{b}{v}\int\frac{u'\,dv}{u^2}\right]\right\} = \frac{\partial}{\partial O}\left\{\Lambda^{-\frac{1}{4}}\mu^{\frac{1}{4}}\left[A\dot{\Lambda} - \frac{b}{v}\int\frac{dv}{\mu} + \frac{a\Lambda}{v} + \frac{2b}{\mu v}\right]\right\}$$

oder explizite aufgeschrieben, mit $4\Lambda^{\frac{5}{4}}u^{\frac{3}{4}}$ durchmultipliziert und geordnet

$$\frac{b}{v}\int\frac{\mu'\,dv}{u^2}\left\{u\dot{\Lambda} - 3\Lambda\dot{\mu}u\right\} + \frac{b}{v}\int\frac{dv}{u}\left\{3\Lambda\mu'\dot{\mu} - \mu\dot{\Lambda}'\right\} + 4A\Lambda\mu(\Lambda\dot{\mu}' - \mu'\dot{\Lambda})$$
$$+ \frac{\Lambda}{v}\left\{2bu' - 3a\Lambda\mu'\right\} - \frac{\mu}{v}\left\{2b\Lambda' + 3a\Lambda'\mu\right\} = 0$$

Zwischen Λ und u lassen sich aber zwei Beziehungen sofort aufschreiben. Nach dem Draperschen Gesetze darf in

$$\lambda = {}^{4}\sqrt{\pi u\frac{u^3}{\Lambda}} \quad \text{oder} \quad \frac{u^3 O^4}{\Lambda} = D$$

$\frac{u^3}{\Lambda}$ nur von der Temperatur abhängen, was auch immer die Dichtigkeit sei. Daraus folgt aber

$$\dot{\mu} = \frac{\mu}{3\varDelta}\dot{\varDelta} \text{ und } \mu' = \frac{\mu(\varDelta'\Theta - 4\varDelta)}{3\varDelta\Theta}$$

und hieraus weiter:

$$\mu^2\dot{\varDelta} - 3\varDelta\mu\dot{\mu} = 0, \quad \varDelta'\dot{\mu} - \mu'\dot{\varDelta} = \frac{4\mu}{3\Theta}\dot{\varDelta}, \quad 3\varDelta\mu\mu' - \mu^2\varDelta' = -\frac{4\varDelta\mu^2}{\Theta}$$

wonach unsere Gleichung übergeht in:

$$-\frac{4b\varDelta\mu^2}{\Theta v^2}\int\frac{dv}{\mu} + 4A\frac{\varDelta\mu^2}{\Theta}\dot{\varDelta} + 4\frac{\varDelta'}{v}\left\{\frac{b}{3}\mu - a\varDelta\mu^2\right\} + 4\frac{\varDelta\mu}{\Theta v}\left\{\frac{2b}{3} + a\varDelta\mu\right\} = 0$$

die noch durch Division mit 4μ in die Form gebracht werden kann:

$$A\frac{\varDelta\mu}{\Theta}\dot{\varDelta} + \frac{\varDelta'}{v}\left(\frac{b}{3} - a\varDelta\mu\right) + \frac{\varDelta}{\Theta v}\left(\frac{2b}{3} + a\varDelta\mu\right) - b\frac{\varDelta\mu}{\Theta v^2}\int\frac{dv}{\mu} = 0$$

wobei es sich empfiehlt, das Produkt $\varDelta\mu$ zu belassen, ohne $\mu^3 = \frac{D\varDelta}{\Theta^4}$ einzuführen. Differenziert man jetzt diese Gleichung partiell nach v, nachdem sie mit $\frac{v^2}{\varDelta\mu}$ durchmultipliziert wurde, so kommt als allgemeinste Parametergleichung des Spektrums die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung zweiten Grades:

$$A\frac{v^2}{\Theta}\ddot{\varDelta} + \frac{v}{3\varDelta\mu}(b - 3a\varDelta\mu)\dot{\varDelta}' + v\left(2\frac{A}{\Theta} + \frac{9a\varDelta\mu - 2b}{9\varDelta\mu\Theta}\right)\dot{\varDelta} - \frac{4b}{9}\frac{v}{\varDelta^2\mu}\varDelta'\dot{\varDelta}$$
$$+ \frac{b - 3a\varDelta\mu}{3\varDelta\mu}\varDelta' + \frac{a\varDelta}{\Theta} - \frac{b}{3\Theta\mu} = 0$$

Setzt man hierin $\dot{\varDelta} = 0$, so kommt man wieder auf die Lösung I zurück.

Durch die Substitution

$$\varDelta\mu = z, \quad \dot{\varDelta} = \frac{3\varDelta\dot{z}}{4}, \quad \varDelta' = \frac{\varDelta}{z}\left(\frac{3z'}{4} + \frac{z}{\Theta}\right)$$

und nachherige Durchmultiplikation der Gleichung mit $4\frac{z}{\varDelta}$ entsteht die etwas einfachere Form:

$$\frac{3Av^2}{\Theta}\ddot{z} - \frac{3Av^2}{4\Theta z}\dot{z}^2 + \frac{v(b - 3az)}{z}\dot{z}' + \frac{v(3az - 5b)}{4z^2}\dot{z}z' + v\left(\frac{6A}{\Theta} - \frac{b}{\Theta z}\right)\dot{z} + \frac{b - 3az}{z}z' = 0$$

die jetzt nur mehr die Variabelen z, Θ, v enthält.

Man könnte die Gleichung mit willkürlichen Funktionen gegebenen Arguments dadurch lösen, daſs man $z' = \frac{dz}{d\Theta} - \dot{z}\frac{dv}{d\Theta}$ einführt, und die Gleichung wegen der Willkürlichkeit von $\frac{dv}{d\Theta}$ in zwei teilt. Die eine derselben läſst sich sogleich integrieren, die andere dagegen wegen ihrer Homogeneität um einen Grad erniedrigen. Doch bleibt die entstehende Differentialgleichung erster Ordnung allgemein unintegrabel.

Setzt man dagegen

$$z = C\,\Theta^m v^n$$

mit C eine willkürliche Konstante bezeichnend, so ist die gegebene Gleichung identisch befriedigt, wenn m und n den Gleichungen

$$An - am = 0, \; 4(m - n) = mn$$

genügen. Es ist mithin

$$z = C_1\Theta^{4\left(\frac{A}{a} - 1\right)}v^{4\left(1 - \frac{a}{A}\right)} \text{ und } z = C_2$$

je ein partikuläres Integral, das jedoch in dieser Form nicht verallgemeinert werden kann, da das erstere durch Zerfallen der ursprünglichen Gleichung in zwei Teilgleichungen entstanden ist. Daſs z = konst. übrigens ein Integral der Gleichung ist, sieht man auf den ersten Blick. Es entspricht diese Lösung der unter I gefundenen.

Das Gefundene scheint schon darauf hinzudeuten, dafs die versuchsweise Annahme

$$= \varphi(O^m v^n)$$

wo φ eine beliebige Funktion bedeutet, gute Dienste leistet. Offenbar enthält diese Annahme keine Beschränkung von vornherein, insofern bei beliebigem φ, m, n durch obigen Ausdruck eine jede Funktion von O und v darstellbar ist. Man erhält nun statt der vorgelegten Gleichung die folgende

$$\varphi''\left[3An - 3amn + \frac{b}{\varphi} mn\right] O^{2m-1} v^{2n} + \frac{\varphi'}{\varphi}\left[\frac{5a}{4} mn - \frac{3A}{4} n - \frac{5b}{4\varphi} mn\right] O^{2m-1} v^{2n}$$
$$+ \varphi'\left[3An + 3An - 3amn - 3am + \frac{b}{\varphi}(mn + m - n)\right] O^{m-1} v^n = 0$$

die allgemein nicht integriert werden kann. Setzt man nun

$$_1 = \alpha, \quad 1 + \frac{m-n}{mn} = \beta, \quad \frac{3(An - am)}{bmn} = \gamma, \quad 1 - \beta = \frac{n-m}{mn} = \varepsilon, \quad O^m v^n = x$$

so kann man schreiben

$$\frac{1}{\varphi}\left[\varphi'' x - \alpha x \frac{\varphi'^2}{\varphi} + \beta \varphi'\right] + n\gamma\left|\varphi'' x - \tfrac{1}{4} x \frac{\varphi'^2}{\varphi} + \frac{n+1}{n} \varphi'\right| = 0$$

und die Integration wäre sofort möglich, wenn man $\gamma = 0$, d. h. die Beziehung $An - am = 0$ zwischen den willkürlich gelassenen Gröfsen m, n annähme. Die so entstehende Gleichung ist ihrer Homogeneität halber lösbar, und giebt

$$\varphi^{\alpha-1} x^{\beta-1} = C_1 \varphi^{\alpha-1} + C_2 x^{\beta-1}$$

oder anders geordnet

$$\varphi(O^m v^n) = \Delta\mu = k_1\left(1 + k_2 O^{1-\frac{1}{a}} v^{\frac{a}{1}-1}\right)^{-}$$

die ein allgemeinerer Fall der früher gefundenen Lösung ist. Bedeuten nun $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ ganz beliebige Funktionen eines willkürlichen Arguments, so ist

$$\Delta\mu = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\left(1 + \psi(y) O^{1-\frac{1}{a}} v^{\frac{a}{1}-1}\right)^{-} dx\, dy$$

als allgemeine Lösung zu betrachten. Freilich ist diese Lösung noch nicht die allgemeinste, insofern, als durch die Annahme $\gamma = 0$ nicht nur n, sondern zugleich auch m aus dem Exponenten von O und v verschwindet.

Die allgemeinere Lösung erhält man, wenn man in dem gefundenen Integrale die Konstanten k_1 und k_2 variiert. Nach den üblichen Methoden gelangt man zu folgenden zwei Gleichungen

$$k_1(1 + k_2 x^\varepsilon) - 4 k_1 k_2 x^\varepsilon = 0$$
$$- k_1\left\{\frac{4\varepsilon}{k_1} k_2^6 x^{6\varepsilon} + \frac{20}{k_1}\varepsilon k_2^5 x^{5\varepsilon} + \frac{40}{k_1}\varepsilon k_2^4 x^{4\varepsilon} + \frac{40}{k_1}\varepsilon k_2^3 x^{3\varepsilon} + \left(\frac{20}{k_1}\varepsilon + 4\varepsilon n\gamma\right) k_2 x^{2\varepsilon}\right.$$
$$\left. + \left(\frac{4\varepsilon}{k_1} + 4\varepsilon n\gamma\right) k_2 x^\varepsilon\right\}$$
$$+ k_2\left\{16\varepsilon k_2^5 x^{6\varepsilon} + 60\varepsilon k_2^4 x^{5\varepsilon} + 80\varepsilon k_2^3 x^{4\varepsilon} + 40\varepsilon k_2^2 x^{3\varepsilon} + 16\varepsilon n\gamma k_1 k_2 x^{2\varepsilon}\right.$$
$$\left. - (4\varepsilon + 4\varepsilon n\gamma k_1) x^\varepsilon\right\} + \left\{\varepsilon n\gamma\left(16\varepsilon - \frac{4}{m}\right) k_1 k_2 x^{2\varepsilon-1} - \frac{4\varepsilon}{m} n\gamma k_1 k_2 x^{\varepsilon-1}\right\} = 0$$

Ersetzt man hierin k_2 aus der ersten Gleichung, so erhält man das folgende einfachere System

$$k_1'(1+k_2 x^\varepsilon) - 4k_1 k_2' x^\varepsilon$$
$$k_2'[n\gamma k_1 + (1+k_2 x^\varepsilon)^4] - \varepsilon \frac{k_1 k_2}{x}\left[4\varepsilon n\gamma k_2 x^\varepsilon - \frac{n\gamma}{m}(1+k_2 x^\varepsilon)\right] = 0$$

das durch die vereinfachende Annahme

$$1 + k_2 x^\varepsilon = \omega$$

übergeht in:

$$k_1'\omega = 4k_1\left[\omega' - \varepsilon\frac{\omega-1}{x}\right]$$
$$\left[\omega' - \varepsilon\frac{\omega-1}{x}\right]\left[n\gamma k_1 + \omega^4\right] = \varepsilon n\gamma k_1 \frac{\omega-1}{x}\left[4\varepsilon(\omega-1) - \frac{\omega}{m}\right]$$

Dieses Gleichungssystem ist wieder nicht allgemein lösbar; wir können es jedoch vereinfachen, indem wir nun ω die unabhängige Veränderliche sein lassen, x aus beiden Gleichungen eliminieren, und dementsprechend k_1 als Funktion von ω auffassen. Dadurch erhält man:

$$\frac{1}{k_1}\frac{dk_1}{d\omega}\left[\frac{\omega^4}{k} + p\omega + s\right] = \frac{4}{\omega}[p\omega - q]$$

indem zur Vereinfachung

$$p = n\gamma\left(4\varepsilon - \frac{1}{m}\right), \; q = 4\varepsilon n\gamma, \; s = (1-4\varepsilon)n\gamma$$

gesetzt wurde. Das Integral der vorgelegten Gleichung wird dann:

$$\varDelta\mu = \frac{k_1}{\omega^4}, \quad \lg(\Theta^m v^n) = C + \frac{1}{4\varepsilon}\int\frac{4 - \frac{\omega}{k_1}\frac{dk_1}{d\omega}}{\omega-1}\,d\omega$$

womit ω als eine Zwischenvariabele gekennzeichnet ist. Die eine willkürliche Konstante ist C, die andere steckt in k_1.

Setzt man:

$$\frac{1}{k_1} = a_0\omega^r + a_1\omega^{r+1} + a_2\omega^{r+2} + \cdots$$

so erhält man als Bedingungsgleichung:

$$\begin{aligned} &pa_0(r+4)\omega^{r+1} + pa_1(r+5)\omega^{r+2} + pa_2(r+6)\omega^{r+3} + \cdots \\ &+ a_0(rs-4q)\omega^r + ((r+1)s-4q)a_1\omega^{r+1} + ((r+2)s-4q)a_2\omega^{r+2} + \cdots \\ &+ 2r\frac{a_0^2}{2}\omega^{2r+4} + (2r+1)a_0a_1\omega^{2r+5} + (2r+2)\left(\frac{a_1^2}{2} + a_0a_2\right)\omega^{2r+6} + \cdots = 0 \end{aligned}$$

die nur für den Fall $r = -4$ bestehen kann.

Setzt man fest, daſs a Koeffizienten mit negativem Index $= 0$ sind, daſs weiter $\eta = 1$ oder $\eta = 0$ sei, je nachdem die ganze Zahl ν ungerade oder gerade ist, so ist das Bildungsgesetz der Reihe:

$$(\nu-8)\left[a_0a_\nu + a_1a_{\nu-1} + \cdots + a_{\frac{\nu+\eta}{2}}a_{\frac{\nu-\eta}{2}}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-\eta}\right] - \frac{3\nu+4}{4}q\,a_\nu + p(\nu-1)a_{\nu-1} = 0$$
$$\nu = 0, 1, 2 \ldots$$

die aber die hierin benutzte Bedingung involviert, daſs

$$\varepsilon = 1, \text{ d. h. } n = \frac{m}{1-m}$$

sei. a_1 ist die willkürliche Konstante.

Die vollständige Lösung der vorgelegten Differentialgleichung ist also, die Konvergenz der Integralreihe natürlich vorausgesetzt:

$$\varDelta\mu = \left\{ \sum_0^\infty a_\nu \omega^\nu \right\}^{-1}$$

$$\lg\left(O^m v^{\frac{m}{1-m}}\right) = a_1 + \frac{1}{4\varepsilon} \int \frac{\sum_0^\infty \nu\, a_\nu \omega^{\nu-}}{\sum_0^\infty (a_{\nu-1} - a_\nu)\, \omega^{\nu-}}\, d\omega$$

An Stelle von a_1 und a_1' kann man setzen

$$a_1 = \varphi(m),\ a_1' = \psi(m)$$

wo φ und ψ wieder willkürliche Funktionen der Exponentenindizes von O und v darstellen, die sich durch die Bemerkung bestimmen lassen müssen, daſs bei unendlich kleinem Volumen, also für sehr groſse Dichtigkeit $\varDelta\mu$ eine absolute nur von Körpereigenschaften abhängige Konstante wird, und daſs $\varDelta\mu$ für $O =$ konst. eine vorgeschriebene durch Versuche zu ermittelnde Funktion der Dichte wird. Die erstere Forderung involviert für m, das in p, q und s steckt, zugleich die Grenzbedingung

$$0 < m < 1$$

Besonders einfach gestaltet sich die Integration für ein ideales Gas, da sich die vorgelegte partielle Differentialgleichung wegen Wegfall des Integrals auf eine Gleichung erster Ordnung reduziert, insofern das Potential des Gases auf sich selbst bekanntlich Null zu setzen ist. Ist also

$$b = 0$$

so wird

$$\varDelta v - aO = 0$$

somit das allgemeine Integral

$$= \varDelta\mu = \varphi(O^{\prime} v^{\prime})$$

Setzt man $v = 0$, so wird, da a notwendig immer > 0 ist, $\varDelta\mu$ konstant. Bei immer gröſser werdender Dichte also $\varDelta\mu = Hm$. Die einfache Bedingung kann zur Bestimmung von φ nicht zugezogen werden. Setzt man dagegen entweder O' oder $v' =$ konstant und beobachtet hierbei entweder $\varDelta\mu = f(v)$ oder $\varDelta\mu = F(O)$, so kann hieraus die willkürliche Funktion φ bestimmt werden. Am ehesten scheint diese Bestimmung aus Beobachtungen nach der Lockyerschen Methode zu gelingen.

Hiermit ist, was vor der Hand mein einziger Zweck war, die Richtung gekennzeichnet, in welcher ich die Spektralanalyse als Grundlage der Astrophysik weiter zu betreiben gedenke.

Erklärung der Tafeln.

Die nachfolgenden Tafeln beruhen mit Ausnahme der VI. auf thatsächlichen Beobachtungen und Rechnungen, und sind daher in hohem Grade geeignet, manche Begriffe der theoretischen Spektralanalyse darzustellen. Eine kurze Erklärung derselben, die im Texte nicht passend Platz gefunden hätte, möge ihnen hier vorangehen.

Tafel I

stellt die Beobachtungen Moutons über das Spektrum des glühenden Platins dar, wie sie auf Seite 161 diskutiert wurden. Die ausgezogene äufsere Kurve, die mit dem Werte $L = 0$ beginnt und im Unendlichen wieder die Abszissenaxe erreicht, ist das objektive Spektrum unserer Spektralgleichung. Die innere gestrichelte Kurve stellt die von Mouton beobachtete Intensität dar, die ausgezogene, jene subjektive Intensität, welche aus der objektiven mit Hilfe der Empfindlichkeit (IV. 18) folgt. Der Anschlufs ist, wie man sieht, ein sehr befriedigender.

Tafel II

giebt dieselbe Konstruktion unter Annahme der Michelsonschen Spektralgleichung. Die objektive Kurve, die äufsere der beiden ausgezogenen Kurven, ist äufserlich auf den ersten Blick jener von Tafel I ähnlich, steigt aber steiler an, nachdem sie anfangs eine lange Strecke hindurch konstant Null blieb. Die subjektive (ebenfalls ausgezogene) Kurve stellt die gestrichelte beobachtete Intensitätskurve nur in ihrem fallenden Aste — dort aber sehr gut — dar.

Von $\lambda = 0.95$ an etwa bis $\lambda = 0$ ist die objektive Kurve stets kleiner als die subjektive, was völlig unmöglich ist, da ja letztere aus ersterer hervorgehen mufs, wenn diese mit echten Brüchen multipliziert wird.

Die Daten der Konstruktion sind auf Seite 196 gegeben.

Tafel III

enthält das kontinuierliche und Linienspektrum des Hydrogens in dem Zustande, wie es in der Chromosphäre der Sonne wirklich vorhanden ist, und erläutert zugleich den Begriff: durch ein Linienspektrum läfst sich ein und nur ein kontinuierliches Spektrum legen, welches bei allen Temperaturen in jedem Punkte diesem nach demselben Faktor proportional ist. Das gestrichelte Spektrum ist jenes ideale Spektrum dessen Ordinaten die Intensitäten der Linien des glühenden Stoffes geben; das ausgezogene ist in jedem Punkte das $\frac{2}{3}$-fache des vorigen.

Für das Hydrogen der Chromosphäre fanden wir auf Seite 185: $\mu = 0.5361$, während der Proportionalitätsfaktor nach Gl. III. 249 etwa 0.6 beträgt. Die Wellenlängen des Hydrogens sind nach der Balmerschen Formel eingetragen, so dafs $\lambda = 0.3645$ die letzte derselben bedeutet. Der von $\lambda = 0.397$ bis 0.364 sich erstreckende schraffierte Raum deutet die unendliche Zahl der enggedrängten Linien an, welche sich für Hydrogen hier (nach der Balmerschen Gleichung) vorfinden.

Das sichtbare Spektrum ist in allen drei Tafeln durch eine Klammer unter der Abszissenaxe angedeutet.

Tafel IV

ist die Kurve der Absorption der atmosphärischen Luft, wenn die Zenithalhöhe derselben zur Einheit der Schichtendicke genommen wird. Die elektive Absorption liefse sich ähnlich darstellen, wie in der vorigen

Tafel das Linienspektrum aus dem kontinuierlichen abgeleitet wurde. Die Konstanten der Absorption sind auf Seite 186 durch $\mu = 0{,}5038$, $m = 6{,}96$ gegeben.

Wie man bemerkt, ist das Gefälle der Kurve gerade im sichtbaren Teile des Spektrums am größte.

Tafel V

Die Gestalten der Absorptionsspektra bei wechselnder Dicke der transmittierenden Schichte sind durch diese Tafel anschaulich gemacht. Sie stellt in der gestrichelten Kurve das Sonnenspektrum dar, wie es außerhalb der Atmosphäre erscheinen müßte, wenn es als kontinuierlich vorausgesetzt ist. Bei zenithalem Durchgang durch die Atmosphäre ist es in der Maximalintensität auf etwa 0,8, in einer Höhe von 30° auf 0,7 und im Horizonte selbst auf weniger als 0,5 reduziert. Zugleich rückt das Maximum der Intensität schnell gegen das langwellige Ende des Spektrums hin, so daß es in einer geringeren Höhe der Sonne als 30° bereits außerhalb des sichtbaren Spektrums fällt.

Man bemerkt, wie durchsichtig die Luft für lange Wellen ist.

Tafel VI

stellt zum Teile in idealer Form das Bandenspektrum des Kohlenstoffes und dessen Auflösung in einfachere Bestandteile dar.

Unterhalb der Abszissenaxe befindet sich das Koordinatensystem der Wellenlängen und der laufenden Zahlen und darin ein System von drei benachbarten Balmerschen Kurven, welche für die Punkte 1, 2, 3 und 4 die Wellenlängen

	I	II	III
$n = 1$	$\lambda = 0{,}6219$		
2	5629	0,5581	0,5512
3	5161	5127	5090
4	4738	4727	4675

geben, wobei die Gruppen I, II, III je ein zusammengehörendes Spektrum darstellen.

Das obere Koordinatensystem der Wellenlängen und Intensitäten stellt die (beiläufigen) subjektiven Intensitäten der Linien des Kohlenspektrums dar; wir ersehen daraus, daß die Reihenfolge der Gruppen I, II, III zugleich die der abnehmenden Intensität ist.

Es ist jedenfalls nicht bloßer Zufall, daß sich die Linien der einzelnen Gruppen so eng einer regelmäßigen Kurve anschließen, die die Wellenlängen als Funktionen der laufenden Zahlen geben. Wir mußten daraus schließen, daß sich das Bandenspektrum des Kohlenstoffes in (wenigstens) drei einfachere und unter einander nahe verwandte Spektra dissoziieren lassen müsse; daß die neuen Teilspektra unter einander verwandt sein werden, folgt aus dem nahen Parallelismus der Balmerschen Kurven der drei Gruppen.

Tafel VII

Das Superpositionsspektrum des hellen Sternes Sirius ist eine der interessantesten Darstellungen. Es wurde aus den Beobachtungen H. C. Vogels, der es mit dem Spektrum des Petroleum verglich, abgeleitet und ergab die folgenden Konstanten:

Spektrum des Kernes

$$\frac{1}{\pi\mu} = 1{,}000 \qquad \mu = 0{,}4171$$

Spektrum der denselben umhüllenden Photosphäre

$$\frac{1}{\pi\mu} = 0{,}605 \qquad \mu = 0{,}5361$$

Spektrum des absolut schwarzen Körpers, der mit der Photosphäre im Mittel gleiche Temperatur besitzt

$$\frac{H}{\pi m} = 2{,}5859 \qquad m = 1{,}1651$$

Mit diesen Daten, deren letztere mit jenen der Sonnenphotosphäre übereinstimmen, insofern sie als Hypothesen in die Korrektionsgleichung eingeführt keine entschiedene Verbesserung lieferten, ist 1. das gestrichelte und punktierte Spektrum des Kernes, 2. das punktierte des kontinuierlichen und 3. das gestrichelte des diskontinuierlichen Photosphärenspektrums gezeichnet, wobei die beiden letzteren einander wieder proportional

sind. Durch Addition des Kern- und Photosphärenspektrums, wobei der Absorption der Gashülle Rechnung getragen ist, entsteht das ausgezogene Superpositionsspektrum, welches von $\lambda = 0$ bis $\lambda = 0.27$ kleiner als das diskontinuierliche der Photosphäre, und von $\lambda = 0$ bis $\lambda = 0.42$ kleiner als das kontinuierliche Spektrum des Kernes ist. In das diskontinuierliche Spektrum sind gestrichelt die an und für sich hellen Wasserstofflinien (wieder nach der Balmerschen Formel) eingezeichnet. Da aber in allen Wellenlängen, wo Strahlen des Hydrogens stehen, das Superpositionsspektrum heller ist, als das diskontinuierliche an sich, so giebt die Verlängerung der Ordinaten bis zum Superpositionsspektrum den Unterschied der Helligkeit eines Strahls gegen den helleren Hintergrund, d. h. die Intensität der dunklen, umgekehrten Linien. Die Verlängerungen der Ordinaten, welche also die Intensität der dunklen Linien darstellen, sind voll ausgezogen.

Stünde eine Hydrogenlinie im Punkte $\lambda = 0.27$, so wäre sie weder als helle, noch als dunkle Linie sichtbar, da in diesem Punkte die Photosphäre ebensoviel Licht vom Kernspektrum absorbiert, als sie selbst hinzufügt. Eine Linie dagegen, welche diesseits von $\lambda = 0.17$ stünde, wäre gar nicht umgekehrt, sondern hell. Die Intensität, mit welcher sie sich vom hellen Superpositionsspektrum abhebt, ist die Differenz der Ordinaten zwischen diesem und dem diskontinuierlichen Spektrum.

Fällt der Punkt, wo Absorption und Emission der Photosphäre sich aufheben in das sichtbare Spektrum hinein, so haben wir die Spektralerscheinungen, wie wir sie für γ Cassiopeiae und β Orionis auf Seite 239 schon besprachen.

R. v. Kövesligethy.

Tafel II.

R. v. Kövesligethy.

Tafel III.

R.v. Kövesligethy.

Tafel IV.

1·0
0·9
0·8
0·7
0·6
0·5
0·4
0·3
0·2
0·1
0·0

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20×10^{-4} mm.

R. v. Kövesligethy.

Tafel V.

R.v. Kövesligethy.

R. v. Kövesligethy.

R. v. Kövesligethy.